

# KILKA UWAG O KOMPUTEROWYM WSPOMAGANIU WIELOKRYTERIALNEGO PODEJMOWANIA DECYZJI

**Ignacy Kaliszewski\***

**Streszczenie:** *Przedmiotem rozważań są uwarunkowania dla szerokiego upowszechnienia w praktyce metod komputerowego wspomaganie podejmowania decyzji przy wielu kryteriach.*

*Podjęto próbę zidentyfikowania istotnych przeszkód, które hamują ten proces, oraz wskazano, w oparciu o publikowane wyniki badań autora, na możliwości ich przewyżczenia, zarówno w sferze metodycznej, jak i technicznej.*

**Słowa kluczowe:** *wielokryterialność, wspomaganie podejmowania decyzji, interaktywność.*

## **A FEW COMMENTS ON COMPUTER-AIDED MULTIPLE CRITERIA DECISION SUPPORT**

**Abstract:** *We are concerned with prerequisites for a wide acceptance in practice of computer based methods to support decision making within multiple criteria environment.*

*An attempt is made to identify key obstacles, which hamper this process and, building on the published results of the Author, ways to overcome them, both in the methodological and the technical aspects, are outlined.*

**Keywords:** *multiple criteria, decision making support, interactivity.*

\* Ignacy Kaliszewski, Instytut Badań Systemowych, Polska Akademia Nauk, ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa, ignacy.kaliszewski@ibspan.waw.pl

## 1. Wprowadzenie

Punktem wyjścia dla niniejszego artykułu jest moja pełna identyfikacja z poglądem, że teoria decyzji, jak każda nauka dla której inspiracją są problemy praktyczne, powinna stale weryfikować adekwatność proponowanych modeli oraz otrzymywanych w ramach tych modeli wyników formalnych z realiami praktyki. W przeciwnym razie grozi jej zerwanie więzi ze swoimi korzeniami, trwanie w oderwaniu od kontekstu dnia codziennego, a w konsekwencji odejście w świat bytów abstrakcyjnych.

Nie będąc nieczułym na piękno matematycznych formalizmów oferowanych przez badaczy w ramach teorii decyzji, odnosząc się jednocześnie ze zrozumieniem co do wymogów formalnych pozwalających naukowcom wspinać się na kolejne szczeble kariery naukowej i związanego z tym obowiązku udowodnienia umiejętności posługiwania się aparatami formalnymi, jestem jednak przekonany, że istnieje niezbędna potrzeba okresowej weryfikacji łączności teorii z rzeczywistością otoczenia.

Artykuł jest próbą takiej okresowej weryfikacji w obszarze modeli deterministycznych uwzględniających wiele (co najmniej dwa) kryteria, czyli w obszarze *wielokryterialnego podejmowania decyzji* (dalej WPD), będącym moim obszarem zainteresowań i badań. Doprowadziło mnie to do sformułowania pewnych konkluzji, nazywanych poniżej, może nieco na wyrost, paradygmatami, co do stanu i kierunku dalszych badań w tym zakresie.

Wytlumaczenia wymaga, dlaczego zajmujemy się tutaj tylko kontekstem deterministycznym, skoro wielu badaczy posuwa się tak daleko, że formułują tezę, iż „w kontekście deterministycznym *nie ma problemu*”. Jednak łatwo zauważyć, że w kategoriach praktycznych narzędzi dla podejmowania (bądź tylko wspomaganie podejmowania) decyzji (w odróżnieniu do rozwijanych teorii) takie stwierdzenia nie prowadzą daleko: wcześniej czy później losowość zostaje zamknięta w opisujące ją liczby (por. np. teorię inwestycji portfelowych według Markowitza, Markowitz 1991, i jej rozwinięcia, Elton i in. 2003), do których można już stosować metody właściwe dla warunków deterministycznych. Można powiedzieć obrazowo, że podejmowanie decyzji w warunkach niedeterministycznych (powtórzy raz jeszcze – w kategoriach praktycznych narzędzi, bo tworzonym teoriom nie można odmówić ani matematycznego piękna, ani finezji), to „szklana góra”, na którą wspina się wielu, by wcześniej czy później osunąć się po jej ścianach do podstawy, gdzie panuje pełny determinizm charakteryzujący obliczenia numeryczne przeprowadzane z wykorzystaniem współczesnych komputerów<sup>1</sup>. Pozostańmy zatem u podstaw.

<sup>1</sup> Nowe generacje komputerów, oparte na innych modelach obliczeń niż stosowane obecnie, mogą jednak zmienić tę sytuację.

## 2. Problem decyzyjny i jego model

Problem decyzyjny, do którego będziemy się tutaj odnosić, formułowany jest za pomocą następujących dwóch pojęć pierwotnych: *warianty decyzyjne* i *kryteria*. Kryteria odwzorowują warianty decyzyjne (w skrócie: warianty) w *oceny* (wektory wartości kryteriów). Sformułowanie problemu decyzyjnego ma następującą postać

$$\begin{aligned} &\text{wybierz wariant } x \text{ dla którego wektor } f(x), x \in X_0 \subseteq X, \\ & \hspace{15em} (1) \\ &\text{jest najbardziej preferowany,} \end{aligned}$$

gdzie  $X$  jest zbiorem (przestrzenią) potencjalnych wariantów,  $X_0$  jest zbiorem wariantów dopuszczalnych,  $f: X \rightarrow R^k$  jest odwzorowaniem kryterialnym, w którym  $f = (f_1, \dots, f_k)$ ,  $f: X \rightarrow R$  jest *funkcją kryterium*,  $i = 1, \dots, k$ ,  $k \geq 2$ . Dla wygody, a bez straty ogólności rozważań, będziemy zakładać, że wszystkie kryteria są typu „im więcej tym lepiej”.

Wariant  $x$ , dla którego  $f(x)$  jest najbardziej preferowaną oceną, jest wariantem *najbardziej preferowanym*.

## 3. Fazy procesu decyzyjnego

Z algorytmicznego punktu widzenia problem (1) jest źle postawiony. Istotnie, tak długo, jak nie wiemy, co dokładnie oznacza sformułowanie „najbardziej preferowany”, tak długo nie jesteśmy w stanie zaproponować żadnego sposobu dochodzenia do rozwiązania problemu. Taka wiedza, w formie jawnej bądź niejawnej, jest w wyłącznym posiadaniu decydenta.

**Paradygmat 1.** *Punktem wyjścia dla każdej racjonalnej metodyki podejmowania decyzji powinno być założenie, że informacja pozwalająca wskazać wariant najbardziej preferowany nie może być pozyskana od decydenta ani razu, ani jednorazowo.*

Dla uzasadnienia tego paradygmatu wystarczy wesprzeć się autorytetem Herberta Simona<sup>2</sup>. Wprowadzony przez niego schemat procesu decyzyjnego (Simon 1997) zawiera cztery fazy zamknięte w pętli (rysunek 1), zwanej często *pętlą uczenia*. Zakładając, że decydent jest całkowicie suwerenny w odniesieniu do sposobu prowadzenia procesu decyzyjnego (a tak być w praktyce wcale nie musi), proces decyzyjny przebiega w zapętłonej sekwencji faz, aż do zidentyfikowania w fazie trzeciej

<sup>2</sup> Numer 7 *Decyzji* z 2007 roku zawiera prezentację sylwetki H. Simona i jego dorobku naukowego.

