

KIEDY METODA ZWYKŁEJ WIĘKSZOŚCI ZAPEWNI PRZECHODNIOSĆ PREFERENCJI SPOŁECZNEJ?

Marta Kuc^{*}
Uniwersytet Warszawski

Zasada zwykłej większości jest najczęściej stosowaną metodą podejmowania decyzji społecznych na podstawie indywidualnych preferencji. Już w XVIII wieku markiz de Condorcet wykazał, że metoda ta może wyznaczać nieprzechodnią preferencję społeczną, nawet gdy preferencje wyborców są przechodne. Zakres stosowalności metody zwykłej większości jest więc ograniczony. W teorii wyboru społecznego wiele zainteresowania poświęcono analizom tego problemu – formułowane są różne warunki konieczne, które określają, w jakich sytuacjach zachodzi nieprzechodniość preferencji społecznej albo wystarczające, które gwarantują jej przechodniość. Nie zaproponowano jednak dotąd warunku, który byłby jednocześnie konieczny i wystarczający – jednoznacznie definiowałby zakres stosowalności metody zwykłej większości. W niniejszym artykule zostały przedstawione najbardziej znane, klasyczne warunki, sformułowane w latach sześćdziesiątych. Zaprezentowany jest tu również nowy sposób analizy problemu nieprzechodniości metody zwykłej większości. W wyniku przeprowadzonych analiz okazało się, że alternatywa klasycznych warunków jest warunkiem jednocześnie koniecznym i wystarczającym – określa dokładnie, kiedy można stosować metodę zwykłej większości, nie ma więc potrzeby formułowania kolejnych warunków.

Słowa kluczowe: metoda zwykłej większości, preferencje indywidualne, preferencja społeczna, przechodniość preferencji, ograniczone profile preferencji.

^{*} Marta Kuc, Instytut Socjologii Uniwersytetu Warszawskiego, ul. Karowa 18, 00-927 Warszawa; e-mail: mkuc@is.uw.edu.pl

Za ogromną pomoc i cierpliwość serdecznie dziękuję Panu Profesorowi Grzegorzowi Lissowskiemu. Za cenne komentarze – Kolegom z Zakładu Statystyki, Demografii i Socjologii Matematycznej IS UW.

Podejmowanie społecznej decyzji, w ujęciu teorii wyboru społecznego, polega na agregowaniu, za pomocą określonej metody, preferencji indywidualnych w preferencję społeczną. Powszechnie stosowaną w praktyce, ze względu na swoją prostotę i intuicyjny charakter, a zarazem najczęściej poddawaną analizom formalnym metodą jest zasada zwykłej większości. Wada tej metody polega na tym, że wyznaczona przez nią preferencja społeczna może być nieprzechodnia nawet, gdy preferencje głosujących są przechodnie. W konsekwencji, może nie być możliwy wybór optymalnego rozwiązania. Konieczne jest zatem określenie zakresu stosowalności tej metody, tj. ogólne, ale równocześnie jednoznaczne określenie, w jakich sytuacjach (tzn. dla jakich zestawów preferencji wyborców) ta wada metody zwykłej większości nie występuje.

W artykule zostały przedstawione i przeanalizowane klasyczne warunki wystarczające, które zapewniają przechodność preferencji społecznej wyznaczonej metodą zwykłej większości, zaproponowane w latach sześćdziesiątych przez Inadę (1964, 1969), Sena (1966), Sena i Pattanaika (1969). Wygenerowany i wykorzystany do analiz został pełen zbiór możliwych „układów preferencji” wyborców (klas rozkładów preferencji). Zbadane zostały relacje zachodzące pomiędzy poszczególnymi warunkami oraz stopień restrykcyjności każdego z nich, tzn. określone zostało, z jaką częstością w zbiorze wszystkich „układów preferencji” wyborców dany warunek jest spełniony.

Początkowym zamierzeniem analiz było wskazanie takiego podzbioru klas rozkładów preferencji, w którym nie byłby spełniony żaden z klasycznych warunków. Miało to umożliwić sformułowanie kolejnego warunku. Warunek ten, w połączeniu z sumą warunków klasycznych, byłby warunkiem wystarczającym i koniecznym zarazem. Okazało się jednak, że nie trzeba wprowadzać kolejnego ograniczenia, ponieważ alternatywa warunków klasycznych w jednoznaczny sposób określa zakres stosowalności metody zwykłej większości – jest warunkiem jednocześnie koniecznym i wystarczającym.

Podejmowanie społecznych decyzji

Podstawą dla dokonywania społecznych wyborów są preferencje osób na ustalonym m -elementowym zbiorze *alternatyw społecznych* – $A = \{x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_m\}$. Alternatywami społecznymi mogą być dla obywateli biorących udział w wyborach kandydaci na prezydenta, dla parlamentarzystów – różne propozycje sformułowania ustawy, dla zarządów banków – rozważane dopuszczalne

maksymalne kwoty kredytów. W wielu przypadkach uzasadnione będzie ograniczenie rozważań do sytuacji, w której $m = 3$. Alternatywy będą wówczas oznaczane przez x, y, z . Zbiór n wyborców, biorących udział w podejmowaniu społecznej decyzji, będzie oznaczany przez $W = (w_1, w_2, \dots, w_i, \dots, w_n)$.

Każdy racjonalny wyborca porządkuje alternatywy od najbardziej do najmniej przez niego pożądanej. Relacja słabej preferencji $xR_i y$ oznacza, że i -ty wyborca uważa alternatywę x za przynajmniej tak dobrą jak alternatywa y . Relacja mocnej preferencji $xP_i y$ oznacza, że według i -tego wyborcy alternatywa x jest lepsza od y ($xP_i y \leftrightarrow [xR_i y \wedge \sim (yR_i x)]$), a relacja indyferencji $xI_i y$, że jego zdaniem alternatywy x i y są równie dobre ($xI_i y \leftrightarrow [xR_i y \wedge yR_i x]$). Aby można było relację słabej preferencji R uznać za racjonalną, musi być ona zwrotna, spójna i przechodnia¹.

W analizowanych tu sytuacjach, każdy z wyborców będzie miał określone i racjonalne preferencje na zbiorze alternatyw.

Przykładowa racjonalna preferencja osoby i -tej na zbiorze czterech alternatyw v, x, y, z :

$$xP_i y, xP_i z, xP_i v, yP_i z, yP_i v, zI_i v, xI_i x, yI_i y, zI_i z, vI_i v$$

może być zapisana: $x P_i y P_i z I_i v$ lub w łatwiejszy sposób: $w_i: x \ y \ z - v$.

Profil preferencji indywidualnych nazywany jest układ preferencji indywidualnych wszystkich wyborców. W wielu sytuacjach społecznego wyboru wszyscy biorący w nim udział są traktowani jednakowo – ich głosy „ważą” tyle samo, istotne jest jedynie, *jak często* każda preferencja indywidualna wystąpiła, a nie *czyja* to preferencja. Takiej sytuacji dotyczą zaprezentowane tu analizy. W związku z tym założeniem, ich przedmiotem mogą być nie profile, a *rozkłady preferencji*.

Na przykład, następujący profil:

$$w_1: x \ y \ z - v$$

$$w_2: x - z \ y \ v$$

$$w_3: x - z \ y \ v$$

$$w_4: z \ y \ v \ x$$

$$w_5: z \ y \ v \ x.$$

można zapisać w postaci rozkładu preferencji (liczby na początku wierszy oznaczają, ile osób miało daną preferencję indywidualną):

1: $x \ y \ z \ v$

2: $x \ z \ y \ v$

2: $z \ y \ v \ x$.

Jeden ze sposobów podejmowania społecznych decyzji polega na agregowaniu (przy użyciu określonej metody) preferencji indywidualnych w preferencję społeczną. Preferencje społeczne będą oznaczane: xRy , xPy oraz xIy . Metody, które na podstawie rozkładu racjonalnych preferencji indywidualnych wyznaczają w sposób jednoznaczny racjonalne społeczne uporządkowanie zbioru alternatyw, K.J. Arrow (1951) nazwał *funkcjami społecznego dobrobytu*².

Niniejszy artykuł jest poświęcony metodzie zwykłej większości, najczęściej stosowanej metodzie agregacji preferencji indywidualnych w preferencję zbiorową. Zgodnie z tą metodą alternatywy są porównywane parami, a alternatywa x jest nie gorsza społecznie od alternatywy y , gdy liczba osób, które przedkładają x nad y $N(xP_iy)$, jest przynajmniej taka, jak liczba osób, które przedkładają y nad x $N(yP_ix)$:

$$xRy \Leftrightarrow N(xP_iy) \geq N(yP_ix).$$

Z dwóch alternatyw, za lepszą społecznie uznawana jest alternatywa przez więcej osób przedkładana nad drugą:

$$xPy \Leftrightarrow N(xP_iy) > N(yP_ix).$$

Na to jaka będzie społeczna relacja na zbiorze alternatyw, wpływ mają preferencje osób *zainteresowanych* – tzn. takich, które nie są indyferentne wobec wszystkich alternatyw należących do zbioru A . Wyjątkiem jest sytuacja, w której wszyscy wyborcy byłiby indyferentni wobec wszystkich alternatyw. Wówczas wszystkie alternatywy zostałyby uznane społecznie za równie dobre.

