LLOYD SHAPLEY

Marcin Malawski
Instytut Podstaw Informatyki PAN i Akademia Leona Koźmińskiego

Wstęp

Gdy zeszłej jesieni szwedzka Królewska Akademia Nauk przyznała nagrodę Nobla w dziedzinie nauk ekonomicznych Lloydowi Shapleyowi i Alvinowi Rothowi, nasi krajowi dziennikarze tradycyjnie wypytywali specjalistów, czy laureaci mają na koncie jakieś wiekopomne dokonania w rodzaju przewidzenia obecnego kryzysu czy też tego, kiedy on się skończy. Odpowiadaliśmy wtedy, że jest wręcz przeciwnie – nagroda nie miała żadnego związku z bieżącą sytuacją gospodarki światowej. Gdyby zaś próbować się go na siłę doszukiwać, można by najwyżej powiedzieć, że nagrodę przyznano za zaprojektowanie mechanizmów umożliwiających doprowadzenie w scentralizowany sposób do korzystnych społecznie alokacji zasobów w pewnych sytuacjach, w których zwykły „wolny rynek" nie jest w stanie tego dokonać.

Są to prace o poważnym znaczeniu praktycznym, jednak w dorobku Shapleya stanowią tylko niewielką część i można zaryzykować twierdzenie, że nie najważniejszą. Shapley jest twórcą pojęć i twierdzeń, które weszły do kanonu czystej nauki. Wywarł ogromny wpływ na współczesną teorię gier, a teorię gier kooperacyjnych w istocie ukształtował.

Dla naszej grupy w zespole Teorii Gier i Decyzji w IPI PAN ubiegłoroczna nagroda była nie lada powodem do radości. Od lat pracujemy nad rozmaitymi pojęciami pochodzącymi od Shapleya i nad uogólnieniami i zastosowaniami jego wyników. Od lat też przy kolejnych nagrodach Nobla za prace z teorii gier oczekiwaliśmy, że wreszcie kiedyś zostanie uhonorowany ten gigant naszej dziedziny, jakim jest Lloyd Shapley. Nastąpiło to w końcu na krótko przed jego dziewięćdziesiątymi urodzinami – w chwili, gdy już nie był w stanie wygłosić pełnowymiarowego wykładu podczas ceremonii w Sztokholmie. Był jednak na uroczystości wręczania nagród i przedstawił krótką prezentację, udzielił też paru interesujących wywiadów.

DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.7

Życiorys

Lloyd Shapley jest jednym z rzadkich już w dzisiejszych czasach wybitnych uczonych będących dziećmi wybitnych uczonych. Postać jego ojca, Harlowa Shapleya, niewątpliwie aż do ubiegłorocznej nagrody Nobla była bardziej znana niż syna, a jego nazwisko występuje w każdej encyklopedii. Harlow Shapley był jednym z największych astronomów pierwszej połowy XX wieku. Zasłynął przede wszystkim zlokalizowaniem centrum Drogi Mlecznej i wykazaniem, że nasz Układ Słoneczny znajduje się na jej obrzeżach – jak z pewną dozą patosu napisał jego biograf, zrobił z naszą galaktyką to, co Kopernik z Układem Słonecznym. Był też jednym z najbardziej prominentnych (i pierwszych) amerykańskich uczonych, których słynna komisja MacCarthy'ego wciągnęła we wczesnych latach pięćdziesiątych na listę kryptokomunistów; warto jednak zauważyć, że nie przeszkodziło to niemal równoczesnemu zatrudnieniu jego syna w RAND Corporation, słynnej interdyscyplinarnej instytucji badawczej pracującej głównie dla wojska.

Lloyd był jednym z pięciorga dzieci. Wychowywał się w domu na terenie obserwatorium astronomicznego Uniwersytetu Harvarda, którego dyrektorem był wówczas jego ojciec, i od małego chłonął atmosferę przyjmującego licznych gości domu rodziny uczonych. Jako dziecko chętnie i z powodzeniem rywalizował ze starszym rodzeństwem w rozwiązywaniu łamigłówek i zagadek logicznych. W 1943 r., krótko po wstąpieniu na studia matematyczne na Uniwersytecie Harvarda, został powołany do wojska. Służył w bazie lotniczej w Czengdu w Chinach i został odznaczony za złamanie sowieckiego szyfru meteorologicznego[1]. Po powrocie do Stanów i ukończeniu studiów podjął pracę w RAND Corporation, gdzie – z przerwą na napisanie doktoratu w Princeton – pracował przez trzydzieści lat. Od 1981 r. jest profesorem Uniwersytetu Kalifornijskiego w Los Angeles.