## KILKA UWAG O KOMPUTEROWYM WSPOMAGANIU...

– fazie wyboru – wariantu, który decydent w fazie czwartej uzna ostatecznie za najbardziej preferowany.

Paradygmat 1 w odniesieniu do schematu Simona stwierdza, że w ogólnym przypadku nie należy oczekiwać zidentyfikowania wariantu najbardziej preferowanego przez decydena przy jednokrotnym przejściu czterech faz schematu.

#### 4. Faza wyboru

Faza trzecia schematu Simona najbardziej ze wszystkich czterech faz poddaje się formalizacji, stąd też przyciąga największą uwagę tych badaczy, których warszatem są metody analizy ilościowej. Zaczynając pracę badawczą w tym punkcie, można zakładać różne modele decyzyjne i badać ich własności. Właśnie tutaj następuje najczęściej rozbrat teorii decyzyjnych z praktyką, a literatura naukowa na temat fazy wyboru jest nieproporcjonalnie rozległa w stosunku do literatury odnoszącej się do pozostałych faz bądź do wszystkich czterech faz łącznie.

W fazie trzeciej schematu Simona operujemy ustalonym modelem problemu decyzyjnego (jest to albo model końcowy, albo jeden z modeli próbnych, w zależności od tego, czy jest to ostatnie przejście pętli, czy też będą kolejne).

Paradygmat 1 ma również bezpośrednie zastosowanie do fazy wyboru. Kuhn i Tucker w czasie historycznej konferencji w Berkeley w 1950 roku<sup>3</sup> podali warunki optymalności dla zadania optymalizacji z wieloma kryteriami, sprowadzając te kryteria do jednego *kryterium zastępczego* za pomocą ich sumy ważonej (Kuhn, Tucker 1951, por. problem optymalizacyjny (3) poniżej). Przy założeniu, że wszystkie kryteria są typu „im więcej, tym lepiej”, maksymalizacja kryterium zastępczego na zbiorze wariantów dopuszczalnych prowadzi do wyznaczenia wariantu efektywnego (por. definicja poniżej).

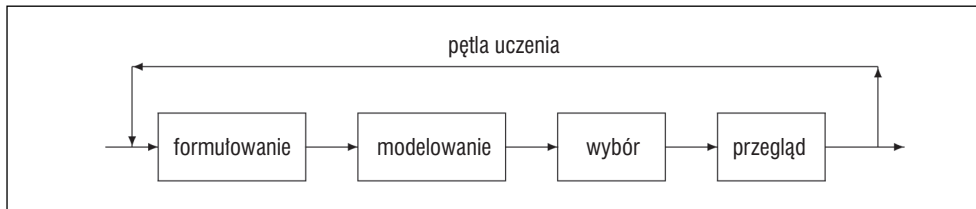
Kuhn i Tucker wskazali zatem drogę do rozwiązania problemu *optymalizacji wektorowej*

$$vmax f(x), x \in X_0 \subseteq X, \quad (2)$$

gdzie *vmax* oznacza operację wyznaczenia wszystkich wariantów efektywnych.

W odróżnieniu od problemu decyzyjnego (1) problem optymalizacji wektorowej (2) jest dobrze postawiony, w tym sensie, że przy słabych założeniach spełnionych prawie zawsze w praktycznych zastosowaniach ma on rozwiązanie.

<sup>3</sup> Second Berkeley Symposium on Mathematics, Statistics, and Probability.

**Rysunek 1. Cztery fazy procesu podejmowania decyzji**

Od artykułu Kuhna i Tuckera z 1951 roku pojawiło się wiele<sup>4</sup> prac poświęconych rozwiązywaniu problemu (2), który, jak się dość powszechnie zgodzono w kręgach naukowców pracujących w zakresie metod ilościowych WPD, stanowi model bazowy dla problemu decyzyjnego (1). Wynika to z szerokiego zaakceptowania paretońskiej koncepcji racjonalności (Pareto 1906, 1971) odzwierciedlonej w definicji wariantu efektywnego (por. definicja poniżej), jak również w postulacie maksymalizacji *funkcji wartości decydenta* (będącej deterministycznym odpowiednikiem funkcji użyteczności wprowadzonej przez von Neumana i Morgensterna, von Neuman Morgenstern 1947).

Paretońska racjonalność doczekała się wielowątkowych krytyk, z których najbardziej spektakularną jest sformułowana przez Simona teoria ograniczonej racjonalności (Simon 1977)<sup>5</sup>. W tym artykule pozostaniemy jednak w kręgu racjonalności paretońskiej, ze względu na jej szeroką akceptację w publikacjach z zakresu metod decyzyjnych reprezentujących ujęcie ilościowe, co przekłada się również na jej szeroką akceptację w problemach praktycznych.

W ramach zarówno modelu (1), jak i modelu (2) warianty są reprezentowane w sposób całkowicie jednoznaczny przez odpowiadające im wartości kryteriów. Dla zwięzłości prezentacji będziemy używać oznaczeń  $y$  oraz  $Z$ , gdzie

$$y = f(x), Z = f(X_0).$$

Oczywiście  $Z \subseteq R^k$ . Elementy  $y$  zbioru  $Z$  to wcześniej już wprowadzone oceny. Przy takiej konwencji, dla danego dopuszczalnego wariantu  $x$ ,  $y_i$  oznacza wartość  $i$ -tej współrzędnej oceny  $y = f(x)$ . Zatem  $y_i$  jest wartością  $i$ -tego kryterium dla wariantu  $x$ .

Wszystkie własności wariantów rozpatrywane w wyżej sformułowanym zadaniu decyzyjnym, mające wpływ na przebieg procesu decyzyjnego, mogą być przedstawione i analizowane poprzez własności ocen  $y$ . Potrzeba odwoływania się bezpośrednio do notacji  $x, X_0, f(x), f(X_0)$ , istnieje tylko wtedy, gdy rozpatrywane są problemy decyzyjne, w których dopuszczalne warianty są zdefiniowane w sposób pośredni (tj. w posta-

<sup>4</sup> W Achilles i in. (1979) zebrano kilkaset doniesień na ten temat.

<sup>5</sup> Warto też zwrócić uwagę na krajowe badania w tym zakresie publikowane w *Decyzjach* (Lissowski 2007, Kuc 2007).

## KILKA UWAG O KOMPUTEROWYM WSPOMAGANIU...

ci zbioru ograniczeń). Pamiętając o tym, w dalszej części artykułu będziemy odnosić się wyłącznie do ocen  $y$  i ich zbioru  $Z$ .

Element  $\hat{y}$  przestrzeni  $R^k$ , nazywany *utopijnym*, jest wyznaczany jako

$$\hat{y}_i = \max_{y \in Z} y_i, i = 1, \dots, k.$$

Będziemy zakładać, że wszystkie wyżej określone maksima istnieją.