Już w XVIII wieku markiz de Condorcet zwrócił uwagę, że metoda zwykłej większości ma istotną wadę – może wyznaczać nieprzechodnią preferencję społeczną, a więc zastosowanie tej metody może nie prowadzić do uporządkowania alternatyw. Rozważany poniżej rozkład jest ilustracją problemu. Gdy preferencje trzech wyborców na zbiorze trzech alternatyw są następujące:

*Rozkład 1*1: $x \succ y \succ z$ 1: $y \succ z \succ x$ 1: $z \succ x \succ y$,

relacja społecznej preferencji wyznaczona za pomocą metody zwykłej większości jest cykliczna: xPy , yPz i zPx . Z tego wynika, że metoda zwykłej większości nie jest funkcją społecznego dobrobytu w sensie Arrowa – wyznaczona przez nią relacja społeczna nie jest racjonalna³.

W rzeczywistości przeważają sytuacje, w których wybierana jest jedna, najlepsza alternatywa lub pewien podzbiór najlepszych alternatyw. Mimo to problem przechodniości metody, za pomocą której dokonujemy wyboru, jest istotny. Gdy metoda zawsze wyznacza przechodnią preferencję na całym zbiorze alternatyw – zawsze możemy wybrać podzbiór alternatyw najlepszych.

Celem zaprezentowanych poniżej analiz jest określenie, dla jakiego zbioru rozkładów preferencji metoda zwykłej większości jest funkcją społecznego dobrobytu, a mówiąc ściśle, sformułowanie warunków koniecznych i warunków wystarczających, które musi spełniać rozkład preferencji, aby wyznaczona na jego podstawie, przy użyciu tej metody, preferencja społeczna była przechodnia.

- O tym, że *warunek jest wystarczający*, możemy mówić, gdy jego spełnianie przez rozkład gwarantuje przechodniość społecznej relacji. Nie oznacza to jednak, że niespełnianie warunku wystarczającego determinuje relację nieprzechodnią.
- *Warunek jest konieczny*, gdy jego niespełnianie gwarantuje, że społeczna relacja jest nieprzechodnia. Może ona jednak być nieprzechodnia również wtedy, gdy warunek konieczny jest spełniony.

Przy analizach rozkładów preferencji możliwe są dwie konwencje. Można badać cały *zbiór rozkładów* albo *zbiór klas rozkładów*. Zbiór wszystkich rozkładów preferencji jest zbiorem skończonym (ale bardzo licznym), gdy określona jest liczba alternatyw i liczba osób. Aby zbiór klas rozkładów był skończony, określona musi być tylko liczba alternatyw. Do jednej klasy zaliczone będą rozkłady, składające się z takich samych preferencji indywidualnych, niezależnie od tego, ile razy dana preferencja występuje.

Na przykład rozkłady:

<i>Rozkład 2</i>	<i>Rozkład 3</i>	<i>Rozkład 4</i>
1: $y \ z \ x$	3: $y \ z \ x$	1: $y \ z \ x$
1: $z \ x \ y$	1: $z \ x \ y$	6: $z \ x \ y$
1: $x \ y - z$	2: $x \ y - z$	1: $x \ y - z$
1: $y \ x - z$	2: $y \ x - z$	2: $y \ x - z$

należą do tej samej klasy, ponieważ mają taką samą *strukturę jakościową* (Gaertner, 1979)

Jeśli zbiór alternatyw jest trzejelementowy $\{x, y, z\}$, możliwych jest 13 uporządkowań preferencyjnych tego zbioru:

$p1 \ xPyPz$	$p7 \ xPyIz$	$p13 \ xIyIz$
$p2 \ xPzPy$	$p8 \ yPxIz$	
$p3 \ yPxPz$	$p9 \ zPxIy$	
$p4 \ yPzPx$	$p10 \ xIyPz$	
$p5 \ zPxPy$	$p11 \ xIzPy$	
$p6 \ zPyPx$	$p12 \ yIzPx$	

Każdą z klas można zdefiniować określając, które z tych 13 uporządkowań występują, a które nie. W omawianej tu sytuacji wszystkich klas jest 8191 ($2^{13} - 1 = 8191$). W tabeli 1 przedstawione są wybrane klasy rozkładów, ich numeracja jest zgodna z leksykograficznym porządkiem, przyjmując, że uporządkowaniom $p1, p2, \dots, p13$ odpowiadają kolejne litery alfabetu.

Tabela 1. Wybrane klasy rozkładów preferencji na zbiorze trzech alternatyw

Nr klasy	Indywidualne uporządkowania preferencyjne* należące (T) lub nie należące (N) do danej klasy												
	<i>p1</i>	<i>p2</i>	<i>p3</i>	<i>p4</i>	<i>p5</i>	<i>p6</i>	<i>p7</i>	<i>p8</i>	<i>p9</i>	<i>p10</i>	<i>p11</i>	<i>p12</i>	<i>p13</i>
1	T	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
2	T	T	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
3	T	T	T	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
⋮													
13	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
14	T	N	T	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
15	T	N	T	T	N	N	N	N	N	N	N	N	N
⋮													
79	N	T	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	T
80	N	T	T	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
⋮													
5812	N	N	N	T	T	N	T	T	N	N	N	N	N
⋮													
8191	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	T

* symboliczne zapisy preferencji od *p1* do *p13* zostały wprowadzone wyżej

Jeśli nie jest określona liczba osób biorących udział w podejmowaniu decyzji, liczba wszystkich rozkładów jest nieskończona. Rozkład preferencji można opisać jako rozkład częstości⁴ na zbiorze wszystkich 13 uporządkowań. W tabeli 2 zapisane są w tej konwencji rozkłady 2, 3 i 4 z poprzedniej strony. Wszystkie one należą do jednej klasy nr 5812 z tabeli 1.

Tabela 2. Przykładowe rozkłady preferencji na zbiorze trzech alternatyw, należące do jednej klasy

	Indywidualne uporządkowania preferencyjne												
	<i>p1</i>	<i>p2</i>	<i>p3</i>	<i>p4</i>	<i>p5</i>	<i>p6</i>	<i>p7</i>	<i>p8</i>	<i>p9</i>	<i>p10</i>	<i>p11</i>	<i>p12</i>	<i>p13</i>
Klasa 5812	N	N	N	T	T	N	T	T	N	N	N	N	N
Rozkład 2	0	0	0	0,25	0,25	0	0,25	0,25	0	0	0	0	0
Rozkład 3	0	0	0	0,375	0,125	0	0,25	0,25	0	0	0	0	0
Rozkład 4	0	0	0	0,1	0,6	0	0,1	0,2	0	0	0	0	0
⋮													

Zarówno za pomocą warunków wystarczających jak i warunków koniecznych możliwe jest ograniczanie preferencji indywidualnych na dwa sposoby: można ograniczać rozkłady lub klasy rozkładów preferencji. Jest to istotne rozróżnienie, ponieważ do jednej klasy mogą należeć zarówno takie rozkłady,

dla których metoda zwykłej większości wyznacza przechodnią relację, jak i takie, dla których nie wyznacza. Dla rozkładu 2 wyznaczona relacja jest jedynie acykliczna: $y P z$, $z P x$, $x I y$, a dla rozkładów 3 i 4 (należących do tej samej klasy) wyznaczone relacje są przechodnie (dla rozkładu 3: $y P z P x$, dla rozkładu 4: $z P x P y$). Istnieją takie klasy, że dla wszystkich należących do nich rozkładów metoda zwykłej większości wyznacza przechodnią preferencję oraz klasy, do których należą również rozkłady, dla których ta preferencja nie jest przechodnia. Nie istnieją natomiast klasy, złożone wyłącznie z rozkładów, dla których przechodniej relacji wyznaczyć nie można. Do każdej z klas należą bowiem również takie rozkłady, w których jedna z preferencji występuje z częstością większą niż $\frac{1}{2}$. Wówczas preferencja społeczna jest przechodnia.