Przez całe swoje życie naukowe Shapley zajmował się głównie teorią gier, zarówno czystą, jak i stosowaną. Jest jedną z paru osób, których prace zadecydowały o dzisiejszym kształcie tej dziedziny nauki. Ma też na swoim koncie znaczące osiągnięcia czysto matematyczne, jednak i one powstawały na ogół z myślą o użyciu w teorii gier.

1 Bardziej poprawna politycznie wersja mówi o łamaniu szyfrów japońskich; podaje ją m.in. Sylvia Nasar w swej dziennikarskiej biografii Johna Nasha [9]. Ta książka jest wprawdzie mniej bałamutna niż nakręcony na jej podstawie film (por. artykuł Marka Kamińskiego [5] w 12 numerze Decyzji), ale można się z niej dowiedzieć np., że Dirichlet udowodnił, iż wśród wyrazów dowolnego ciągu arytmetycznego jest nieskończenie wiele liczb pierwszych. Informacja o łamaniu szyfrów sowieckich pochodzi z wywiadu z samym Shapleyem przeprowadzonego w grudniu 2012 r. w Sztokholmie i zamieszczonego na www.nobelprize.org. Amerykanie potrzebowali sowieckich danych meteorologicznych z Dalekiego Wschodu dla prognozowania pogody nad Japonią.

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.7

Gry kooperacyjne i wartość Shapleya

Pojęciem, dzięki któremu Shapley zapisał się na trwałe w historii nauki i które niewątpliwie kojarzy się z jego postacią jako pierwsze, jest zdefiniowana przez niego wartość (*value*) dla gier kooperacyjnych. Szybko została ona nazwana wartością Shapleya i niemal równie szybko weszła do podręczników. Pojęcie to (podobnie jak równowaga Nasha) jest tak naturalne, jakby było wzięte wprost z rzeczywistości fizycznej, i gdyby nie wymyślił go Shapley, z pewnością niedługo później zrobiłby to ktoś inny. Prawdą jest, że ludzie zajmujący się we wczesnych latach pięćdziesiątych ubiegłego wieku teorią gier, dziedziną wtedy prawie zupełnie nową i uważaną za bardzo obiecującą, przecierali szlaki i spora część ich prac stała się klasyką, tu jednak mamy do czynienia z klasykiem wśród klasyków.

Ponieważ niedawno w *Decyzjach* ukazał się mój przeglądowy artykuł o wartości Shapleya [7] , tu opiszę ją tylko skrótowo. W odróżnieniu od gier niekooperacyjnych, tj. takich, jakie potocznie rozumiemy pod pojęciem „gry" i jakimi zajmuje się większa część teorii gier, w grach kooperacyjnych gracze mogą przed rozgrywką zawrzeć wiążące i możliwe do wyegzekwowania porozumienia co do swojego postępowania w samej rozgrywce. Interesujące staje się wtedy nie to, jakie strategie wybiorą do grania (bo wybiorą takie, jakie uzgodnią przed rozgrywką), tylko to, jakie koalicje zawrą i jak podzielą w tych koalicjach wypłaty uzyskane w wyniku rozegrania gry. Można więc każdej potencjalnie możliwej koalicji graczy przypisać pewną liczbę – maksymalną sumę wypłat, jaką ci gracze są w stanie zapewnić sobie w grze dogadawszy się między sobą, bez konieczności jakiejkolwiek współpracy z graczami spoza koalicji (czyli niezależnie od tego, jak będą grać tamci). Te wielkości dla wszystkich koalicji, opisujące ich „samodzielne" możliwości, określają *grę kooperacyjną*. Ponieważ w typowych grach kooperacyjnych opłaca się łączenie koalicji i najwięcej do podziału będzie wtedy, gdy powstanie *wielka koalicja* złożona ze wszystkich graczy, podstawowym problemem jest to, jak wszyscy gracze powinni podzielić między siebie wypłatę uzyskaną przez wielką koalicję (a także to, jak ją dzielą w praktyce). Oczywiście szukając tego „sensownego" podziału, trzeba uwzględniać możliwości wszystkich koalicji, a nie tylko wielkiej, choćby dlatego, że na ogół jednym graczom bardziej zależy na powstaniu wielkiej koalicji (jako że sami mogą stosunkowo mało), a innym mniej.