Element  $\hat{y}$  nie musi reprezentować żadnego wariantu dopuszczalnego.

**Definicja 1.** Ocena  $\bar{y} \in Z$  jest efektywna, jeżeli  $y_i \geq \bar{y}_i, i = 1, \dots, k, y \in Z$ , implikuje  $y = \bar{y}$ .

Oceny, które nie są efektywne, nazywamy *nieefektywnymi*.

Wariant dopuszczalny nazywamy *wariantem efektywnym* (*wariantem nieefektywnym*), jeżeli jego ocena jest efektywna (nieefektywna).

Zbiór wszystkich ocen efektywnych jest zwykle nazywany *zbiorem Pareto*.

**Paradygmat 2.** Próby ujęcia działań decydenta w procesie decyzyjnym w ramy modelu matematycznego nie zakończyły się, jak dotąd, powodzeniem.

Żadna teoria ani żaden algorytm wyboru decyzji nie uzyskały dotąd statusu obowiązującego, potwierdzonego w praktyce dogmatu. Nawet uhonorowane Nagrodą Nobla prace Kahnemana i Tversky'ego z zakresu teorii perspektywy (Kahneman, Tversky 1979) są kwestionowane na podstawie prób zweryfikowania tej teorii w praktyce (Levy, Levy 2002). Ani podejście do podejmowania decyzji poprzez koncepcję funkcji wartości decydenta, ani podejście polegające na pozyskiwaniu informacji o preferencjach decydenta i użyciu ich przez pewien (zawsze arbitralny) mechanizm (algorytm) wyboru decyzji, nie stanowią w praktyce dla decydentów alternatywy dla stosowanych przez nich, często z dobrym skutkiem, procedur nieformalnych.

W przypadku podejścia do podejmowania decyzji poprzez koncepcję funkcji wartości problem konstrukcji takiej funkcji natrafia na istotną barierę psychologiczną. Decydent musi bowiem dostarczyć takiego zakresu informacji o swoich preferencjach, aby utworzenie takiej funkcji było możliwe. Od chwili utworzenia funkcji wartości proces decyzyjny stałby się automatyczny (bo znalezienie decyzji maksymalizującej funkcję wartości jest już tylko sprawą techniczną). Samo istnienie funkcji wartości „obnażałoby” decydenta, stając się wdzięcznym polem dla ewentualnej krytyki jego osoby i jego działań. Ujawniona funkcja wartości mogłaby funkcjonować jako jego swoiste *alter ego*, a w takim przypadku jego dalsza „przydatność” w procesie decyzyjnym mogłaby być kwestionowana.

Można powiedzieć, że w warunkach praktycznych powyższe obawy decydenta nie mają miejsca, a to z powodu, że do utworzenia funkcji wartości nigdy nie dochodzi. Istotnie, niechęć decydenta do współpracy przy konstruowaniu funkcji wartości może być wystarczającym powodem do niepowodzenia przy jej tworzeniu. W warunkach praktycznych decydent nie ma żadnej motywacji dla utworzenia, a tym bardziej ujawnienia takiej funkcji. Inaczej bywa zwykle w warunkach laboratoryjnych, gdzie osoby uczestniczące w eksperymentach są za sam udział w nich, bezpośrednio bądź pośrednio, nagradzane.

Koncepcja funkcji wartości ma niewątpliwie zastosowanie dla objaśniania (a posteriori) zachowań grupowych (np. wybory konsumenckie) i ewentualnie prognozowania takich zachowań. Wartość poznawcza tej koncepcji jest niewątpliwa. Jednak jej przydatność jako narzędzia do podejmowania decyzji w praktyce, mówiąc najogólniej, można kwestionować.

Można zaryzykować stwierdzenie, że w wymiarze praktycznym podejście algorytmiczne do modelowania podejmowania decyzji poniosło klęskę w tym znaczeniu, że nie dostarczyło praktycznych, akceptowalnych przed rzeczywistych decydentów narzędzi. I tu bierze źródło nurt prac stawiający sobie nieco skromniejsze zadanie, polegające na dostarczeniu praktycznych (czyli prostych ideowo i prostych w użyciu) metodyk i narzędzi dla wspomaganie decydenta w procesie decyzyjnym.

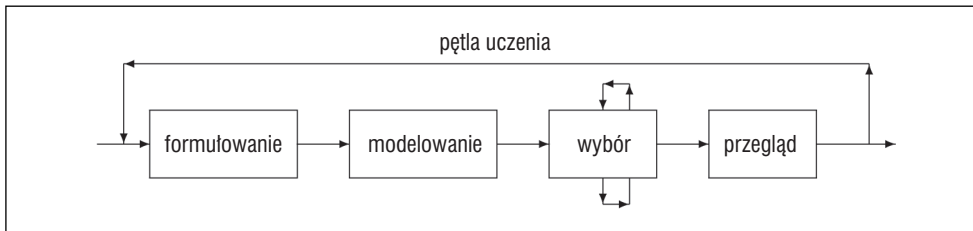
W pracach tych za punkt wyjściowy przyjmuje się schemat interakcyjnej współpracy decydenta z modelem. Tym razem jednak nie jest to już model decyzyjny, lecz model przedstawiający jedynie pole możliwych decyzji i preferencje cząstkowe reprezentowane zestawem kryteriów. Najprostszym możliwym takim modelem jest jawna lista ocen wariantów, jednak w ogólnym przypadku może być to model o dowolnym stopniu złożoności. Za taki model przyjmuje się zbiór  $Z$  ( $Z = f(X_0)$ ) z problemu (2).

O ile w problemie jednokryterialnym można za pomocą jednego wskazanego kryterium jednoznacznie zdefiniować „zasadę” przeszukiwania pola możliwych decyzji, co pozwala wskazać metodę i algorytm przeszukiwania zbioru ocen i w konsekwencji wyznaczyć ocenę najbardziej preferowaną (zatem także wariant najbardziej preferowany), taka jednoznaczność w problemie wielokryterialnym nie jest w ogólnym przypadku możliwa. Paretońska koncepcja racjonalności dzieli zbiór ocen na zbiór ocen efektywnych i pozostałe (nieefektywne) oceny, gdzie zgodnie z tą racjonalnością tylko oceny efektywne są racjonalnymi kandydatami do oceny najbardziej preferowanej. Ponieważ w ogólnym przypadku zbiór ocen efektywnych nie jest jednoelementowy, konieczna jest jakaś forma przeszukiwania tego zbioru. Z paradygmatu 1 wynika, że może to być realizowane tylko w ramach schematu interakcyjnego.

A zatem schemat procesu decyzyjnego należy rozwinąć do postaci jak na rysunku 2.