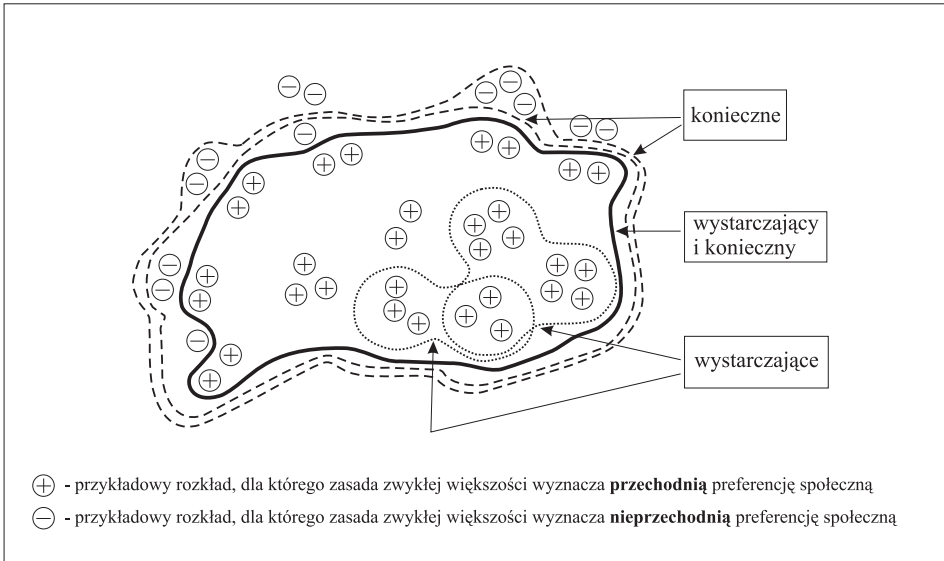
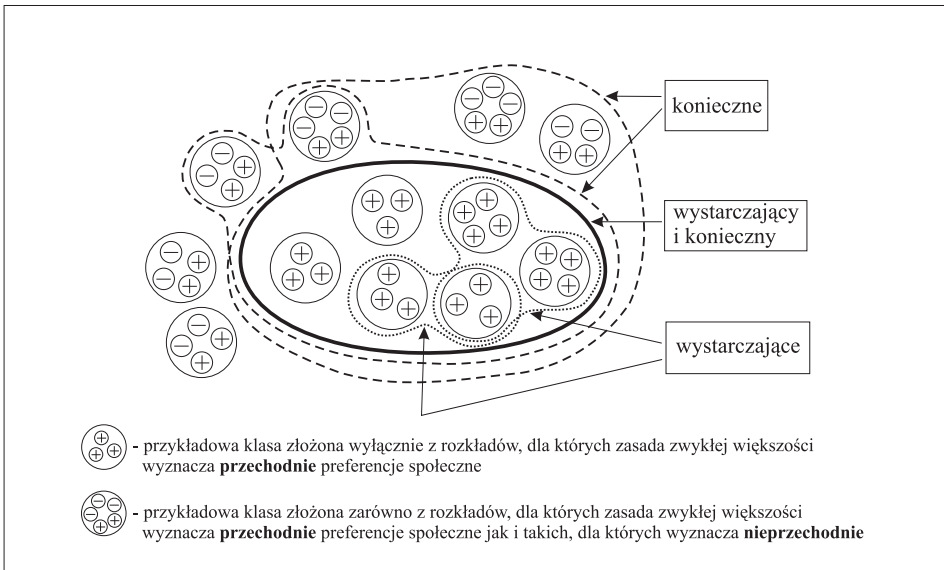
W związku z tym zdefiniowane zostały dwa rodzaje warunków wystarczających i dwa rodzaje warunków koniecznych. Warunki konieczne i wystarczające typu R odnoszą się do konkretnych rozkładów preferencji, a warunki konieczne i wystarczające typu K odnoszą się do klas rozkładów. Jeśli warunek opisuje klasę – opisuje jednocześnie wszystkie rozkłady do niej należące. Stąd, jeśli spełniony jest warunek wystarczający typu K , spełniony jest również warunek wystarczający typu R .

Warunek typu R jednocześnie konieczny i wystarczający w sposób jednoznaczny określałby, dla których rozkładów można wyznaczyć przechodnią relację społeczną, a dla których nie jest to możliwe.

Do każdej z klas, dla których warunek konieczny typu K nie jest spełniony, należą również rozkłady z takimi proporcjami preferencji, że możliwe jest wyznaczenie przechodniej relacji społecznej. W związku z tym fakt, że warunek konieczny typu K nie jest spełniony, nie oznacza, że nie jest również spełniony warunek konieczny typu R .

Wynika z tego, że jeżeli jakiś warunek jest jednocześnie warunkiem koniecznym i wystarczającym typu K , to spełnianie go przez klasę gwarantuje przechodność preferencji społecznej dla każdego rozkładu należącego do tej klasy. Niespełnianie przez klasę warunku jednocześnie koniecznego i wystarczającego oznacza, że należą do niej również takie rozkłady, dla których nie można wyznaczyć przechodniej preferencji społecznej.

Na rysunkach 1 i 2 kółeczkami z plusami oznaczone są symbolicznie rozkłady, dla których zasada zwykłej większości wyznacza przechodnią preferencję społeczną, a minusami takie, dla których występuje nieprzechodność. Na rysunku 2 rozkłady zostały pogrupowane w klasy. W niektórych klasach, dla wszystkich rozkładów można wyznaczyć przechodnią preferencję społeczną, w innych – nie dla wszystkich.⁵

Rysunek 1. Warunki typu R (nakładanie na rozkłady preferencji)**Rysunek 2.** Warunki typu K (nakładanie na klasy rozkładów preferencji)

Zaprezentowane poniżej warunki określają zakres stosowalności metody zwykłej większości. Warunki wystarczające definiują, przy jakim układzie indywidualnych preferencji głosujących metoda może być stosowana bez ryzyka, że doprowadzi do nieracjonalnego rozwiązania. Warunki konieczne określają, w jakich sytuacjach wyznaczone rozwiązanie może być nieracjonalne.

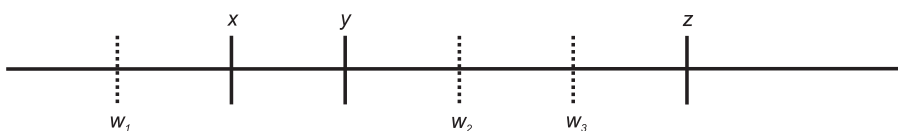
Ograniczenia nakładane na rozkłady preferencji

Problem nieprzechodniości metody zwykłej większości był szeroko omawiany przez licznych teoretyków wyboru społecznego. Pomimo dużego zainteresowania problemem, nie został sformułowany taki warunek jednocześnie konieczny i wystarczający, który określałby, dla jakich rozkładów można, a dla jakich nie można wyznaczyć racjonalnej preferencji społecznej (warunek typu R). Znane są natomiast różne warunki tylko konieczne lub tylko wystarczające.

Najbardziej oczywistym warunkiem wystarczającym, by metoda zwykłej większości wyznaczała przechodnią relację, jest wymaganie, by pewna preferencja w rozkładzie miała częstość większą niż $\frac{1}{2}$. Wówczas preferencja społeczna byłaby racjonalna. Oczywiście jest to warunek wystarczający typu R .

Dobrze znany jest *warunek unimodalności* sformułowany przez Blacka (1958). Zakłada się, że alternatywy społeczne mogą być reprezentowane przez punkty na prostej. Prosta, na której są rozmieszczane, może symbolizować wymiar, na którym toczy się spór np. wymiar ideologiczny w sporze politycznym. Ponadto, na tym kontinuum można zaznaczyć punkty idealne wyborców (w_i oznacza punkt idealny i -tego wyborcy). Gdyby któraś z alternatyw znajdowała się dokładnie w tym samym miejscu co punkt idealny wyborcy, byłaby to alternatywa najlepiej przez niego oceniana.

Rysunek 3. Przykładowe rozmieszczenie na prostej alternatyw i punktów idealnych wyborców



Możliwe są tu dwa, zaproponowane przez Coombsa (1964), ujęcia: ilościowe i jakościowe.

Zgodnie z *ilościową* koncepcją, wyborca oceniając alternatywy bierze wyłącznie pod uwagę ich odległość od swojego punktu idealnego: im dalej od punktu idealnego leży alternatywa, tym mniej jest przez niego preferowana. Dla każdego wyborcy istnieje dokładnie jedno uporządkowanie preferencyjne zgodne z tą zasadą.

Wedle ujęcia *jakościowego*, istotne dla wyborcy są nie tylko odległości alternatyw od jego punktu idealnego, ale także kierunek, tzn. może on na przykład preferować wszystkie alternatywy na lewo od swojego punktu idealnego (im bliżej tego punktu – tym bardziej) nad alternatywy na prawo (tu również mniej preferowane będą alternatywy bardziej oddalone od punktu idealnego). Ta koncepcja nie określa jednoznacznie preferencji wyborcy – możliwe jest więcej niż jedno uporządkowanie. Zawsze jedną z preferencji zgodnych z ujęciem jakościowym jest preferencja zgodna z ujęciem ilościowym.

Nie wszystkie z 13 możliwych uporządkowań preferencyjnych (str. 10) są zgodne z przedstawionymi powyżej sposobami ustalania preferencji przez wyborcę, uwzględniającymi odległości między jego punktem idealnym a alternatywami. W tabeli 3 znajdują się uporządkowania dopuszczalne, przy rozmieszczeniu alternatyw i punktów idealnych takim jak na rysunku 3.

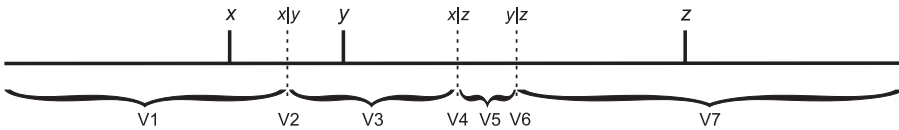
Tabela 3. Dopuszczalne preferencje indywidualne (przy rozmieszczeniu alternatyw zgodnym z rysunkiem 3)

Wyborcy:	Preferencje zgodne z ujęciem:					
	Ilościowym	Jakościowym				
wyborca 1	$p1: x P y P z$	$p1: x P y P z$				
wyborca 2	$p8: y P x I z$	$p8: y P x I z$	$p3: y P x P z$	$p4: y P z P x$	$p12: y I z P x$	$p6: z P y P x$
wyborca 3	$p6: z P y P x$	$p6: z P y P x$	$p3: y P x P z$	$p4: y P z P x$	$p12: y I z P x$	$p8: y P x I z$

Nawet przy ujęciu jakościowym, dopuszczalnych uporządkowań dla każdego z wyborców jest niewiele. Punkt idealny wyborcy 1. determinuje w pełni jego preferencję na tych alternatywach. Możliwych preferencji wyborców 2. i 3. jest więcej. W związku z tym, że ich punkty idealne znajdują się między tą samą parą alternatyw (y i z), dopuszczalne uporządkowania zgodne z ujęciem jakościowym są takie same.

