JAK PRZECHYTRZYĆ NIEPEWNOŚĆ

F. Thomas Bruss *
Universite Libré de Bruxelles

Jeśli masz do wyboru dwie możliwości i nie wiesz, która z nich będzie korzystniejsza, wydaje się, że można jedynie zdać się na los szczęścia i o wyborze zdecydować rzucając monetą. Okazuje się jednak, że można postąpić rozsądniej. Jak? O tym właśnie jest ten artykuł.

1. Jak korzystnie sprzedać dom

Wyobraźmy sobie, że chcesz sprzedać dom. Twoje ogłoszenie „Sprzedam dom w atrakcyjnej dzielnicy Wrocławia. Oferty powyżej 300 000 zł" od wielu tygodni pojawia się w gazecie. Termin zgłaszania ofert upływa w najbliższą niedzielę.

Dwoje potencjalnych nabywców deklaruje zdecydowaną chęć kupna domu. Pan Kowalski z Warszawy stwierdza w rozmowie telefonicznej, że jest skłonny dać za dom powyżej 300 tysięcy, ale przed złożeniem ostatecznej oferty chce jeszcze raz obejrzeć dom w najbliższą sobotę. Pani DeGroot dzwoni z Brukseli i mówi to samo, z tą różnicą, że chce przyjechać na sfinalizowanie transakcji w najbliższą niedzielę. Oboje domagają się, by transakcja została ostatecznie zawarta na zakończenie ich wizyty.

Chciałbyś dowiedzieć się czegoś więcej o potencjalnych nabywcach! Gdyby choć wiedzieć, ile pan Kowalski i pani DeGroot są skłonni zapłacić! Próba uzyskania takiej informacji od każdego z nich przez telefon kończy się śmiechem w słuchawce i stwierdzeniem: „Proszę mi pozwolić obejrzeć dom raz jeszcze". Prawdziwi ludzie interesu! Sprawdziłeś już, że oboje są poważnymi kontrahentami i posiadają dostateczne środki. To jednak nadal

---

* F. Thomas Bruss, Departement de Mathematique, Universite Libré de Bruxelles
Campus Plaine, CP 210, B-1050 Bruxelles, email: tbruss@ulb.ac.be

nie umożliwia ustalenia, która z tych osób jest bardziej zainteresowana zakupem.

Przeprowadźmy dokładniejszą analizę tej sytuacji. Oczywiście będziesz miał okazję raz jeszcze zaprezentować zalety sprzedawanego domu. Jednak to nie rozwiąże dylematu wyboru kupca. Jeśli przyjmiesz ofertę pana Kowalskiego, nie dostaniesz oferty od pani DeGroot. Jeśli będziesz czekać na ofertę pani DeGroot, stracisz kupca w osobie pana Kowalskiego. To wygląda jak czysty hazard: stracisz lepszą z ofert z prawdopodobieństwem 1/2.

Przychodzą Ci do głowy jeszcze inne myśli. Warszawa... Bruksela... Jest mało prawdopodobne, że pan Kowalski i pani DeGroot znają się. Czy nie dałoby się podbić ceny opowiadając każdemu z kontrahentów, jak bardzo zainteresowany kupnem jest drugi? Może spróbować najpierw z panem Kowalskim? Ale nie, to nie ma sensu; ludzie pokroju pana Kowalskiego raczej nie ulegają takim sugestiom – mogą one wywrzeć wręcz przeciwny skutek. Może więc spróbować z panią DeGroot? Wtedy jednak, gdy pani DeGroot przyjedzie na oględziny domu, pan Kowalski będzie już wyłączony z gry i nie będzie mógł służyć jako środek nacisku.

Koniec końców dochodzisz do tego samego wniosku co poprzednio: możesz równie dobrze rzucić monetą w celu podjęcia decyzji. Może lepiej po prostu zrobić interes z panem Kowalskim: przynajmniej będziesz mieć wolną niedzielę!

Różne odmiany tej sytuacji nie są rzadkie w życiu. Oferta specjalna w supermarkecie, ładne mieszkanie, atrakcyjna praca czy nawet spotkany partner na całe życie: często musimy decydować nie wiedząc o tym, czy w przyszłości nie trafi się jeszcze lepsza możliwość.

Dla przejrzystości i ułatwienia analizy przedstawimy problem w postaci abstrakcyjnej, prostej gry.