## KILKA UWAG O KOMPUTEROWYM WSPOMAGANIU...

Rysunek 2. Cztery fazy procesu podejmowania decyzji



Przy rozwiązywaniu problemów WPD w sposób interaktywny poszukiwanie decyzji (wariantu, oceny) najbardziej preferowanej sprowadza się do „wędrowania” pomiędzy ocenami efektywnymi. To decydent określa początek i przebieg tej wędrówki przez oceny pośrednie. Na każdym etapie poszukiwań decydent, posługując się nabytą wiedzą o problemie, wyraża swoje cząstkowe preferencje w odniesieniu do ocen, które wartościuje i porównuje. Następnie preferencje te są wykorzystywane do określenia zbioru „kierunków”, w których poszukiwania mogą być kontynuowane. Jeżeli decydent nie chce kontynuować wędrówki, wtedy najbardziej preferowana ocena pośrednia oraz odpowiadający jej wariant (lub warianty) stają się ostatecznie „najbardziej preferowane”.

Dla wyznaczania ocen efektywnych wykorzystywany jest najczęściej problem optymalizacyjny<sup>6</sup>

$$\max_{y \in Z} \sum_i \lambda_i y_i, \quad (3)$$

lub<sup>7</sup>

$$\min_{y \in Z} \max_i \lambda_i (y_i^* - y_i), \quad (4)$$

gdzie  $\lambda$  jest wektorem takim, że  $\lambda_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,  $y_i^* = \hat{y}_i + \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

Jak łatwo zauważyć (por. rysunek 3), problem optymalizacyjny (3) nie jest w stanie wyznaczyć takich ocen efektywnych, które nie są punktem podparcia zbioru  $Z$  za po-

<sup>6</sup> Dokładniej, rozwiązaniem tego problemu jest ocena właściwie efektywna (patrz Miettinen 1999, Ehrgott 2005, Kaliszewski 2006a, 2008). Odnotowujemy ten fakt dla formalnej poprawności wyводу, ze względu jednak na to, że nie ma on w problemach praktycznych większego znaczenia, nie będziemy dalej rozróżniać pomiędzy ocenami efektywnymi i właściwie efektywnymi. Dla kompletności prezentacji, definicja oceny właściwie efektywnej przytoczona została w dodatku.

<sup>7</sup> Dokładniej, rozwiązaniem tego problemu jest ocena słabo efektywna (patrz Miettinen 1999, Ehrgott 2005, Kaliszewski 2006a, 2008). Odnotowujemy ten fakt dla formalnej poprawności wyводу, ze względu jednak na fakt, że stosunkowo łatwo jest, przez tzw. regularyzację zadania optymalizacyjnego (4) (ibidem), wyeliminować z rozwiązań tego zadania oceny, które są słabo efektywne lecz nie są efektywne, nie będziemy dalej rozróżniać pomiędzy wariantami efektywnymi i słabo efektywnymi. Dla kompletności prezentacji, definicja oceny słabo efektywnej przytoczona została w dodatku.



mocą hiperpłaszczyzny o dodatnich współczynnikach. Innymi słowy, nie każdy wariant efektywny może być wyznaczony za pomocą problemu optymalizacyjnego (3)<sup>8</sup>. Z tego powodu poniżej będziemy odnosić się już tylko do problemu optymalizacyjnego (4), który takiej ułomności nie posiada (por. rysunek 4).

W zakresie metodyki interaktywne metody WPD różnią się tym, które z elementów: *wagi* czy *punkty referencyjne*, zostają wybrane dla wyrażania preferencji decydenta. To rozróżnienie ustala taksonomię interaktywnych metod WPD o dwóch klasach: *klasie metod wagowych* i *klasie metod punktu referencyjnego*. Taka taksonomia jest zupełna, ponieważ wagi i punkty referencyjne są jedynymi istotnymi obiektami odnoszącymi się do przestrzeni ocen i dostępnymi dla manipulacji w trakcie procesu decyzyjnego<sup>9</sup>.

W klasie metod wagowych (Zionts Wallenius 1983, Steuer 1986, Dell Karwan 1990, patrz także Miettinen 1999, Ehrgott 2005, Kaliszewski 2006a, 2008) preferencje decydenta są wyrażane za pomocą wag, tj. parametrów problemów optymalizacyjnych wykorzystywanych dla wyznaczania ocen efektywnych, np. problemu (4). Wybrany *wektor wag* ustala funkcję celu zadania optymalizacyjnego i w ten sposób wskazuje na (wyznacza pośrednio) ocenę efektywną (por. rysunek 4 przedstawiający przypadek, gdy do wyznaczania ocen efektywnych wykorzystywany jest problem optymalizacyjny (4)). Zbiór dopuszczalnych wag jest systematycznie przeszukiwany i redukowany<sup>10</sup>, co prowadzi do przeszukiwania i systematycznego redukowania zbioru ocen efektywnych. Redukowanie może być dokonywane za pomocą *odcięć wagowych* (Zionts Wallenius 1983, Dell Karwan 1990) lub *zagnieżdżania wag* (Steuer 1986).

W przypadku gdy do wyznaczania ocen wykorzystywany jest problem optymalizacyjny (4), odcięcia wagowe tworzy się następująco. Jeżeli decydent preferuje pewną ocenę  $y$  w stosunku do innej oceny  $y'$ , to formułowany jest warunek (odcięcie)

$$\max_i \lambda_i (y_i^* - y_i) < \max_i \lambda_i (y_i^* - y'_i).$$

Jest to warunek na wektory  $\lambda$ , dla których zagregowane (skalarne) wartościowanie według funkcji  $\max_i \lambda_i (y_i^* - y_i)$  oceny  $y$  jest lepsze (bo ma mniejszą wartość, por. postać

<sup>8</sup> Konsekwencją tego faktu jest to, że w przetargu ocenianym według dwóch kryteriów i ważonej funkcji liniowej, dla żadnej kombinacji dodatnich wag oferta „zrównoważona” o ocenach  $(t, t)$  nie wygra przetargu, jeżeli pojawią się oferty „niezrównoważone”  $(u, 0)$  i  $(0, u)$ , gdzie  $u = t + t + \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$  jest dowolnie małą liczbą, nawet jeżeli ocena  $(t, t)$  jest oceną efektywną. Przykład:  $(49, 49), (100, 0), (0, 100)$ .

<sup>9</sup> Preferencje mogą być także wyrażane poprzez ograniczanie zbioru Pareto za pomocą nakładania i modyfikowania dodatkowych ograniczeń w modelu; istnieje cała grupa „klasycznych” metod oparta na tej idei. Ponieważ jednak ten sposób wyrażania preferencji powinien być dostępny, naszym zdaniem, w każdej metodzie, metod opartych wyłącznie na manipulowaniu ograniczeniami nie wyróżniamy w osobną klasę, por. Kaliszewski 2006a, 2008.