W powyższym przykładzie dokładnie określone zostały miejsca na prostej, w których leżą punkty idealne wyborców. Można się spodziewać, że gdyby były one rozmieszczone inaczej, inne preferencje byłyby dopuszczalne. Na przykład, gdyby któryś z wyborców miał punkt idealny umiejscowiony między alternatywami x i y albo dokładnie pokrywający się z którąś z alternatyw, zbiór możliwych preferencji byłby inny. Na poniższych rysunkach kontinuum zostało podzielone na części (oznaczone symbolami V w przypadku ujęcia ilościowego i v , w przypadku jakościowego). Punkty idealne znajdujące się w tej samej części determinują takie same uporządkowania. Innymi słowy, dla różnych punktów idealnych znajdujących się w tej samej części, dopuszczalny jest ten sam zbiór preferencji. W przypadku ujęcia ilościowego zbiór ten zawsze będzie jednoelementowy, a w przypadku jakościowego może być liczniejszy. Na rysunku 4 zaznaczone zostały punkty środkowe każdej z par alternatyw ($x|y$, $y|z$ oraz $x|z$). Punkty te wyznaczają dokładnie połowę odległości dzielącej alternatywy. Jeśli punkt idealny wyborcy pokrywa się z punktem środkowym którejs pary alternatyw – wyborca jest wobec tych alternatyw indyferentny⁶.

Rysunek 4. Ujęcie ilościowe



Rysunek 5. Ujęcie jakościowe



Zbiory dopuszczalnych preferencji, dla każdego umiejscowienia punktu idealnego, zostały wymienione w poniższej tabeli. Symbole od $p1$ do $p13$ oznaczają kolejno każde z 13 możliwych uporządkowań.

Tabela 4. Dopuszczalne uporządkowania preferencyjne

Części kontinuum		Możliwe uporządkowania preferencyjne:												
		$p1$	$p2$	$p3$	$p4$	$p5$	$p6$	$p7$	$p8$	$p9$	$p10$	$p11$	$p12$	$p13$
Ujęcie ilościowe:	$V1$	x												
	$V2$										x			
	$V3$			x										
	$V4$								x					
	$V5$				x									
	$V6$												x	
	$V7$							x						
Ujęcie jakościowe:	$v1$	x												
	$v2$	x		x	x				x		x			
	$v3$			x	x				x					
	$v4$			x	x		x						x	
	$v5$						x							

Jeśli umiejscowienie alternatyw na prostej jest takie, jak w omawianym tu przykładzie, nie można znaleźć takiego punktu idealnego, który determinowałby którąś z preferencji: $p2$, $p5$, $p7$, $p9$, $p11$ lub $p13$. Gdyby została zamieniona kolejność alternatyw na kontinuum, wówczas byłby inny zbiór preferencji spełniających omawiane wymagania i inny zbiór preferencji z nimi niezgodnych⁷.

Znane *twierdzenie o medianowym wyborcy*, sformułowane przez Blacka (1958), mówi, że jeśli możliwe jest takie rozmieszczenie alternatyw i punktów idealnych na prostej, że preferencje wyborców są zgodne z ilościową lub jakościową koncepcją, to przy nieparzystej liczbie osób punkt idealny środkowego⁸ wyborcy ma poparcie większości w porównaniu z dowolną inną alternatywą. Arrow (1963) uogólnił ten wynik i wykazał, że przy tych samych założeniach, dla dowolnej nieparzystej liczby osób, metoda zwykłej większości generuje przechodnie preferencje społeczne. Jest to warunek wystarczający dla istnienia racjonalnej społecznej preferencji wyznaczonej przez zasadę zwykłej większości. Pomimo wymagania, żeby liczba osób była nieparzysta, wspomniany warunek jest warunkiem wystarczającym typu K^9 . Jak wykazał Inada, warunek ten nie musi być spełniony przez cały zbiór alternatyw. Wystarczy, że będzie on spełniony w każdym trzelementowym podzbiorze tego zbioru (Inada, 1964).

Klasyczne ograniczenia nakładane na rozkłady preferencji

W literaturze dotyczącej teorii wyboru społecznego wiele uwagi poświęcono klasycznym warunkom sformułowanym pod koniec lat sześćdziesiątych. Warunki te łączy podobne spojrzenie na problem ograniczania zbioru rozkładów: każdy z nich wymaga, by preferencje osób były w jakimś sensie zgodne lub przeciwnie – by istniały określone rozbieżności w ocenie alternatyw. Innymi słowy, wymagają one, by pewne zestawy preferencji indywidualnych nie występowały w tym samym rozkładzie.

W przedstawionych poniżej warunkach, twierdzeniach i dalszych analizach jest mowa o trójkach alternatyw społecznych. Takie ograniczenie jest uzasadnione, ponieważ przechodność w każdym trzelementowym podzbiorze alternatyw gwarantuje przechodność w całym zbiorze.

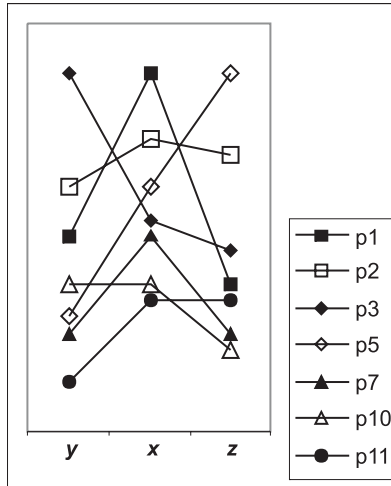
Jeśli preferencje są zgodne z zaproponowanymi przez Blacka ograniczeniami, musi istnieć alternatywa, która przez żadnego z wyborców nie jest oceniana jako najgorsza. Na rysunku 3 była to alternatywa y . Nie jest możliwe zaznaczenie na tej prostej punktu idealnego wyborcy, według którego alternatywa y jest najgorsza. Niedopuszczalne są te uporządkowania, zgodnie z którymi alternatywa y występuje na ostatniej pozycji. Jeśli preferencje mają opisane własności, spełniony jest następujący warunek sformułowany przez Inadę (1969):

Warunek *nie-najgorszej alternatywy* (*NW not worst*) – w każdej trójce alternatyw istnieje alternatywa, która przez żadną z osób nie jest oceniana najgorzej z tej trójki.

Dla potrzeb tej i kolejnych definicji warunków przyjmijmy, że a , b i c są trzema różnymi zmiennymi, z których każda może przyjąć wartość x , y lub z ($a, b, c \in \{x, y, z\}$; $a \neq b \neq c$).

Warunek *NW* wymaga, by $\exists a, b, c \forall i [\sim (xI_i y \wedge yI_i z \wedge zI_i x) \rightarrow (aP_i b \vee aP_i c)]$.

Na rysunku 6 zostały przedstawione uporządkowania preferencyjne spełniające warunek *NW* – w żadnym z nich alternatywa x nie zajmuje ostatniej pozycji.

Rysunek 6. Dopuszczalne preferencje zgodne z warunkiem NW

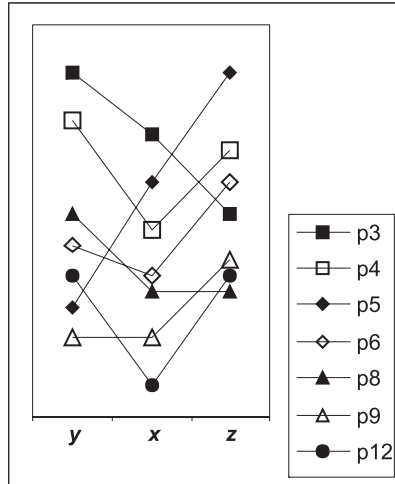
Inada (1969) zaproponował dwa inne warunki podobne do *NW*. Pierwszy z nich (*NB*) wymaga, by istniała alternatywa, która nie będzie przez wszystkich uznawana za najlepszą, drugi (*NM*) – by istniała alternatywa, która nie będzie przez wszystkich uznawana za „środkową”.

- Warunek *nie-najlepszej alternatywy (NB not best)* – dla każdej trójki alternatyw istnieje taka alternatywa, która w uporządkowaniu żadnej z osób nie zajmuje pierwszej pozycji:

$$\exists a, b, c \forall i [\sim (xI_iy \wedge yI_iz \wedge zI_ix) \rightarrow (bP_i a \vee cP_i a)].$$

Zgodne z warunkiem *NB*, są uporządkowania preferencyjne przedstawione na rysunku 7 – w żadnym z nich alternatywa *x* nie jest oceniana jako najlepsza.

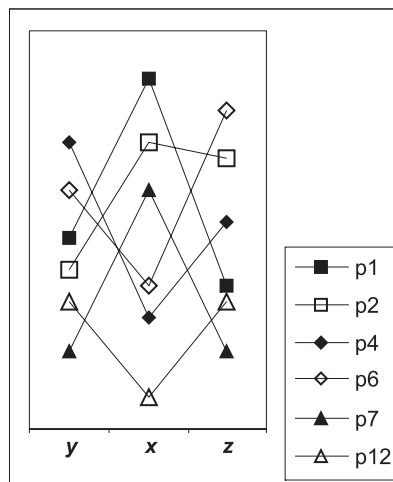
Rysunek 7. Dopuszczalne preferencje zgodne z warunkiem NB



- Warunek *nie-średniej alternatywy* (NM not medium) – dla każdej trójki alternatyw istnieje taka alternatywa, która w uporządkowaniu żadnej z osób nie zajmuje środkowej pozycji:

$$\exists a, b, c \forall i [\sim (xI_i y \wedge yI_i z \wedge zI_i x) \rightarrow \{(aP_i b \wedge aP_i c) \vee (bP_i a \wedge cP_i a)\}].$$

Rysunek 8. Dopuszczalne preferencje zgodne z warunkiem NM



Spełnianie warunku *NM* oznacza, że możliwy jest podział zbioru trzech alternatyw x, y, z na dwie takie podgrupy, np.: $\{x\}$ i $\{y, z\}$, że każdy z wyborców ściśle preferuje każdą alternatywę z jednej z tych podgrup nad każdą alternatywę z drugiej. Preferencje zgodne z tym warunkiem przedstawione są na rysunku 8. Sytuacja, w której spełniony jest warunek *NM*, może się zdarzyć na przykład wtedy, gdy jedna z alternatyw jest kontrowersyjna. Będzie ona przez wszystkich oceniana albo lepiej niż pozostałe, albo gorzej od nich.