Poprośmy syna i córkę, aby każde w tajemnicy przed drugim i bez konsultacji między sobą wybrało i napisało na kartce dowolną liczbę (dowolną, czyli jaką tylko zechcą: dużą, małą, ułamek dziesiętny, ujemną – wszystko jest dozwolone). Potem niech położą kartki na stole tak, by nie było widać napisanych liczb. Następnie bierzemy kartkę syna, odczytujemy liczbę i decydujemy, czy ją akceptujemy. Jeśli ją odrzucamy, oznacza to automatycznie zaakceptowanie liczby wybranej przez córkę. Porównujemy obie liczby. Jeśli wybrałeś większą, to wygrałeś, a jeśli mniejszą – przegrałeś.

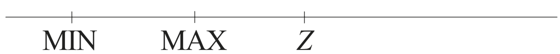
Różnica między liczbami nie ma znaczenia, chcesz po prostu wygrać. Jeśli liczby na obu kartkach są identyczne, to gra zostaje powtórzona, jednakże ta sytuacja jest mało prawdopodobna. Jeżeli uważasz, że znasz dobrze swoje dzieci i to może zwiększyć twoją szansę wygranej, wyobraź sobie zastąpienie ich innymi osobami; może też jedna osoba wybierać obie liczby.

Wygląda na to, iż mamy do czynienia z całkowicie losową grą z prawdopodobieństwem wygranej równym 1/2. Jednak okazuje się, że tu mamy niespodziankę: istnieje strategia zwiększająca prawdopodobieństwo Twojej wygranej powyżej 1/2. Opiera się ta strategia na pomyśle prof. Thomasa Covera [3] z uniwersytetu Stanforda. Oto ona:

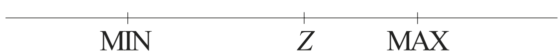
Niech *X* i *Y* będą różnymi liczbami zapisanymi na kartkach. Wybieramy sobie – całkiem dowolną – liczbę *Z*, po czym odkrywamy kartkę syna i odczytujemy *X*. Jeżeli *X > Z, to* wybieramy *X;* w przeciwnym razie wybieramy *Y,* liczbę zapisaną przez córkę.

Dlaczego ta dziwna strategia miałaby być lepsza niż wybór *X* lub *Y* losowo, np. w zależności od wyniku rzutu monetą? Oznaczmy przez MIN = min$\{X, Y\}$ mniejszą, a przez MAX = max$\{X, Y\}$ większą z dwóch liczb wypisanych na kartkach. Są trzy możliwości:

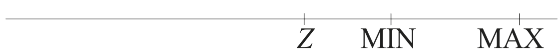
(A) obie liczby *X* i *Y* są nie większe od wybranej liczby *Z;*



(B) *Z* leży między *X* a *Y* (być może pokrywając się z mniejszą z nich);



(C) obie liczby *X* i *Y* są większe niż *Z.*



Zgodnie z opisaną strategią wybierasz *X* w przypadku (A) i *Y* w przypadku (C). W obu tych sytuacjach rozstrzygnięcie jest losowe – dostajesz większą z liczb z prawdopodobieństwem 1/2. Jednak w przypadku (B) Twoja wygrana jest *pewna.* W tym przypadku bowiem wybierasz liczbę *X* wtedy, gdy jest ona większa niż *Y,* a odrzucasz, gdy jest mniejsza.

Całkowite prawdopodobieństwo Twojej wygranej jest zatem równe

$$P_w = \frac{a}{2} + \frac{c}{2} + b,$$

gdzie a, b, c są (nieznanymi) prawdopodobieństwami zdarzeń opisanych w punktach, odpowiednio, (A), (B) i (C). Któreś z tych zdarzeń musi zajść, a zatem $a + b + c = 1$. Wobec tego

$$P_w = \frac{a+b+c}{2} + \frac{b}{2} = \frac{1}{2} + \frac{b}{2}.$$

Zatem przy tej strategii prawdopodobieństwo Twojej wygranej przewyższa losową szansę wygranej o $\frac{b}{2} > 0$.

(Uwaga: dokładniej mówiąc, wystarczy wybrać Z z dowolną gęstością dodatnią na całej prostej).

Jak postąpić, aby szansa wygranej przy tej strategii była jak największa? Oczywiście należy dążyć do tego, by jak największe było prawdopodobieństwo sytuacji (B). Powinniśmy zatem wybierać liczbę Z tak, by wpadała pomiędzy X a Y z jak największym prawdopodobieństwem. Ponieważ jednak X i Y nie są znane, nie można podać ogólnej recepty, jak to osiągnąć. W konkretnych przypadkach jednak można znaleźć sposób na wyznaczenie „dobrej” liczby Z.