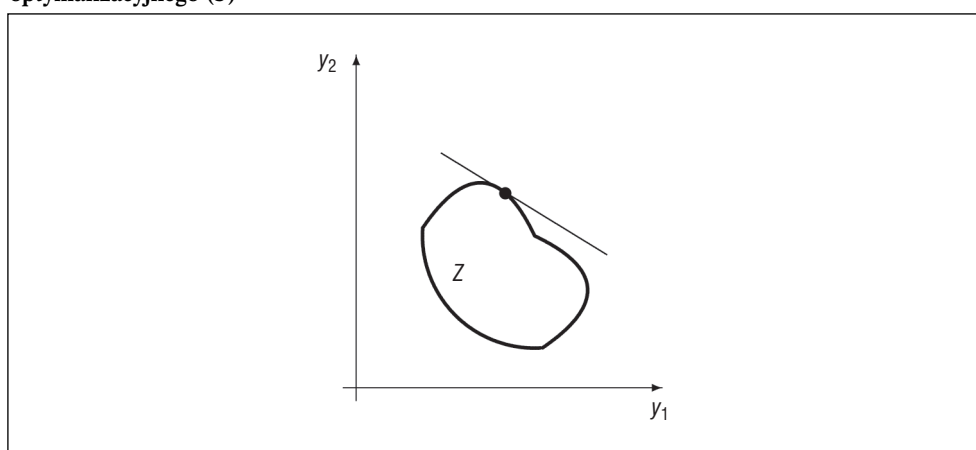
<sup>10</sup> Od strony numerycznej ułatwia to fakt, że zbiór ten, bez straty ogólności rozważań, możemy zastąpić zbiorem ograniczonym, nakładając warunek  $\sum \lambda_i = 1$ .

## KILKA UWAG O KOMPUTEROWYM WSPOMAGANIU...

problemu optymalizacyjnego (4)) niż dla oceny  $y'$ . Wektory, dla których wartościowanie to jest przeciwne, są przez ten warunek „odcinane”. Kolejne warunki dla kolejnych porównywanych par ocen zawężają zbiór wektorów  $\lambda$  do takich, które zachowują ujawnione przez decydenta preferencje (w sensie zagregowanego wartościowania ocen parami).

Przedstawiony powyżej mechanizm redukcowania zbioru wag jest jednocześnie sposobem opisu ujawnionych preferencji decydenta. Jest on także źródłem naturalnej miary zbieżności oraz reguły zatrzymania dla interaktywnych procesów decyzyjnych. Istotnie, zbieżność może być mierzona za pomocą współczynnika redukcji „objętości” zbioru dopuszczalnych wag. Przeszukiwanie zbioru ocen może zostać zakończone (choć decydent może zdecydować o jego zakończeniu w dowolnym momencie), gdy zbiór dopuszczalnych wag jest na tyle mały, że różnice pomiędzy ocenami wyznaczonymi z wagami z tego zbioru stają się nieistotne. Inne zwyczajowe stosowane reguły zatrzymania, takie jak limit czasu lub limit interakcji, mają charakter czysto techniczny.

**Rysunek 3. Interpretacja wyznaczania ocen właściwie efektywnych za pomocą problemu optymalizacyjnego (3)**

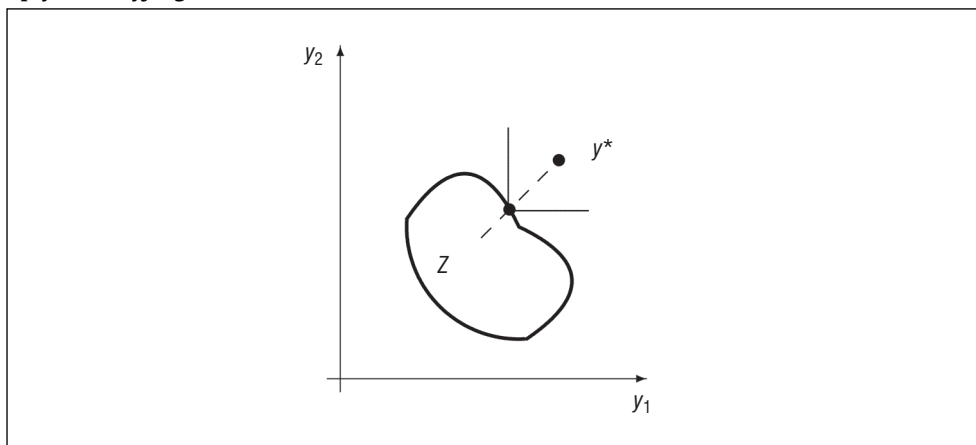


Ze względu na powyżej wymienione własności przypisujemy duże znaczenie idei redukcowania zbioru wag. Warto zauważyć, że miara zbieżności i związana z nią reguła zatrzymania oparte na tej idei działają bez przyjmowania żadnych założeń o postaci modelu (2).

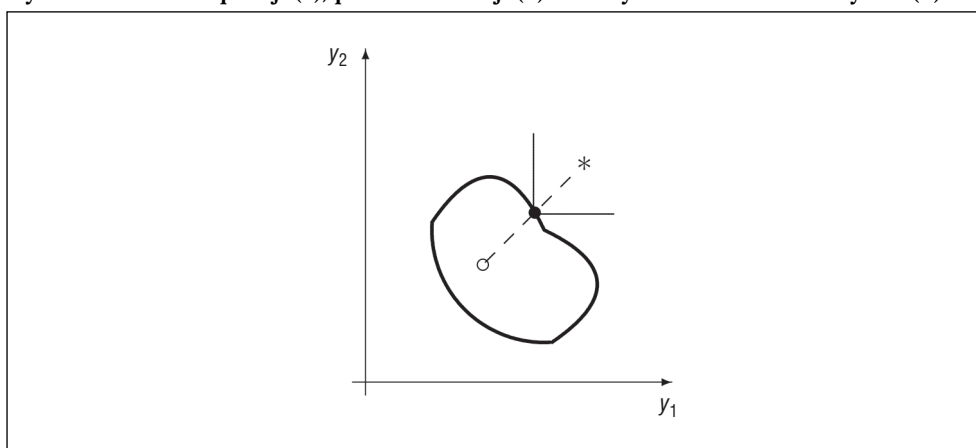
W klasie metod punktu referencyjnego<sup>11</sup> (Wierzbicki 1999) decydent wyraża swoje preferencje za pomocą wskazania pary elementów referencyjnych należących do

<sup>11</sup> Dla jasności prezentacji przedstawiamy tutaj tylko tzw. schemat rozszerzony metody punktu referencyjnego, pomijając schemat standardowy, gdyż ten ostatni charakteryzuje się mniejszą swobodą wyrażania preferencji; pełną dyskusję można znaleźć w Kaliszewski 2006a, 2008.

Ignacy Kaliszewski

**Rysunek 4. Interpretacja wyznaczania ocen słabo efektywnych za pomocą problemu optymalizacyjnego (4)**

$R^k$ , a mianowicie punktu  $y^{res}$ , nazywanego *punktem rezerwacji*, oraz punkt  $y^{asp}$  (takiego, że  $y_i^{res} \leq y_i^{asp}, i = 1, \dots, k$ ), nazywanego *punktem aspiracji*. Jest rzeczą naturalną (ale nie konieczną) zakładać, że  $y^{res} \in Z$  i  $y^{asp} \notin Z$ . Dla danych punktów rezerwacji i aspiracji można skonstruować *funkcję osiągnięcia* (np. funkcję  $\max_i \lambda_i (y_i^{asp} - y_i)$ ) będącą modyfikacją funkcji występującej w problemie (4) taką, że ocena  $y$  minimalizująca tę funkcję na zbiorze  $Z$  jest, po pierwsze – oceną efektywną, po drugie – oceną najbardziej „odległą” od punktu rezerwacji i jednocześnie oceną „najbliższą” punktowi aspiracji. Przedstawia to schematycznie rysunek 5.