Każdy z tych trzech warunków wymaga, by opinie wyborców były w pewnym sensie zgodne. Sen (1966) zaproponował połączenie ich w jeden warunek *ograniczenia rozbieżności ocen* (*VR value restriction*)

- Warunek *VR* – dla każdej trójki alternatyw istnieje taka alternatywa, która w uporządkowaniu żadnej z osób nie zajmuje ostatniej pozycji, lub istnieje alternatywa, która w uporządkowaniu żadnej z osób nie zajmuje pierwszej pozycji, lub istnieje taka alternatywa, która w uporządkowaniu żadnej z osób nie zajmuje pozycji środkowej:

$$\exists a, b, c \forall i [\sim (xI_i y \wedge yI_i z \wedge zI_i x) \rightarrow (aP_i b \vee aP_i c) \vee (bP_i a \vee cP_i a) \vee \{(aP_i b \wedge aP_i c) \vee (bP_i a \wedge cP_i a)\}]$$

Warunek *VR* jest alternatywą trzech warunków. Wymaga, by spełniony był którykolwiek z „warunków składowych” i dlatego jest słabszy od każdego z nich. Aby był spełniony, w każdej trójce musi być spełniony *NW*, *NB* albo *NM*. *VR* nie wymaga, by w każdej trójce alternatyw spełniony był ten sam warunek cząstkowy.

Twierdzenie Sena (1966)

Jeżeli warunek *VR* jest spełniony dla każdej trójki alternatyw, a liczba osób zainteresowanych w każdej trójce jest nieparzysta, wówczas preferencja wyznaczona przez zasadę zwykłej większości jest przechodnia.

Innym warunkiem wymagającym, by wśród wyborców panowała pewnego rodzaju zgodność ocen, jest warunek wymagający *powtórzenia słabej preferencji* (*LA limited agreement*) zaproponowany przez Sena i Pattanaika (1969).

- Warunek *LA* – podzbiór trzech alternatyw spełnia ten warunek, jeśli wszystkie osoby są zgodne, że jedna z tych alternatyw (np. x) jest co najmniej tak dobra, jak inna alternatywa z tej trójki (np. y):

$$\exists a, b \forall i (a R_i b).$$

Pierwsze twierdzenie Sena – Pattanaika (1969)

Jeżeli liczba osób zainteresowanych w każdej trójce alternatyw jest nieparzysta i każda trójka spełnia warunek *VR* lub *LA*, wówczas preferencja wyznaczona przez zasadę zwykłej większości jest przechodnia.

Do bardziej znanych należą także trzy kolejne warunki sformułowane przez Inadę (1969). Spełnianie tych warunków również gwarantuje przechodność społecznej relacji.

- Warunek *dychotomicznych preferencji (DP dichotomous preferences)* – podzbiór trzech alternatyw spełnia ten warunek, jeśli każda osoba jest indyferentna wobec co najmniej dwóch alternatyw:
 $\forall i \exists a, b, c \sim (aP_i b \wedge bP_i c)$

Preferencje zgodne z warunkiem *DP* mogą występować na przykład wtedy, gdy w opinii wyborców alternatywy są podobne.

- Warunek *podobnych preferencji (EP echoic preferences)*:
 Dla potrzeb tej i następnych definicji przyjmijmy, że $w_i, w_j \in W$,
 $w_i \neq w_j$
 $\exists a, b, c [\exists i (aP_i b \wedge bP_i c) \rightarrow (\forall j) \sim (cP_j a)]$.

Warunek ten wymaga, by w sytuacji, gdy któraś z osób preferuje na przykład alternatywę x nad y , a y nad z , pozostałe osoby również preferowały x nad z .

Warunek *EP* jest dość mocny – wymaga dużej zbieżności preferencji wszystkich osób.

- Warunek *przeciwnych preferencji (AP antagonistic preferences)*:
 $\exists a, b, c [\exists i (aP_i b \wedge bP_i c) \rightarrow \forall j: \{(aI_j c) \vee (cP_j b \wedge bP_j a)\}]$.
 Jeśli istnieje osoba, która ma mocną preferencję, na przykład $xP_i yP_i z$, wówczas pozostałe osoby albo porządkują alternatywy odwrotnie: $zP_j yP_j x$, albo x i z oceniają tak samo: $xI_j z$.

Warunek *AP* również jest mocny. W przeciwieństwie do *EP* wymaga znacznej rozbieżności preferencji wszystkich osób. W rzeczywistości takie preferencje mogą występować, gdy wyborcy są podzieleni na dwie antagonistyczne grupy.

Każdy z tych trzech warunków, wprowadzonych przez Inadę (*DP*, *EP* i *AP*), jest dosyć wymagający. Sen i Pattanaik (1969) zaproponowali warunek *skrajnego ograniczenia* (*ER extremal restriction*), który jest alternatywą warunków Inady i jest słabszy od każdego z nich.

- Warunek *ER*:

$$\exists a, b, c [\exists i (aP_i b \wedge bP_i c) \rightarrow \forall j \{cP_j a \rightarrow (cP_j b \wedge bP_j a)\}].$$

Jeśli jedna z osób preferuje na przykład alternatywę x nad alternatywę y , a y nad z , to wszystkie inne osoby, które preferują z względem x muszą wówczas również preferować z względem y oraz y względem x :

Jeśli dla profilu preferencji spełniony jest któryś z warunków Inady *DP*, *EP* lub *AP* – spełniony jest wówczas warunek *ER*.

Drugie twierdzenie Sena – Pattanaika (1969)

Jeśli preferencje są zgodne z warunkiem *ER* dla każdej trójki alternatyw, zasada zwykłej większości wyznacza przechodnią relację preferencji społecznej.

W odróżnieniu od poprzednio omawianych warunków, *ER* zapewnia wyznaczenie przechodniej społecznej preferencji bez względu na to, czy liczba osób (lub liczba osób zainteresowanych) będzie parzysta, czy nieparzysta. Wszystkie zaprezentowane klasyczne warunki są typu *K*.

Analizy klasycznych warunków

W tej części artykułu przedstawione są wybrane wnioski z analiz przedstawionych warunków. Analizy zostały wykonane na zbiorze wszystkich możliwych klas rozkładów preferencji. Opis sposobu wykonania tych analiz znajduje się w aneksie. Takie podejście umożliwiło określenie, dla każdego z przedstawionych wyżej, klasycznych warunków nakładanych na rozkłady preferencji, jak dużą część zbioru klas opisują. Warunki te różnią się stopniem surowości wymagań. Na pierwszy rzut oka widać, że niektóre z nich jest łatwiej spełnić, a inne są bardziej restrykcyjne. Pierwsza z prezentowanych analiz pozwoliła dokładnie określić, dla jak dużej części klas spełnione są poszczególne

warunki. Z samej definicji klasy rozkładów wynika, że liczba wyborców może być dowolna. Mimo że *VR* i *LA* są warunkami wystarczającymi jedynie przy założeniu nieparzystej liczby wyborców, uwzględnienie ich w analizach na zbiorze klas, jak się okazało, również ma uzasadnienie. Ponadto, możliwe było zbadanie związków między poszczególnymi warunkami – określenie czy są one od siebie zależne, czy też niezależne. Dwa warunki są zależne, gdy spełnianie bądź niespełnianie jednego z nich determinuje spełnianie bądź niespełnianie drugiego. W poniższej tabeli szarym kolorem oznaczone zostały wszystkie pary warunków zależnych. Na przykład *DP* i *AP* są zależne, ponieważ nie jest możliwe, by klasa nie spełniała *AP* i jednocześnie spełniała *DP*. Większość z przedstawionych relacji zależności jest oczywistych: warunek *VR* jest złożony z trzech warunków: *NB*, *NM* i *NW* i musi być od każdego z nich zależny (jest spełniony tylko, gdy spełniony jest jeden z tych trzech warunków). Podobnie, warunek *ER* jest alternatywą warunków *DP*, *EP* i *AP* i musi być zależny od każdego z nich.

Z tabeli 5 można odczytać, ile procent klas rozkładów spełnia każdy z warunków. W kolumnach i wierszach oznaczonych „N” są odsetki klas nie spełniających warunków, a w oznaczonych „T” – odsetki takich, które warunki spełniają.