Można uważać, że rozsądnym rozwiązaniem jest wybór takiego podziału, jakiego nie zakwestionuje żadna koalicja, ponieważ każdej daje on łącznie co najmniej tyle, ile byłaby sobie w stanie zapewnić sama. Takie podziały są „stabilne", a ich zbiór nazywa się *rdzeniem* gry. Wyznaczenie rdzenia gry zazwyczaj jednak nie załatwia sprawy: ma on na ogół wiele elementów i pozostaje problem, który z nich wybrać. Z drugiej strony w wielu grach rdzeń jest pusty – każdy podział nie podoba się jakiejś

DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.7

koalicji i co więcej, może go ona skutecznie zablokować, odchodząc i wypracowując sobie więcej na własną rękę.

Shapley w swoim doktoracie zaproponował prostą i zupełnie nową metodę opartą na wkładach graczy w koalicje, czyli różnicach między łącznymi wypłatami, jakie dana koalicja może sobie zapewnić z udziałem danego gracza i bez niego. Metoda ta przypisuje każdej grze kooperacyjnej dokładnie jeden podział. Przy jej zastosowaniu każdy gracz dostaje swoją *wartość*, będącą średnią – po wszystkich możliwych ustawieniach graczy w kolejności – jego wkładów do koalicji graczy, którzy w danym ustawieniu znajdują się przed nim.

Jeżeli na przykład w trzyosobowej grze, w której graczami są A, B i C, poszczególne koalicje są w stanie zapewnić sobie wypłaty

$$v(A) = v(B) = 1,\ v(C) = 2,\ v(AB) = v(AC) = 3,\ v(BC) = 4,\ v(ABC) = 6$$

to przy kolejności graczy: A pierwszy, C drugi i B ostatni, wkłady graczy w koalicje poprzedników wynoszą:

$$\text{wkład A} = 1, \quad \text{wkład C} = 2\ (= v(AC) - v(A)), \quad \text{wkład B} = 3\ (= v(ABC) - v(AC))$$

a średnie wkłady po wszystkich (sześciu) możliwych ustawieniach

$$\text{gracza A} : 1\frac{1}{2}, \quad \text{gracza B} : 2, \quad \text{gracza C} : 2\frac{1}{2}$$

i to są *wartości Shapleya* poszczególnych graczy.

Prędko okazało się, że ta metoda wyznaczania podziału ma liczne bardzo pożądane właściwości (część z nich podał sam jej twórca w klasycznej pracy [11]), z których wiele wiąże się w oczywisty sposób z pojęciami sprawiedliwości. Można ją zatem z powodzeniem i z sensem stosować, i stosuje się, w problemach podziału zysków ze współpracy, a z drugiej strony – także podziału kosztów. Co więcej, w rozmaitych szczególnych przypadkach – np. przy podziale tzw. kosztów szeregowych – jest ona równoważna bardzo prostym i intuicyjnie sprawiedliwym algorytmom rozdzielania poszczególnych składników kosztu.

Shapley przez wiele lat pracował nad uogólnieniami wartości na bardziej złożone rodzaje gier – gry „oceaniczne” z jednym lub kilkoma graczami dużymi i „oceanem” graczy małych, co jest charakterystyczne np. dla struktury własności spółek giełdowych ([8], [10]), gry bezatomowe mające tylko continuum graczy nieskończenie małych ([1]) czy gry bez wypłat ubocznych, w których nie jest możliwe dowolne dzielenie się wypłatą ([14]).