**Rysunek 5. Punkt aspiracji (\*), punkt rezerwacji (o) oraz wyznaczona ocena efektywna (\*)**

## KILKA UWAG O KOMPUTEROWYM WSPOMAGANIU...

Klasa metod wagowych i klasa metod punktu referencyjnego reprezentują dwa całkowicie różne sposoby pozyskiwania informacji od decydenta. W klasie metod wagowych preferencje są wyrażane w formie wskazanych wag wybranych ze zbioru wag dopuszczalnych. Ten sposób wyrażania preferencji określamy jako *atomistyczny*, gdyż odwołuje się do informacji szczegółowej. W klasie metod punktu referencyjnego preferencje są wyrażane w formie wskazanych elementów wybranych z przestrzeni ocen. Ten sposób wyrażania preferencji określamy jako *holistyczny*, gdyż odwołuje się do informacji zagregowanej.

W klasie metod wagowych wybór w każdej iteracji wektora wag  $\lambda$  sprowadza się w istocie do wskazania półprostej. Ta półprosta ma początek w  $y^*$  i zawiera wierzchołki warstwic funkcji celu problemu optymalizacyjnego (4) (por. rysunek 4). Zatem półprosta ta ma postać

$$\{y | y = y^* - t\tau, t \geq 0\},$$

dla pewnego kierunku (wektora)  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_k)$ , gdzie  $\tau_i = (\lambda_i)^{-1}$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

Zatem w klasie metod wagowych elementami determinującymi przebieg procesu decyzyjnego są: element  $y^*$  (ustalony) i kierunek  $\tau$  (do wyboru).

Także w metodzie punktu referencyjnego decydent, wskazując w każdej iteracji punkt rezerwacji  $y^{res}$  i punkt aspiracji  $y^{asp}$ ,  $y_i^{res} \leq y_i^{asp}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , wskazuje wektor  $y^{asp} - y^{res}$ , co sprowadza się w istocie do wskazania półprostej. Ta półprosta ma początek w  $y^{asp}$  i jeżeli funkcja osiągnięcia ma postać  $\max_i \lambda_i (y_i^* - y_i)$ , to zawiera wierzchołki warstwic tej funkcji (por. rysunek 4). Zatem półprosta ta ma postać

$$\{y | y = y^{asp} - t\tau\},$$

gdzie  $t \leq 0$ , jeżeli  $y^{asp} \in Z$ , i  $t \geq 0$ , jeżeli  $y^{asp} \notin Z$ , dla pewnego kierunku (wektora)  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_k)$ .

Zatem w metodzie punktu referencyjnego elementami determinującymi przebieg procesu decyzyjnego są: element  $y^{res}$  (do wyboru) i element  $y^{asp}$  (do wyboru).

Z powyższych rozważań wynika, że chociaż klasa metod wagowych i klasa metod punktu referencyjnego reprezentują dwa całkowicie różne sposoby pozyskiwania informacji od decydenta, technicznie są one bardzo do siebie zbliżone. Istotnie, w każdej z metod należących do tych dwóch klas, aby przejść do kolejnej iteracji, tzn. aby wyznaczyć kolejną ocenę efektywną, należy wskazać dwa obiekty: albo dwa elementy przestrzeni  $R^k$  (jak w przypadku klasy metod punktu referencyjnego), albo kierunek i element przestrzeni  $R^k$  (jak w przypadku klasy metod wagowych). W terminach tech-

nicznych sprowadza się to w każdym przypadku do określenia kierunku i elementu przestrzeni, ponieważ dwa elementy przestrzeni w sposób jednoznaczny definiują w tej przestrzeni kierunek.

Idąc dalej, możemy uczynić klasę metod wagowych i klasę metod punktu referencyjnego równoważnymi w kategoriach technicznych, przyjmując dla tej drugiej klasy następujące ograniczenie. Załóżmy, że  $y^{asp} = y^*$ , tj. punkty aspiracji są we wszystkich iteracjach ustalone, a decydent może zmieniać jedynie punkty rezerwacji. Łatwo zauważyć, że takie ograniczenie nie ogranicza możliwych wyborów ocen efektywnych.

Interpretacja wyrażania preferencji decydenta w terminach „punkt utopijny plus kierunek” ma także metodyczne zalety. Mianowicie, w takim przypadku preferencje decydenta wyrażają się w terminach proporcji ustępstw koniecznych dla odejścia od elementu utopijnego  $\hat{y}$  (w rzeczywistości od elementu  $y^*$ , lecz rozróżnienie to jest natury czysto technicznej), aby osiągnąć ocenę efektywną. W sposób naturalny pojawia się tu pojęcie *kierunku ustępstw* (Kaliszewski 2006ab, 2008). I jeżeli rzeczywiście, tak jak to zakłada się w teorii perspektywy (Kahneman, Tversky 1979), decydent z reguły przywiązuje większą wagę do potencjalnych strat niż do potencjalnych korzyści, wyrażanie preferencji poprzez kierunek ustępstw może stanowić dla niego właściwe ramy dla wyrażenia swoich preferencji. Co więcej, ponieważ istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy wektorami  $\tau$  i wektorami  $\lambda$  ( $\tau_i = (\lambda_i)^{-1}$ ,  $i = 1, \dots, k$ ), por. Kaliszewski 2004, 2006ab, 2008), zatem mechanizm pozyskiwania preferencji w obu klasach metod może być łatwo przedstawiony wyłącznie w oparciu o pojęcie kierunku ustępstw.

**Paradygmat 3.** *Praktyczne problemy decyzyjne mają nietrywialne rozmiary<sup>12</sup> oraz zmieniają się w czasie uwarunkowania, co wyklucza możliwość sprawnego prowadzenia procesu decyzyjnego przez decydenta bez komputerowego wspomaganie.*

Powyższe stwierdzenie nie wymaga żadnego uzasadnienia, jeżeli przywołamy tu takie praktyczne problemy decyzyjne, jak sterowanie systemem wodnym, zarządzanie przedsiębiorstwem, czy monitorowanie zanieczyszczeń.

Aby przybliżyć czterofazowy schemat Simona do praktyki, należałoby w nim wyróżnić w sposób jawny oś czasu. Dynamika problemu w czasie ma swoje źródło zarówno w zmienności otoczenia w czasie (otoczenie może się zmieniać w trakcie procesu decyzyjnego), jak i w powtarzalności tego procesu. W tym kontekście potrzeba wykorzystania możliwości komputerów dla zbierania, przechowywania i przetwarzania danych staje się bezdyskusyjna.

<sup>12</sup> Pojęcie rozmiaru problemu decyzyjnego odnosi się do „rozległości” zastosowanego modelu formalnego.