Tabela 5. Spełnianie i niespełnianie par warunków

		<i>NB</i>		<i>NW</i>		<i>NM</i>		<i>VR</i>		<i>LA</i>		<i>DP</i>		<i>EP</i>		<i>AP</i>		<i>ER</i>		
		N	T	N	T	N	T	N	T	N	T	N	T	N	T	N	T	N	T	
<i>NB</i>	N			86.0	5.2	88.6	2.6	84.2	7.0	83.7	7.5	90.1	1.1	86.2	5.1	89.8	1.4	86.0	5.2	91.2
	T			5.2	3.6	7.0	1.8		8.8	2.3	6.4	8.4	0.4	4.1	4.7	7.8	1.0	4.0	4.8	8.8
<i>NW</i>	N	86.0	5.2			88.6	2.6	84.2	7.0	83.7	7.5	90.1	1.1	86.2	5.1	89.8	1.4	86.0	5.2	91.2
	T	5.2	3.6			7.0	1.8		8.8	2.3	6.4	8.4	0.4	4.1	4.7	7.8	1.0	4.0	4.8	8.8
<i>NM</i>	N	88.6	7.0	88.6	7.0			84.2	11.4	83.7	11.9	94.3	1.3	86.8	8.8	93.6	2.0	86.6	9.0	95.6
	T	2.6	1.8	2.6	1.8				4.4	2.3	2.1	4.2	0.2	3.4	1.0	4.0	0.4	3.4	1.0	4.4
<i>VR</i>	N	84.2		84.2		84.2				80.1	4.1	83.3	0.9	81.0	3.2	83.1	1.1	80.9	3.3	84.2
	T	7.0	8.8	7.0	8.8	11.4	4.4			5.9	9.9	15.2	0.7	9.3	6.5	14.5	1.3	9.1	6.7	15.8
<i>LA</i>	N	83.7	2.3	83.7	2.3	83.7	2.3	80.1	5.9			85.6	0.4	85.6	0.4	85.3	0.7	85.3	0.7	86.0
	T	7.5	6.4	7.5	6.4	11.9	2.1	4.1	9.9			12.9	1.1	4.7	9.3	12.3	1.7	4.7	9.3	14.0
<i>DP</i>	N	90.1	8.4	90.1	8.4	94.3	4.2	83.3	15.2	85.6	12.9			90.3	8.2	97.6	0.9	90.0	8.5	98.5
	T	1.1	0.4	1.1	0.4	1.3	0.2	0.9	0.7	0.4	1.1				1.5		1.5		1.5	1.5
<i>EP</i>	N	86.2	4.1	86.2	4.1	86.8	3.4	81.0	9.3	85.6	4.7	90.3				90.0	0.3	90.0	0.3	90.3
	T	5.1	4.7	5.1	4.7	8.8	1.0	3.2	6.5	0.4	9.3	8.2	1.5			7.6	2.1		9.7	9.7
<i>AP</i>	N	89.8	7.8	89.8	7.8	93.6	4.0	83.1	14.5	85.3	12.3	97.6		90.0	7.6			90.0	7.6	97.6
	T	1.4	1.0	1.4	1.0	2.0	0.4	1.1	1.3	0.7	1.7	0.9	1.5	0.3	2.1				2.4	2.4
<i>ER</i>	N	86.0	4.0	86.0	4.0	86.6	3.4	80.9	9.1	85.3	4.7	90.0		90.0		90.0				90.0
	T	5.2	4.8	5.2	4.8	9.0	1.0	3.3	6.7	0.7	9.3	8.5	1.5	0.3	9.7	7.6	2.4			10.0
		91.2	8.8	91.2	8.8	95.6	4.4	84.2	15.8	86.0	14.0	98.5	1.5	90.3	9.7	97.6	2.4	90.0	10.0	

Najbardziej „wymagającym” okazuje się warunek *DP* – jedynie 1,5% wszystkich klas stanowią te, w których wszyscy głosujący są indyferentni wobec przynajmniej dwóch alternatyw. Najłatwiejszymi do spełnienia są warunki *VR* – (15,8% klas) oraz *LA* (14% klas).

Przedmiotem najważniejszych analiz był podzbiór klas rozkładów, w którym nie był spełniony żaden z klasycznych warunków. Zbadanie, dla których klas z tego podzbioru metoda zwykłej większości zawsze wyznacza przechodnią preferencję społeczną, a dla których możliwe jest wystąpienie paradoksu, miało umożliwić sformułowanie kolejnego warunku. Warunek ten w połączeniu z sumą warunków klasycznych byłby warunkiem wystarczającym i koniecznym zarazem.

W tym celu zbadano dla każdej klasy, czy należą do niej rozkłady, dla których metoda zwykłej większości wyznacza nieprzechodnią preferencję społeczną, czy też wyłącznie takie, dla których wyznaczona preferencja jest przechodnia. W tabeli 6 zestawione są informacje o spełnianiu bądź niespełnianiu poszczególnych warunków oraz o tym, czy wyznaczenie racjonalnej preferencji społecznej możliwe jest dla wszystkich rozkładów w klasie.

Tabela 6. Przychodność metody zwykłej większości a spełnianie klasycznych warunków

Spełnianie warunków:		Racjonalną relację społeczną można wyznaczyć		
		nie dla wszystkich rozkładów w klasie	dla wszystkich rozkładów w klasie	
<i>NB</i>	N	82.1	9.2	91.2
	T	0.9	7.9	8.8
<i>NW</i>	N	82.1	9.2	91.2
	T	0.9	7.9	8.8
<i>NM</i>	N	79.6	16.0	95.6
	T	3.4	1.0	4.4
<i>VR</i>	N	79.6	4.6	84.2
	T	3.4	12.5	15.8
<i>LA</i>	N	81.8	4.2	86.0
	T	1.2	12.8	14.0
<i>DP</i>	N	82.9	15.5	98.5
	T		1.5	1.5
<i>EP</i>	N	82.9	7.3	90.3
	T		9.7	9.7
<i>AP</i>	N	82.9	14.7	97.6
	T		2.4	2.4
<i>ER</i>	N	82.9	7.0	90.0
	T		10.0	10.0
<i>VR ∨ LA ∨ ER</i>	N	79.6		79.6
	T	3.4	17.1	20.4

Dane w tabeli są zgodne z przytaczanymi wcześniej twierdzeniami o „wystarczającości” warunków DP , EP i AP oraz warunku ER , który jest ich sumą – dla wszystkich klas, dla których warunki te są spełnione można wyznaczyć racjonalną preferencję społeczną. Jak wynika z cytowanych twierdzeń, warunki VR (wraz ze składającymi się na niego warunkami NB , NW i NM) oraz LA są wystarczające, gdy liczba osób jest nieparzysta. W prezentowanej tabeli nie ma ilustracji tych twierdzeń, ponieważ analizy były przeprowadzone bez żadnych założeń dotyczących liczby osób głosujących.

Z całego zbioru klas rozkładów wyróżnione zostały te klasy, dla których nie jest spełniony żaden z warunków VR , LA ani ER . Okazało się, że nie istnieją klasy złożone wyłącznie z rozkładów, dla których można wyznaczyć przechodnią preferencję społeczną, dla których te warunki nie są spełnione (ostatni wiersz tabeli 6). Oznacza to, że alternatywa klasycznych warunków: $VR \vee LA \vee ER$ jest warunkiem koniecznym typu K – jeśli ten warunek nie jest spełniony, na pewno do klasy należą rozkłady, dla których zasada zwykłej większości wyznacza nieprzechodnią relację społeczną.

Tabela 7. Wystarczające i konieczne klasyczne warunki

Warunki:	Nieparzysta liczba wyborców	Dowolna liczba wyborców
NB	wystarczający	
NW	wystarczający	
NM	wystarczający	
VR	wystarczający	
LA	wystarczający	
DP	wystarczający	wystarczający
EP	wystarczający	wystarczający
AP	wystarczający	wystarczający
ER	wystarczający	wystarczający
$VR \vee LA \vee ER$	wystarczający i konieczny	konieczny

Ze znanych twierdzeń wynika, że dla nieparzystej liczby osób głosujących alternatywa klasycznych warunków jest warunkiem wystarczającym (skoro każdy składający się na nią warunek jest wystarczający). Z wykonanych analiz wynika natomiast, że alternatywa ta jest warunkiem koniecznym dla dowolnej liczby osób, a więc również dla nieparzystej. Podsumowanie wyników analiz znajduje się w tabeli 7.

W literaturze poświęconej teorii wyboru społecznego, oprócz rozważanych tu, znanych warunków, znaleźć można bardzo wiele innych propozycji (Kaneko, 1975, Saposnik, 1975, Gaertner i Heinecke, 1977, Gaertner, 1979, 2001 i inni). Z zaprezentowanych analiz wynika jednak, że kolejne warunki wystarczające lub konieczne muszą zawierać się w klasycznych, sformułowanych w latach sześćdziesiątych, ograniczeniach sformułowanych przez Inadę, Sena i Pattanaika. Przeanalizowanie tych warunków w nowy sposób – przez zbadanie pełnego zbioru klas rozkładów, umożliwiło stwierdzenie konieczności warunków, dla których wcześniej udowodnione zostało, że są wystarczające. Okazało się, że za ich pomocą można określić zakres stosowności metody zwykłej większości – wiadomo jakie ograniczenia należy nałożyć na zbiór rozkładów preferencji indywidualnych, aby metoda zwykłej większości była funkcją społecznego dobrobytu.

Aneks

Analizy zostały przeprowadzone na zbiorze klas rozkładów preferencji dla trzech alternatyw. Wygenerowany został pełen zbiór klas (i -elementowych kombinacji, gdzie $i = 1, \dots, 13$) liczący $2^{13} - 1 = 8191$ elementów¹⁰. Dla każdej z klas określone zostało, czy spełnione są w jej przypadku warunki VR , LA i ER (a także wszystkie składające się na nie warunki cząstkowe). Możliwe więc było stwierdzenie, z jak dużą częścią całego zbioru każdy z nich jest zgodny i tym samym porównanie stopnia ich restrykcyjności. Ponadto, możliwe było zbadanie związków między poszczególnymi warunkami – określenie, czy są one od siebie zależne, czy też niezależne.