Zauważył też we wspólnej pracy z Shubikiem [16], że wartość zastosowana do tzw. gier prostych, opisujących systemy podejmowania decyzji w ciałach takich jak

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.7

parlamenty, rady gmin, walne zebrania akcjonariuszy itp., ma naturalną interpretację jako miara „siły" graczy w tych ciałach. W najprostszej wersji gry prostej każdy gracz (= partia polityczna, akcjonariusz...) dysponuje jakąś liczbą głosów, koalicje większościowe mogące przegłosować dowolny wniosek i zapewnić sobie łączną wypłatę 1 są wygrywające, a mniejszościowe same nie mogą wskórać nic, więc są przegrywające (wypłata 0). Na przykład w polskim Sejmie wg stanu z 2012 r., w którym liczyło się tylko pięć ugrupowań (PO, PiS, SLD, RuchP. i PSL), wygrywające były koalicje PO z każdym innym ugrupowaniem, koalicja czterech dużych ugrupowań bez PO i oczywiście każda koalicja zawierająca którąkolwiek z wyżej wymienionych. W tej grze wartość Shapleya – zwana w kontekście gier prostych indeksem siły Shapleya-Shubika – gracza PO wynosiła 0,6, a wartość każdego innego gracza z powyższej piątki 0,1.

Powyższy model podejmowania decyzji przez głosowanie oczywiście nie uwzględnia wielu istotnych czynników, jednak indeks Shapleya-Shubika jest często używany przez politologów np. do ocen, kto korzysta, a kto traci na zmianach reguł podejmowania decyzji[2] (czyli zmianach gry). Bardziej realistyczne wersje indeksu uwzględniają np. rozmaite ograniczenia możliwości tworzenia koalicji. Jedno z nich, zaproponowane przez Owena i Shapleya [15], przyjmuje, że każdy z graczy jest usytuowany w pewnym punkcie „przestrzeni ideologicznej", a miejsca, które zajmują, wyznaczają prawdopodobieństwa poszczególnych ustawień uwzględnianych przy wyliczaniu indeksu. Niektóre ustawienia mogą nawet w ogóle nie być uwzględniane – np. takie, w których do partii skrajnie lewicowej dołącza jako pierwsza skrajnie prawicowa.

Ograniczenia na tworzenie koalicji dotyczą zresztą nie tylko gier prostych. Istnieje obfita i wielowątkowa literatura na temat gier kooperacyjnych z ograniczonymi możliwościami komunikacji pomiędzy graczami (opisanymi np. przez grafy), a centralne miejsce zajmują w niej badania nad wartościami gier z takimi strukturami.

Wkład Shapleya w teorię gier kooperacyjnych nie ogranicza się do wartości i jej udoskonaleń. Wśród jego licznych wyników najbardziej znane jest chyba twierdzenie charakteryzujące gry z niepustym rdzeniem przez odpowiednie układy nierówności dla tzw. zbalansowanych rodzin koalicji; warunki te umożliwiają wyznaczanie rdzenia metodami programowania liniowego. Tu co prawda Shapley [13] nie był pierwszy – to samo twierdzenie udowodniła wcześniej Olga Bondariewa z (wówczas) Leningradu, ponieważ jednak opublikowała je [2] po rosyjsku w czasopiśmie *Problemy Kibernetiki*, nie było znane poza ZSRR.

Shapley zajmował się także szczególnymi klasami gier kooperacyjnych, przede wszystkim różnego typu grami rynkowymi. W grze rynkowej gracze dysponują dobrami, które – w powstających koalicjach – mogą między sobą dowolnie wymieniać,

[2] Interesujące jest np. porównanie „siły" krajów Unii Europejskiej w Radzie UE przy regułach głosowania z traktatu nicejskiego i lizbońskiego; patrz np. [7] i cytowane tam prace.

DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.7

być może z pożytkiem dla wszystkich koalicjantów. Szczególnie interesujące są przypadki, gdy dobra są niepodzielne, a wypłaty uboczne niemożliwe. Jakie alokacje dóbr są wtedy stabilne (w tym samym sensie co podziały należące do rdzenia – por. [14])? Jakie są optymalne? Jak do nich doprowadzić?

Od tej problematyki już bardzo blisko do zagadnienia kojarzenia (*matching*), w którym z graczami kojarzy się już nie poszczególne dobra, tylko innych graczy.