## KILKA UWAG O KOMPUTEROWYM WSPOMAGANIU...

**Paradygmat 4.** *Wykorzystywanie w systemach komputerowego wspomaganie decyzyjnego metod (pakietów) optymalizacyjnych wyklucza ich szerokie upowszechnienie.*

Jak już stwierdziliśmy wcześniej, interaktywne metody WPD stosowane do złożonych problemów decyzyjnych używają metod optymalizacyjnych dla wyznaczania ocen efektywnych. Należy sądzić, że jest to główną przeszkodą dla szerokiego ich upowszechnienia. Korzystanie z metod optymalizacyjnych wymaga pewnej wiedzy i doświadczenia. Osobom nie będącym specjalistami w tym zakresie towarzyszy stała obawa: *czy ciągi cyfr, które otrzymuję z pakietu optymalizacyjnego niosą istotną informację?* Wsparcie ze strony specjalisty-analityka z zakresu metod podejmowania decyzji i metod optymalizacyjnych może być znaczącą pomocą, jednak z pewnością nie wszyscy decydenci chcą ujawniać zakres swoich umiejętności analitycznych (lub ich brak) nawet tylko zobowiązanym do zachowania dyskrecji konsultantom. Proces decyzyjny, w całej swej złożoności („próby i błędy”, „postępy w uczeniu” w kolejnych iteracjach), jest bardzo często postrzegany jako rzecz intymna.

Standardowym postępowaniem w każdej interaktywnej metodzie WPD jest wyznaczenie na każdej iteracji co najmniej jednej oceny efektywnej w celu jej wartościowania przez decydenta. Alternatywnym podejściem, bazującym na koncepcji obliczeń przybliżonych, byłoby wyznaczanie jedynie oszacowań współrzędnych ocen efektywnych.

**Paradygmat 5.** *W zastosowaniach praktycznych oceny efektywne mogą być wyznaczane w sposób przybliżony.*

W praktyce problemy decyzyjne są rozwiązywane dla danych, które są oszacowaniami lub zaokrągleniami. Z tego powodu obliczenia dokładne (w sensie: z maksymalną możliwą precyzją) mają ograniczoną użyteczność. Zatem idea wykorzystania oszacowań jest czymś zupełnie naturalnym, pod warunkiem, że będzie istniał mechanizm kontrolowania dokładności tych oszacowań i dostosowywania jej do potrzeb konkretnego kontekstu decyzyjnego.

Parę oszacowań parametrycznych, oszacowanie od dołu  $L(\tau)$  i oszacowanie od góry  $U(\tau)$ , obliczonych dla *niejawnej oceny* efektywnej  $y(\tau)$  (tj. oceny, która byłaby wyznaczona, gdyby rozwiązany został problem optymalizacyjny (4) z wektorem  $\lambda$ , gdzie  $\lambda_i = (\tau_i)^{-1}$ ,  $i = 1, \dots, k$ ), będziemy przyjmować za jej *przybliżenie*,  $[y(\tau)] = \{L(\tau), U(\tau)\}$ , w tym sensie, że

$$L(\tau) \leq y(\tau) \leq U(\tau). \quad (5)$$

Parametrem oszacowań  $L(\tau)$ ,  $U(\tau)$ , jest kierunek ustępstw  $\tau$ .

Koncepcja takich oszacowań została opracowana w Kaliszewski (2004, 2006a, 2008), gdzie wyprowadzono odpowiednie formuły. Koncepcja opiera się na założeniu, że

przed rozpoczęciem interakcji decydent-model wyznaczony zostaje pewien skończony podzbiór  $S$  zbioru Pareto, zwany *szkieletem*. Wówczas dla każdego kierunku ustępstw  $\tau$  przybliżenie niejawnej oceny  $y(\tau)$  ma postać

$$L(S, \tau) \leq y(\tau) \leq U(S, \tau),$$

a współrzędne oszacowań dane są wzorami

$$L(S, \tau)_i = \max\{y_i^* - \tau \max_{y \in S} [\max_j (\tau_j)^{-1} (y_j^* - y_j)], \bar{L}_i\}, i = 1, \dots, k, \quad (6)$$

$$U(S, \tau)_i = \min\{\min_{\bar{y} \in S} \{\min_{l \in I(\tau)} (y_l^* - \bar{\lambda}(\bar{y})_l^{-1})\}, \bar{U}_i\}, i = 1, \dots, k, \quad (7)$$

gdzie  $S$  jest szkieletem,  $\bar{\lambda}(\bar{y})$  jest wektorem wag, dla którego element  $\bar{y}$  szkieletu  $S$  został wyznaczony poprzez rozwiązanie zadania optymalizacyjnego (4)<sup>13</sup>, natomiast  $\bar{L}_i, \bar{U}_i$  spełniają warunki: dla każdego  $y \in Z$  zachodzi  $\bar{L}_i \leq y_i \leq \bar{U}_i, i = 1, \dots, k$ .

Na podstawie przybliżenia  $[y(\tau)]$  decydent ocenia, czy niejawna ocena efektywna  $y(\tau)$  jest dla niego potencjalnie interesująca. Jeżeli ta ocena nie jest potencjalnie interesująca, to nie musi być ona wyznaczona jawnie, co prowadzi do oszczędności czasu i obliczeń optymalizacyjnych. Jeżeli to ocena jest potencjalnie interesująca dla decydenta, to ma on ciągle dwie możliwości. Pierwsza możliwość to wyznaczenie oceny w sposób jawny i przeprowadzenie jej wartościowania względem innych ocen (jawnych bądź niejawnych). Druga możliwość, to przeprowadzenie wartościowania przybliżenia oceny  $[y(\tau)]$  zamiast samej oceny, co ponownie prowadzi do oszczędności czasu i obliczeń optymalizacyjnych. W skrajnym scenariuszu jawne wyznaczanie (a w konsekwencji konieczność stosowania metod optymalizacyjnych) ocen może być w ogóle wyeliminowane z procesu decyzyjnego i mieć miejsce tylko na etapie wyznaczania szkieletu gwarantującego zadaną z góry dokładność obliczeń. „Społeczny podział pracy”, gdzie specjaliści od obliczeń numerycznych wyznaczają szkielet, a decydent skupia się wyłącznie na procesie decyzyjnym, znalazłby tutaj pełne zastosowanie. W sytuacji, gdy obliczenia przybliżeń ocen efektywnych poprzez oszacowania (6) i (7) mogą być zrealizowane na przykład w arkuszu kalkulacyjnym, komputer przenośny wyposażony w standardowe oprogramowanie biurowe staje się wystarczającym narzędziem dla decydenta, nawet w przypadku problemów o bardzo dużych rozmiarach.

<sup>13</sup> Sposób wyznaczania zbioru indeksów  $I = (\tau)$  we wzorze (7) podany jest w Kaliszewski (2004, 2006a, 2008) i sprowadza się do weryfikacji prostych warunków na elementach szkieletu  $S$ .