2. Optymalny wybór progu

Nasz problem sprzedaży domu jest właśnie takim szczególnym przypadkiem. Na pierwszej kartce jest oferta pana Kowalskiego, na którą musimy odpowiedzieć „tak” lub „nie” nie wiedząc jeszcze, jaką liczbę napisała na swojej kartce pani DeGroot. Różnice w stosunku do gry z zapisywaniem liczb są dwie: po pierwsze – wiemy, że oboje oferenci podali ceny wyższe od 300 000 zł, a po drugie – wielkość $|X - Y|$ jest teraz rzeczywistą wypłatą. Tu już nie chodzi tylko o to, żeby wygrać.

Oferta 350 000 zł lub więcej byłaby pożądana, ale jest mało prawdopodobna. Z drugiej strony jeśli przyjmiemy ofertę – powiedzmy – 301 000 od pana Kowalskiego, nie odczujemy wielkiego żalu, gdy pani DeGroot zaoferuje 302 000. Nie warto zabezpieczać się przed tak niewielką relatywnie stratą. Dlatego najlepiej przyjąć liczbę Z wyraźnie powyżej 300 tysięcy, ale znowu nie za wielką.

Jeśli spytacie, jak wybrałbym konkretną wartość, odpowiem tak: wyznaczyłbym ją za pomocą rzutu zwykłą kostką do gry, dodając za każde wyrzucone oczko 5000 zł do wyjściowego progu 300 500 zł. Na przykład wyrzuciwszy trójkę wybrałbym $Z = 315\ 500$ zł. W tej metodzie wyboru Z nie ma jednak niczego szczególnego; każdy z Czytelników może mieć własne pomysły i mogą one przynieść lepszy skutek.

Dlaczego jednak w ogóle rzucam kostką? Mógłbym przecież po prostu przyjąć ustaloną wartość Z, przykładowo 320 000 zł, jeśli mam poczucie, że to mniej więcej właściwa wartość. Poza naszym rozumowaniem probabilistycznym za rzuceniem kostką przemawia jeszcze jeden argument: w tego rodzaju sytuacjach, opisywanych przez teorię gier, często jest dla nas lepiej, gdy nasza strategia nie jest przewidywalna dla innych. Gdy zachowujemy się w szablonowy, przewidywalny sposób, nasi kontrahenci mogą do niego dopasować swoje strategie. Z tego właśnie powodu wprowadzam do swej strategii element losowy.

Ile jest warta nasza strategia? Jak już widzieliśmy, bez wątpienia więcej niż losowy wybór oferenta. Nie możemy w rzeczywistości podać dokładnej wartości, ale może to doskonale być (średnio) o jakieś 10 000 zł więcej od sumy uzyskanej przy losowym wyborze kupca.

Pójdźmy o krok dalej i przyjrzyjmy się dokładniej naszej grze z wypisywaniem liczb na kartkach. Powiedzmy, że Czytelnik gra tę grę ze mną i pisze dwie liczby na dwóch kartkach, a ja wybieram jedną z nich i wygrywam, jeżeli wybiorę kartkę z większą liczbą. Chcą Państwo teraz jak najbardziej zmniejszyć prawdopodobieństwo mojej wygranej. Co należy zrobić?

Odpowiedź jest prosta: powinni Państwo wybrać dwie liczby położone bardzo blisko siebie. Jeżeli są to np. 6,123455 i 6,123456, moja przewaga wynikająca ze stosowania Z-strategii prawie znika, bo szanse na to, bym wybrał liczbę Z leżącą pomiędzy tymi dwiema, są minimalne.

W życiu rzeczy często mają się inaczej: ludzie wymyślają sobie strategie postępowania i na ogół nie powiadamiają o nich innych. Jak to zmienia sytuację?

Chcąc to sprawdzić, kilka lat temu przeprowadziłem w Vesalius College (Vrije Universiteit w Brukseli) eksperyment na wykładzie dla studentów zarządzania. Każdy ze słuchaczy otrzymał dwie kartki i miał zapisać na nich wybrane przez siebie liczby. Następnie przeszedłem po sali i zebrałem po jednej kartce od każdego. O opisanych powyżej Z-strategiach studentom nie wspominałem.

Uzyskałem 32 trafienia na 41 czy 42 studentów. Przy losowym wyborze kartek oczekiwana liczba trafień wynosi 21, a przy pewnej dozie szczęścia można spodziewać się trzech czy czterech trafień więcej. Jednak 32 trafień już nie można wytłumaczyć szczęściem i moi studenci o tym wiedzieli. Nawet dobrzy studenci byli zadziwieni tym wynikiem. Trudno zobaczyć coś, czego się nie spodziewamy. Ale Wy, drodzy Czytelnicy, już zapewne odgadliście: zastosowałem Z-strategię. I to nawet dość naiwną: wybrałem próg $Z = 0$.