Stabilne skojarzenia

Teoria skojarzeń i algorytmy prowadzące do stabilnego układu skojarzeń to dokonanie, za które Shapley i Roth zostali uhonorowani nagrodą Nobla. Zasługa Shapleya polega tu głównie na położeniu pierwszego kamienia, którym była krótka i w sumie prosta jego wspólna praca z Gale'em [3].

Choć teoria, a w szczególności kluczowe dla niej pojęcie stabilności, wywodzi się wprost z gier kooperacyjnych, problemy i przykłady można zrozumieć bez żadnej ich znajomości. Mamy dwa rozłączne zbiory, $N1$ i $N2$ (kobiety i mężczyźni, szkoły i uczniowie czy miejsca pracy i pracownicy). Każdy element („gracz") zbioru $N1$ ma swoją preferencję na zbiorze $N2$ i odwrotnie. Skojarzenie polega na przypisaniu każdego elementu $N2$ do dokładnie jednego elementu $N1$: małżonków sobie nawzajem, ucznia do szkoły, a pracownika do miejsca pracy. Problemem jest, jak to zrobić dobrze – tak, by wszyscy uczestnicy byli w miarę możności jak najbardziej zadowoleni.

Minimalnym wymaganiem jest tu stabilność. Układ skojarzeń jest stabilny, jeśli nie ma takiej pary nieskojarzonych z sobą elementów $a \in N1$ i $b \in N2$, z których każdy woli skojarzenie z tym drugim niż ze swoim aktualnym partnerem. Gale i Shapley przedstawili bardzo prosty algorytm prowadzący zawsze do stabilnego układu skojarzeń (co dowodzi zarazem, że taki układ zawsze istnieje). Polega on na (wielokrotnym) zgłaszaniu przez jedną ze stron – np. $N2$ – propozycji graczom z przeciwnej strony. W pierwszej rundzie każdy gracz z $N2$ „oświadcza się" temu z graczy z $N1$, który najbardziej mu się podoba. Gracze z $N1$ przeglądają otrzymane propozycje i notują sobie najlepszą – na razie nie przyjmując jej ani nie odrzucając – a odrzucają wszystkie pozostałe. W każdej kolejnej rundzie każdy gracz z $N2$, którego wszystkie dotychczasowe oferty zostały odrzucone, składa propozycję kolejnemu na swojej liście preferencji graczowi z $N1$, a każdy z $N1$ dokonuje ponownego przeglądu (co może prowadzić do odrzucenia poprzednio otrzymanej oferty i zatrzymania nowej najlepszej). Przebieg algorytmu kończy się, gdy żaden z graczy z $N2$ już nie chce składać dalszych propozycji. W tym momencie każdy

DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.7

z nich albo już został odrzucony przez wszystkich z *N*1, których w ogóle akceptuje[3], albo jest ktoś, kto zachował jego ofertę jako najlepszą z otrzymanych, i z tym kimś zostanie skojarzony. Otrzymany w ten sposób układ skojarzeń jest stabilny.

Natychmiast powstają różne ciekawe pytania:

Czy ten stabilny układ jest jedynym możliwym? Najczęściej nie jest.

Czy nie faworyzuje którejś ze stron?

– Zwykle tak: jeśli przy składaniu propozycji przez *N*1 dostaniemy inne skojarzenia, to są one lepsze dla *N*1.

Czy graczom nie opłaci się składanie, zachowywanie lub odrzucanie propozycji w sposób niezgodny z ich preferencjami, w nadziei na doprowadzenie do lepszego dla siebie skojarzenia?

– Może opłacać się stronie otrzymującej propozycje. Możliwość takich manipulacji prowadzi do gry niekooperacyjnej, w której jednak wszystkie układy skojarzeń otrzymywane w równowagach Nasha są stabilne.