## KILKA UWAG O KOMPUTEROWYM WSPOMAGANIU...

**Paradygmat 6.** *W procesie decyzyjnym różne fragmenty zbioru Pareto analizowane są z różną, a także zmienną dokładnością.*

Schemat interaktywny pozwala decydentowi rozpoznawać problem decyzyjny w miarę kolejnych iteracji z coraz większą dokładnością i koncentrować się na tych regionach zbioru Pareto, które mogą zawierać ocenę najbardziej preferowaną. Ta zasada pozwala również na iteracyjne wyznaczanie szkieletów gwarantujących coraz większą dokładność przybliżeń ocen dla coraz mniejszych regionów zbioru Pareto, eliminując konieczność wyznaczenia szkieletu o dużej liczności elementów efektywnych już na samym początku procesu decyzyjnego. Jednak i w tym przypadku wyznaczanie szkieletów może być prowadzone w „tle”, poza procesem decyzyjnym.

## 5. Podsumowanie

Konieczność stosowania metod optymalizacyjnych stanowi barierę szerokiego upowszechnienia interakcyjnych metod wielokryterialnego podejmowania decyzji. Możliwość wykorzystania parametrycznych przybliżeń  $[y(\tau)]$  w procesie decyzyjnym, sterowanym kierunkiem ustępstw  $\tau$ , w dużym stopniu redukuje tę barierę.

Z drugiej strony możliwość interpretowania i określania kierunku ustępstw  $\tau$  w terminologii wag bądź punktów referencyjnych pozwala zachować cały aparat metodyczny związany z metodami wykorzystującymi te pojęcia i zgromadzone doświadczenie praktyczne z ich stosowania.

Próbując wskazać kierunki dalszych badań, które mogą przybliżyć szersze zastosowanie komputerowo wspomaganego wielokryterialnego podejmowania decyzji w praktyce, można sformułować tezę o wyczerpywaniu się potencjału metod optymalizacyjnych w rozwiązywaniu coraz to większych i coraz bardziej złożonych problemów decyzyjnych. Niezależnie od spektakularnych osiągnięć metod optymalizacji dla specyficznych klas problemów (np. opartych o model liniowy) dalsze przesuwanie granic wielkości i złożoności rozwiązywanych problemów decyzyjnych będzie możliwe raczej jako wynik zarówno wzrostu mocy obliczeniowych komputerów jak i upowszechnienia metod heurystycznych (a więc z zasady przybliżonych) realizowanych w oparciu o różne postacie tzw. obliczeń ewolucyjnych. Nie bez znaczenia jest tutaj także fakt, że ideowa prostota takich metod pozwala na ich łatwą komputerową realizację, co może powodować, że będzie to rozwiązanie nie tylko bardziej pojęciowo dostępne dla szerokiego spektrum decydentów, ale i tańsze w porównaniu z zakupem komercyjnego pakietu optymalizacyjnego.



## 6. Dodatek

**Definicja 1.** Ocena  $\bar{y} \in Z$  jest:

- słabo efektywna, jeżeli nie istnieje  $y, y \in Z$  takie, że  $y_i > \bar{y}_i, i = 1, \dots, k$ ,
- właściwie efektywna (Geoffrion 1968), jeżeli jest efektywna i istnieje liczba  $M > 0$  taka, że dla każdego  $i$  zachodzi

$$\frac{y_i - \bar{y}_i}{\bar{y}_j - y_j} \leq M$$

dla pewnego  $j$  takiego, że  $y_j < \bar{y}_j$ , o ile  $y \in Z$  i  $y_i > \bar{y}_i$ .

### Bibliografia

- Achilles, A., Karl-Heinz Elster, Reinhard Neshe. 1979. *Bibliographie zur Vektoroptimierung (Theorie und Anwendungen)*. „Mathematische Operationsforschung und Statistik, ser. Optimization” 10: 277-321.
- Dell, Robert F., Mark H. Karwan. 1990. *An interactive MCDM weight space reduction method utilizing a Tchebycheff utility function*. „Naval Research Logistics” 37: 263-277.
- Ehrgott, Matthias. 2005. *Multicriteria Optimization*. Berlin: Springer.
- Elton, Edwin J., Martin J. Gruber, Stephen J. Brown, William N. Goetzmann. 2003. *Modern portfolio theory and investment analysis*. New York: John Wiley & Sons.
- Kahneman, Amos, David Tversky. 1979. *Prospect theory of decisions under risk*. „Econometrica”, 47 (2): 263-291.
- Kaliszewski, Ignacy. 2004. *Out of the mist – towards decision-maker-friendly multiple criteria decision making support*. „European Journal of Operational Research”, 158 (2): 293-307.
- Kaliszewski, Ignacy. 2006a. *Soft computing for complex multiple criteria decision making*, Springer.
- Kaliszewski, Ignacy. 2006b. *Multiple Criteria Decision Making: selecting variants along compromise lines*. „Techniki Komputerowe” 1: 49-66.
- Kaliszewski, Ignacy. 2008. *Wielokryterialne podejmowanie decyzji, obliczenia miękkie dla złożonych problemów decyzyjnych*, Warszawa: WNT, (tłumaczenie *Soft computing for complex multiple criteria decision making*).
- Kuhn, Harold W., Albert W. Tucker. 1951. *Nonlinear programming*. W: „Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematics, Statistics, and Probability”, J. Neyman (red.), Berkeley: University of California Press, s. 481-492.
- Lissowski, Grzegorz. 2007. *Paradoksy liberalizmu i federalizmu*. „Decyzje” 7: 5-27.

## KILKA UWAG O KOMPUTEROWYM WSPOMAGANIU...

- Kuc, Marta. 2007. *Respektowanie praw indywidualnych a optymalność*. „Decyzje”, 7, 29-62.
- Levy, Moshe, Haim Levy. 2002. *Prospect theory: much ado about nothing?* „Management Science”, 48 (10): 1334-1349.
- Markowitz, Harry M. 1991. *Portfolio selection: efficient diversification of investments*. John Wiley & Sons, New York.
- Miettinen, Kaisa M. 1999. *Nonlinear multiobjective optimization*. Boston: Kluwer Academic Publishers.
- von Neuman, John, Oscar Morgenstern. 1947. *Theory of games and economic behavior*. Princeton, N. J: Princeton University Press.
- Pareto, Vilfredo. 1906. *Manuale di Economia Politica*. Milano: Societa Editrice Libraria.
- Pareto, Vilfredo. 1971. *Manual of Political Economy*. Ann S. Schwier (tłum.). New York: Macmillan, 1971.
- Simon, Herbert A. 1977. *The new science of management decision*. New Jersey: Prentice-Hall.
- Steuer, Ralph E. 1986. *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Application*. New York: John Wiley & Sons.
- Wierzbicki, Andrzej P. 1999. *Reference point approaches*. W: T. Gal, Th. Stewart, Th. Hanne (red.). „Multicriteria Decision Making – Advances in MCDM: Models, Algorithms, Theory and Applications”. Boston: Kluwer Academic Publishers.
- Zionts, Stanley, Jirki Walenius. 1983. *An interactive multiple objective linear programming method for a class of underlying nonlinear value functions*. „Management Science” 29: 519-529.
- Yu, Po-Lung, George Leitman. 1974. *Compromise solutions, domination structures and Salukvadze's solution*. „Journal of Optimization Theory and Applications” 14: 362-378.