Celem dalszych analiz było wyodrębnienie podzbioru klas, nieopisanego przez klasyczne warunki, dla których nie występuje paradoks. Dla wszystkich klas sprawdzone zostało, czy należą do nich rozkłady, dla których zasada zwykłej większości wyznacza nieprzechodnią preferencję społeczną, czy też wyłącznie takie, dla których rozwiązanie jest racjonalne. Każda z klas zawiera nieskończoną liczbę rozkładów i aby można było stwierdzić, w przypadku każdej z nich, czy metoda zwykłej większości może wyznaczyć nieprzechodnią relację, należało dokonać redukcji preferencji. Redukcja ta odbywała się na poziomie rozkładów, a nie na poziomie klas. Znając mechanizm działania metody zwykłej większości, można nieskończenie wielki zbiór rozkładów podzielić na skończoną liczbę podzbiorów, których struktura jest istotna z punktu widzenia rozważanego problemu, tzn. preferencja społeczna wyznaczona dla rozkładów należących do jednego podzbioru jest taka sama. Do wykonania

tego zadania wykorzystane zostały wyniki uzyskane przez S. Slutskiego (1977). Slutsky zaproponował następującą definicję *rozkładów równoważnych*:

Dwa rozkłady w zbiorowościach S_1 i S_2 , gdzie $i \in S_1, j \in S_2$ są równoważne, jeśli:

$$\forall a, b \in \{x, y, z\} \quad N(a P_i b) - N(b P_i a) = N(a P_j b) - N(b P_j a).$$

To samo można wyrazić za pomocą częstości (P):

$$\forall a, b \in \{x, y, z\} \quad P(a P_i b) - P(b P_i a) = P(a P_j b) - P(b P_j a)$$

Rozkłady równoważne mają tę własność, że preferencja społeczna, wyznaczona przez zasadę zwykłej większości, jest taka sama dla każdego z nich¹¹.

Aby sprawdzić, dla których rozkładów zasada zwykłej większości wyznacza przechodnią preferencję społeczną, można analizować tylko rozkłady składające się z mocnych preferencji. Dla każdego rozkładu zawierającego indyferencję na jakiejś parze alternatyw, istnieje rozkład równoważny, złożony wyłącznie z mocnych preferencji. Indyferencja na parze alternatyw jest równoważna z dwiema mocnymi preferencjami przeciwnymi na tej parze. Jeśli w uporządkowaniu preferencyjnym indyferencja wystąpiła z częstością t , to każda ze „składających się na nią” mocnych preferencji występuje z częstością $t/2$.

Możliwych jest 6 mocnych uporządkowań preferencyjnych, w których nie występuje indyferencja:

$p1 \quad x \ y \ z$

$p2 \quad x \ z \ y$

$p3 \quad y \ x \ z$

$p4 \quad y \ z \ x$

$p5 \quad z \ x \ y$

$p6 \quad z \ y \ x$

Można nimi zastąpić każdą z preferencji zawierających indyferencję:

preferencje z jedną indyferencją:			pary równoważnych mocnych preferencji:			
$p7$	$x \ y - z$	—	$p1$	$x \ y \ z$	$p2$	$x \ z \ y$
$p8$	$y \ x - z$	—	$p4$	$y \ z \ x$	$p3$	$y \ x \ z$
$p9$	$z \ x - y$	—	$p5$	$z \ x \ y$	$p6$	$z \ y \ x$
$p10$	$x - y \ z$	—	$p1$	$x \ y \ z$	$p3$	$y \ x \ z$
$p11$	$x - z \ y$	—	$p5$	$z \ x \ y$	$p2$	$x \ z \ y$
$p12$	$y - z \ x$	—	$p4$	$y \ z \ x$	$p6$	$z \ y \ x$

Sześć możliwych mocnych uporządkowań preferencyjnych, w których nie występuje indyferencja, można podzielić na trzy pary *preferencji przeciwnych*. Trzy preferencje, będące pierwszymi elementami tych par, to preferencje z profilu Condorceta, dla którego metoda zwykłej większości wyznacza cykliczną preferencję społeczną (nazwijmy je preferencjami tworzącymi *cykl I*). Drugie elementy przeciwnych par, to preferencje tworzące profil analogiczny do profilu Condorceta (preferencje tworzące *cykl II*).

	cykl I		cykl II
I para	$p1 \ x \ y \ z$	-	$p6 \ z \ y \ x$
II para	$p4 \ y \ z \ x$	-	$p2 \ x \ z \ y$
III para	$p5 \ z \ x \ y$	-	$p3 \ y \ x \ z$

Redukcja zaproponowana przez Slutskiego polega na eliminacji parami osób o preferencjach przeciwnych. Jeśli rozkład złożony jest z pary przeciwnych preferencji, a częstość każdej z preferencji należących do pary jest taka sama, zasada zwykłej większości wyznacza społeczną indyferencję na trójce alternatyw. Można więc z dowolnego rozkładu usunąć pary osób o przeciwnych preferencjach i uzyskany w ten sposób uproszczony rozkład będzie równoważny z pierwotnym.

Rozkład zredukowany to taki, z którego już nie można usunąć żadnej pary, tzn. nie występują w nim przeciwne mocne uporządkowania preferencyjne.

Może on składać się maksymalnie z trzech uporządkowań – po jednym z każdej z przeciwnych par. Istnieje tylko 27 zredukowanych w ten sposób typów rozkładów. Zostały one wymienione w tabeli 8. Preferencje składające się na jeden typ mogą występować w dowolnych proporcjach.

Tabela 8. Typy zredukowanych rozkładów preferencji

Numer typu zredukowanego rozkładu	Preferencje tworzące zredukowane rozkłady	Preferencja społeczna jest przechodnia:
I	po redukcji nie zostały żadne preferencje	zawsze
II	$p1 \ x \ y \ z$	zawsze
III	$p2 \ x \ z \ y$	zawsze
IV	$p3 \ y \ x \ z$	zawsze
V	$p4 \ y \ z \ x$	zawsze
VI	$p5 \ z \ x \ y$	zawsze
VII	$p6 \ z \ y \ x$	zawsze
VIII	$p1 \ x \ y \ z$ $p4 \ y \ z \ x$	gdy jedna z preferencji ma częstość $> \frac{1}{2}$
IX	$p1 \ x \ y \ z$ $p5 \ z \ x \ y$	gdy jedna z preferencji ma częstość $> \frac{1}{2}$
X	$p4 \ y \ z \ x$ $p5 \ z \ x \ y$	gdy jedna z preferencji ma częstość $> \frac{1}{2}$
XI	$p6 \ z \ y \ x$ $p2 \ x \ z \ y$	gdy jedna z preferencji ma częstość $> \frac{1}{2}$
XII	$p6 \ z \ y \ x$ $p3 \ y \ x \ z$	gdy jedna z preferencji ma częstość $> \frac{1}{2}$
XIII	$p2 \ x \ z \ y$ $p3 \ y \ x \ z$	gdy jedna z preferencji ma częstość $> \frac{1}{2}$
XIV	$p1 \ x \ y \ z$ $p2 \ x \ z \ y$	zawsze
XV	$p1 \ x \ y \ z$ $p3 \ y \ x \ z$	zawsze
XVI	$p4 \ y \ z \ x$ $p6 \ z \ y \ x$	zawsze
XVII	$p4 \ y \ z \ x$ $p3 \ y \ x \ z$	zawsze
XVIII	$p5 \ z \ x \ y$ $p6 \ z \ y \ x$	zawsze
XIX	$p5 \ z \ x \ y$ $p2 \ x \ z \ y$	zawsze
XX	$p1 \ x \ y \ z$ $p4 \ y \ z \ x$ $p3 \ y \ x \ z$	zawsze
XXI	$p1 \ x \ y \ z$ $p2 \ x \ z \ y$ $p5 \ z \ x \ y$	zawsze
XXII	$p6 \ z \ y \ x$ $p4 \ y \ z \ x$ $p5 \ z \ x \ y$	zawsze
XXIII	$p5 \ z \ x \ y$ $p6 \ z \ y \ x$ $p2 \ x \ z \ y$	zawsze
XXIV	$p4 \ y \ z \ x$ $p6 \ z \ y \ x$ $p3 \ y \ x \ z$	zawsze
XXV	$p1 \ x \ y \ z$ $p2 \ x \ z \ y$ $p3 \ y \ x \ z$	zawsze
XXVI	$p1 \ x \ y \ z$ $p4 \ y \ z \ x$ $p5 \ z \ x \ y$	gdy jedna z preferencji ma częstość $> \frac{1}{2}$
XXVII	$p6 \ z \ y \ x$ $p2 \ x \ z \ y$ $p3 \ y \ x \ z$	gdy jedna z preferencji ma częstość $> \frac{1}{2}$

Dla każdego ze zredukowanych w ten sposób typów rozkładów można określić, czy wyznaczona preferencja społeczna będzie przechodnia. Jeśli po redukcji nie zostały żadne preferencje – metoda zwykłej większości wyznaczy dla takiego rozkładu społeczną indyferencję na trójce alternatyw. Jeśli została jedna preferencja – będzie ona, zgodnie z tą metodą, preferencją społeczną. Jeśli natomiast w rozkładzie pozostały dwie albo trzy preferencje, należące do tego samego cyklu, społeczna relacja będzie przechodnia tylko, gdy jedna z tych preferencji występuje z częstością większą niż $\frac{1}{2}$. Jeśli preferencje w zredukowanym rozkładzie należą do przeciwnych cykli, wyznaczone rozwiązanie będzie przechodnie. Dla typów rozkładów od VIII do XIII oraz XXVI i XXVII zasada zwykłej większości może prowadzić do nieprzechodniości społecznej relacji preferencji, w tym w przypadku dwóch ostatnich typów, je-

śli każda z preferencji wystąpi z jednakową częstością, po redukcji rozkład będzie miał strukturę identyczną z rozkładem Condorceta (str. 9) i wyznaczonym dla niego rozwiązaniem będzie jeden z cykli (ze str. 29).