W pracy [3] Gale i Shapley wyrazili nadzieję, że sformułowane w niej wyniki znajdą zastosowanie w praktyce. Ta nadzieja spełniła się w latach osiemdziesiątych, gdy Alvin Roth zainteresował się historią rynku amerykańskich lekarzy kończących studia, na którym szpitale proponują pracę lekarzom. W odpowiedzi na schorzenia trapiące ten rynek bezpośrednio po II wojnie światowej wprowadzono centralną instytucję kojarzącą absolwentów medycyny ze szpitalami (NRMP – *National Resident Matching Program*). Odniosła ona duży sukces: choć korzystanie z niej było dobrowolne, prawie wszyscy absolwenci medycyny zatrudniani w szpitalach znajdowali pracę za jej pośrednictwem. Roth odkrył, że stosowany przez NRMP algorytm kojarzenia jest wersją algorytmu Gale'a-Shapleya (ze szpitalami w roli składających oferty) i twierdził, że jego sukces wynikał właśnie ze stabilności otrzymanych skojarzeń. NRMP zleciła mu następnie opracowanie nowego algorytmu, korzystniejszego dla rozpoczynających pracę i uwzględniającego m.in. to, że wśród absolwentów medycyny było wiele par chcących pracować w tej samej miejscowości. Nowy algorytm, w którym propozycje składali absolwenci, został stworzony w latach dziewięćdziesiątych.

Algorytmy kojarzenia są szczególnie przydatne w sytuacjach, gdy poszczególne „dobra" są różnorodne i propozycje adresuje się nie do „rynku", tylko raczej do konkretnych podmiotów po jego drugiej stronie. W krajach anglosaskich skutecznie używano ich między innymi do usprawnienia systemu przyjęć do szkół. Pokrewnym pro-

3 Gracz może też preferować pozostanie nieskojarzonym (np. kawalerem czy bezrobotnym) od skojarzenia z niektórymi z potencjalnych partnerów; algorytm Gale'a-Shapleya prowadzi do stabilnego układu skojarzeń także w takich sytuacjach.

DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.7

blemem, do którego rozwiązania używa się teorii z pracy Shapleya i Scarfa [14], jest też zagadnienie przydziału nerek do transplantacji oczekującym na nie pacjentom.

Niektóre inne osiągnięcia

Choć gry niekooperacyjne nie były głównym polem jego działalności, Shapley także tu uzyskał parę ważnych i głośnych wyników. Jednym z nich jest negatywna odpowiedź na pytanie o działanie algorytmu Browna–Robinson dla skończonych gier dwuosobowych w postaci normalnej. W grach ściśle konkurencyjnych – tzn. takich, w których interesy graczy są całkowicie sprzeczne – ten ładny iteracyjny algorytm modyfikowania przez graczy strategii na podstawie obserwacji strategii przeciwnika (odpowiedniego zwiększania prawdopodobieństwa użycia najlepszej odpowiedzi na dotychczasowe obserwacje) jest zawsze zbieżny do strategii optymalnych. Jeżeli gra nie jest ściśle konkurencyjna, a trajektorie algorytmu zbieżne, to zbiegają one do strategii tworzących równowagę Nasha. Shapley pokazał jednak grę dwuosobową (dziś znaną jako „Shapley's Shimmy") mającą jedyną równowagę Nasha, w której jednak trajektorie algorytmu nie zbiegają, tylko „tańczą" po przestrzeni strategii mieszanych [12].

Shapley ma też na koncie interesujące uogólnienie pięknego, czysto matematycznego wyniku o rodowodzie polskim. Słynne, jeszcze przedwojenne twierdzenie Knastera, Kuratowskiego i Mazurkiewicza o pokrywaniu sympleksu (odcinka, trójkąta, czworościanu...) zbiorami domkniętymi, których jest tyle, ile wierzchołków, mówi, że jeśli każdy punkt każdej ściany sympleksu należy do któregoś – co najmniej jednego – ze zbiorów odpowiadających wierzchołkom tej ściany, to w sympleksie istnieje punkt należący do wszystkich tych zbiorów. Twierdzenie to, znane w literaturze światowej jako twierdzenie KKM, ma dziś też wersję występującą pod skrótem KKMS, gdzie S jest inicjałem Shapleya. Uogólnienie Shapleya polega na dopuszczeniu rodzin zbiorów odpowiadających nie wierzchołkom sympleksu, tylko podzbiorom zbioru wierzchołków. Ten wynik nie był jednak celem samym w sobie, tylko środkiem do charakteryzacji gier bez wypłat ubocznych mających niepuste rdzenie.