Przedstawiony powyżej sposób redukcji preferencji, pozwalający na określenie, czy metoda zwykłej większości wyznacza racjonalne, czy nieracjonalne rozwiązanie, dotyczył rozkładów preferencji. Aby można było wykonać analizy na poziomie klas, a nie rozkładów, należało analogicznie, w każdej klasie, zastąpić preferencje zawierające indyferencje parą mocnych preferencji¹². Następnie trzeba było rozważyć wszystkie możliwe proporcje częstości występowania przeciwnych preferencji, dokonać ich redukcji i określić, które z 27 rozkładów wymienionych w tabeli 8 mogą do danej klasy należeć.

Mówiąc ściśle, wystarczyło rozważyć, w przypadku każdej z klas, czy może należeć do niej któryś z 8 rozkładów, dla których zasada zwykłej większości wyznacza nieprzechodnią preferencję społeczną (tzn. któryś z 8 rozkładów wyróżnionych w tabeli 8). Dzięki temu można było określić, które z klas składają się wyłącznie z rozkładów, dla których zasada wyznacza racjonalne rozwiązanie.

W ostatnim etapie rozwiązanie to zostało zestawione z informacją o spełnianiu bądź niespełnianiu każdego z klasycznych warunków ograniczających zbiór możliwych preferencji.

Baza danych i plik z procedurami do analiz znajduje się na stronie:
http://stat.is.uw.edu.pl/zzw_aneks

Przypisy

¹ *Zwrotność* tej relacji oznacza, że żadna alternatywa nie jest gorsza od siebie samej: $\forall x \in A : xR_x$. Wymaganie *spójności* jest spełnione, gdy relacja R_i zachodzi między każdą parą alternatyw: $\forall x, y \in A : xR_y \vee yR_x$. *Przechodniość* oznacza, że jeśli alternatywa x jest przynajmniej tak dobra jak y i jednocześnie y jest przynajmniej tak dobra jak z , to alternatywa x musi być przynajmniej tak dobra jak z : $\forall x, y, z \in A : (xR_y \wedge yR_z) \rightarrow xR_z$. Racjonalna relacja mocnej preferencji P_i , która jest częścią racjonalnej preferencji R_i jest przechodnia i *antyzwrotna* (żadna alternatywa nie jest lepsza od siebie samej): $\forall x \in A : \sim (xP_x)$, a relacja indyferencji I_i – zwrotna i przechodnia. Relacja indyferencji jest symetryczna, a więc jest relacja równoważności.

² Gdy na podstawie preferencji indywidualnych dokonuje się wyboru najlepszej alternatywy (lub podzbioru najlepszych alternatyw), mamy do czynienia z *funkcją społecznego wyboru*. Za „najlepsze alternatywy” uznawane będą alternatywy *optymalne* – w porównaniu parami nie gorsze od żadnej alternatywy. Jeśli jakaś metoda jest funkcją społecznego dobrobytu, można na jej podstawie skonstruować funkcję społecznego wyboru. Od funkcji społecznego wyboru wymaga się jednak mniej: społeczna preferencja nie musi być przechodnia, wystarczy, że będzie zwrotna, spójna i acykliczna. Warunek acykliczności jest spełniony również wtedy, gdy alternatywa x jest lepsza od y , y jest lepsza od z , a x jest uznana za równie dobrą jak z (tzn. xPy , yPz , xIz). Warunek ten nie dopuszcza jedynie wystąpienia cyklu na mocnych preferencjach (np. xPy , yPz , zPx). Często rozważany jest także mocniejszy warunek quasi-przechodniości. Warunek ten wymaga, by przechodnia była relacja mocnej preferencji (dopuszcza nieprzechodniość indyferencji). Jeśli preferencja jest przechodnia, jest również quasi-przechodnia, a jeśli jest quasi-przechodnia – jest też acykliczna

³ Żadna z alternatyw nie jest również alternatywą optymalną. W związku z tym, metoda zwykłej większości nie jest funkcją społecznego wyboru.

⁴ Dla uproszczenia przyjęte zostało, że każde z uporządkowań tworzących klasę musi mieć częstość większą od zera.

⁵ Wprowadzone rozróżnienie warunków na warunki typu R oraz typu K nie jest tożsame z zaproponowanymi przez Pattanaika definicjami warunków I i II typu (Pattanaik, 1971). Warunki Pattanaika nie odnoszą się do zbioru konkretnych rozkładów (jak to jest w przypadku warunku typu R). Warunek typu K oznacza to samo co u Pattanaika warunek typu I, tzn. odnosi się do rozłącznych klas rozkładów rozumianych w taki sposób, że do jednej klasy należą wszystkie rozkłady, w których występują z niezerową częstością takie same indywidualne preferencje. Warunek typu II jest jeszcze bardziej ogólny. Można powiedzieć, że również jest nakładany na klasy, ale nierozłączne, ponieważ rozumiane nieco inaczej – nie ma tu wymagania niezerowej częstości, tak więc w rozkładach tworzących jedną klasę pewne preferencje określające klasę mogą nie występować. Innymi słowy, do jednej klasy należą wszystkie rozkłady, w których nie występuje określony zestaw preferencji indywidualnych, a preferencje spoza tego zestawu mogą występować z dowolnymi, również zerowymi, częstościami sumującymi się do jedności.

⁶ Na rysunku 3. punkt idealny wyborcy 2. pokrywał się z punktem środkowym $x|z$

⁷ Preferencja $p|3$ (indyferencja na wszystkich trzech alternatywach) byłaby dopuszczalna dla niektórych umiejscowień punktu idealnego, tylko gdyby przynajmniej dwie alternatywy zajmowały dokładnie tę samą pozycję. Sytuacja ta jest równoważna z dokonywaniem wyboru między dwiema alternatywami.

⁸ Przynajmniej połowa wyborców ma punkty idealne znajdujące się na lewo i przynajmniej połowa wyborców ma punkty idealne znajdujące się na prawo od punktu idealnego środkowego wyborcy. W przykładzie przedstawionym na rysunku 3, punktem idealnym środkowego wyborcy jest punkt w_2 – znajduje się pomiędzy punktami idealnymi pierwszego i trzeciego wyborcy.

⁹ Twierdzenie Blacka mówi jedynie o istnieniu alternatywy najlepszej (również jest warunkiem wystarczającym typu K).

¹⁰ Osoby indyferentne na całej trójce alternatyw nie mają wpływu na uporządkowanie społeczne tej trójki. Można więc było nie uwzględniać ich w analizach. Zbiór liczył $2^{12} - 1 = 4095$ elementów.

¹¹ Jeśli do rozkładu dołączymy grupę osób indyferentnych wobec wszystkich alternatyw lub wykluczmy z niego taką grupę – uzyskany rozkład będzie równoważny z rozkładem pierwotnym.

¹² Trzeba było określić, na przykład, czy preferencja $p1$ występowała z częstością większą, równą czy mniejszą niż preferencja $p6$.

Bibliografia

Arrow, Kenneth J. 1951, 2. wyd. 1963. *Social Choice and Individual Values*. New York: Wiley.

Black, Duncan. 1958. *The Theory of Committees and Elections*, Cambridge: Cambridge University Press.

Coombs, Clyde H. 1964. *A Theory of Data*. New York: Wiley.

Gaertner, Wulf. 1979. *An Analysis and Comparison of Several Necessary and Sufficient Conditions for Transitivity under the Majority Decision Rule*. W: J.-J. Laffont. (red.) *Aggregation and Revelation of Preferences*. Amsterdam: North-Holland s. 91-112.

Gaertner, Wulf. 2001 *Domain Conditions in Social Choice Theory*. Cambridge: Cambridge University Press.

Gaertner, Wulf., Heinecke, Achim. 1977. *On Two Sufficient Conditions for Transitivity of the Social Preference Relation*. „Zeitschrift für Nationalökonomie” 37, s. 61-66

Inada, Ken-Ichi. 1964. *A Note on the Simply Majority Decision Rule*. „Econometrica” 32 s. 525-531.

Inada, Ken-Ichi. 1969. *The Simply Majority Decision Rule*. „Econometrica” 37 s. 490-506.

Kaneko, Mamuro. 1975. *Necessary and Sufficient Conditions for Transitivity in Voting Theory* „Journal of Economic Theory” 11, s. 385-393

Pattanaik, Prasanta K. 1971. *Voting and Collective Choice*. Cambridge: Cambridge University Press.

Saposnik, Rubin. 1975. *On Transitivity of the Social Preference Relation under Simple Majority Rule* „Journal of Economic Theory” 10, s. 1-7.

Sen, Amartya K. 1966. *A Possibility Theorem on Majority Decision* „Econometrica” 34, s. 491-499.

Sen, Amartya K. 1970. *Collective Choice and Social Welfare*. San Francisco: Holden-Day.

Sen, Amartya K., Pattanaik, Prasanta K. 1969. *Necessary and Sufficient Conditions for Rational Choice under Majority Decision*. „Journal of Economic Theory” 1 s. 178-182.

Slutsky Steven. 1977. *A Characterization of Societies with Consistent Majority Decision*
„The Review of Economic Studies” 44, s. 211-225.