Warto wreszcie też wspomnieć o dokonaniach Shapleya związanych z grami w najbardziej potocznym znaczeniu tego słowa. Będąc doktorantem w Princeton, na początku lat pięćdziesiątych zajmował się on matematycznym modelowaniem pokera (co jest trudne nawet przy dzisiejszych mocach obliczeniowych) i był współtwórcą pierwszego modelu pokera jako gry trzech lub więcej graczy. Model ten wyjaśnia nie tylko potrzebę blefowania – co jest oczywiste – ale także to, że w równowadze gry gracz z mocną ręką powinien czasami „czekać" zamiast podnosić stawkę. Również w tym czasie Shapley wraz z paroma kolegami – tak jak

DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.7

on później, a nawet już wtedy, uczonymi pierwszej wody, m.in. Johnem Nashem – zaprojektował czteroosobową grę planszową nazwaną *So Long, Sucker*[4], która odniosła pewien sukces komercyjny i jest w sprzedaży do dzisiaj, a celem każdego z graczy jest wyeliminowanie z gry wszystkich pozostałych w wyniku odpowiedniego zawierania i zrywania koalicji. (Ostateczny zwycięzca musi w odpowiednim momencie skutecznie zdradzić swych koalicjantów).

Podobno na etapie testowania gry przed jej wprowadzeniem na rynek zdarzało się, że małżonkowie uczestniczący w niej wracali potem do domu osobnymi taksówkami. Zaś obserwacje dotyczące procesu tworzenia i rozpadu koalicji przy rozgrywaniu tej gry zostały spisane w pracy [4].

Bibliografia

[1] Aumann, Robert. J. i Lloyd S. Shapley. 1974. *Values of Non-atomic Games*. Princeton: Princeton University Press.

[2] Bondariewa, Olga N. 1963. *Niekotoryje primienienia liniejnogo programmirowanija w teorii kooperatiwnych igr*. Problemy Kibernetiki 10: 119-139. (Przekład angielski w: *Selected Russian Papers in Game Theory 1959-1965*. Princeton: Princeton University Press, 1968.

[3] Gale, David. i Lloyd S. Shapley. 1962. *College admissions and the stability of marriage*, „American Mathematical Monthly" 69: 9-15.

[4] Hausner, Mel, John F. Nash, Lloyd Shapley i Martin Shubik. 1964. *„So Long Sucker", A Four-Person Game*. W: M. Shubik (red.), Game Theory and Related Approaches to Social Behavior, Wiley, New York.

[5] Kamiński, Marek. 2009. *Równowaga Nasha w pubie*, „Decyzje" 12: 115-119.

[6] Kungl Vetenskapsakademien, *The Prize in Economic Sciences 2012 – Advanced Information*, http://www.nobelprize.org/nobelprizes/economic-sciences/laureates/2012/advanced.html

[7] Malawski, Marcin. 2008. *Wartość Shapleya*, „Decyzje" 10: 27-58.

[8] Milnor, J. W. i Shapley, L. S. 1978. *Values of large games II: Oceanic games*, „Math. Operations Research" 3: 290-307.

[9] Nasar, Sylvia. 2002. *Piękny umysł*. Muza.

[10] Shapiro, N. Z. i Shapley, L. S. 1978. *Values of large games I: A limit theorem*. „Math. Operations Research" 3: 1-9.

[11] Shapley, L.S., 1953. *A value for n-person games*. W: Kuhn H. i Tucker A. W. (wyd.), Contributions to the Theory of Games II, Annals of Mathematics Studies 28, Princeton University Press: 307-317.

[12] Shapley, L. S. 1964. *Some topics in two-person games*. W: M. Dresher, L. Shapley i A. W. Tucker (red.) Advances in Game Theory. Princeton, NJ: Princeton University Press.

[13] Shapley, L. S. 1967. *On balanced sets and cores*. „Navel Research Logistics Quarterly" 9: 45-48.

[4] Po polsku powinno to pewnie być „To cześć, frajerze".

DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.7

[14] Shapley, Lloyd S. i Herbert Scarf. 1974. *On cores and indivisibility*. „Journal of Mathematical Economics" 1: 23-37.

[15] Shapley, Lloyd S. i Guillermo Owen. 1989. *Optimal location of candidates in ideological space*. „International Journal of Game Theory" 18: 339-356.

[16] Shapley, Lloyd S. i Martin Shubik. 1954. *A method for evaluating the distribution of power in a committee system*. „American Political Science Review" 48: 787-792.

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.7