Dlaczego dała ona tak dobry wynik? Sądzę, że za sprawą pewnego przygotowania gruntu pod ten eksperyment. Zrobiłem mianowicie uwagę w rodzaju „Liczby mogą być również ujemne” i chyba udało mi się zrobić wrażenie, że padła ona mimochodem. W każdym razie wielu studentów wpisało liczby ujemne – i wszyscy, którzy wpisali tylko jedną ujemną, automatycznie podarowali mi wygraną na tacy.

Ten eksperyment pokazuje, że myślenie strategiczne nie opiera się na prostych regułkach. Niektórzy głoszą, że kluczem do sukcesu w konkurencji jest zawsze zawężenie zbioru decyzji przeciwnika. To jednak nie jest prawdą. Jeśli wierzymy, że przeciwnik nie oczekuje naszej strategii, to zawężanie zbioru dostępnych mu opcji może być nierozsądne: im mniej będzie miał możliwości, tym więcej będzie myślał nad każdym wykonywanym krokiem. Wspominając w doświadczeniu ze studentami o liczbach ujemnych nie zawęziłem, lecz poszerzyłem zbiór możliwych wyborów studentów – i to prawdopodobnie pomogło rozproszyć ich uwagę.

3. Kilka słów o matematyce

Podaliśmy przykład zagadnienia z obszaru matematyki, o którym można powiedzieć, że w porównaniu z innymi „dojrzałymi” obszarami jest w fazie dzieciństwa. Obszar ten można określić „myślenie strategiczne jako część teorii prawdopodobieństwa”. Nawet na tym poziomie wiele jest w nim jeszcze problemów otwartych. Nie wiadomo na przykład, czy w naszej grze z dwiema kartkami istnieje strategia bardziej efektywna niż Z-strategie. Dowód istnienia (albo nieistnienia) takiej strategii byłby poważnym krokiem naprzód. Jednakże przy obecnym stanie wiedzy nie widać dobrego podejścia do zaatakowania tego problemu, a nawet do jego dostatecznie precyzyjnego sformułowania.

Czy to nie zdumiewające, że nikomu nie udało się znaleźć optymalnej, w ściśle matematycznym ujęciu, metody sprzedaży domu jednemu z dwojga potencjalnych nabywców? Jest tyle imponujących osiągnięć matematyki – na przykład sposoby rozwiązywania zadań optymalizacyjnych, z jakimi mają do czynienia projektanci samolotów, wysokich budynków czy zapór wodnych. W porównaniu z ich problemami nasz problem decyzyjny wydaje się śmiesznie prosty. To jednak nie jest cała prawda. Inżynierowie mają tu wielką przewagę: mogą pracować w dużym stopniu rutynowo, wykorzystując metody matematyczne dopracowywane przez kilka stuleci. Z naszym skromnym problemem sprzedaży domu jest zupełnie inaczej.

Takie kontrasty istnieją w wielu działach matematyki. Czy jest to objaw wiecznej młodości tej dyscypliny? Ja tak uważam.

Autor artykułu, prof. F. Thomas Bruss, studiował matematykę na uniwersytetach w Saarbrücken, Cambridge i Sheffield. Swoją karierę zawodową rozpoczął na stanowisku asystenta i pierwszego asystenta na Uniwersytecie w Namur (Belgia), skąd przeniósł się do Stanów Zjednoczonych. Pracował tam gościnnie jako profesor na Uniwersytecie Kalifornijskim w Santa Barbara, Uniwersytecie Stanowym w Arizonie oraz na Uniwersytecie Kalifornijskim w Los Angeles, odnosząc znaczące sukcesy naukowe. W 1990 został zatrudniony jako profesor w Vesalius College Wolnego Uniwersytetu w Brukseli. Od 1993 jest profesorem matematyki i statystyki na Wolnym Uniwersytecie w Brukseli. Jego zainteresowania badawcze w zakresie teorii prawdopodobieństwa skupiają się na twierdzeniach granicznych, procesach gałązkowych, modelach probabilistycznych oraz optymalnym zatrzymywaniu procesów stochastycznych. Jest członkiem The Institute of Mathematical Statistics oraz Feodor-Lynen-fellow Fundacji von Humboldta.

Ten artykuł jest tłumaczeniem artykułu F. T. Brussa [2] opublikowanego w *Spektrum der Wissenschaft* (niemieckiej wersji *Scientific American)* i powstałego na bazie pracy [1]. Pomysł pochodzi z badania nad problemem T. Covera [3]. Przekład angielski opublikowało Europejskie Towarzystwo Matematyczne.

Przekład i adaptacja: Krzysztof J. Szajowski, Instytut Matematyki i Informatyki, Politechnika Wrocławska, Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław. E-mail: krzysztof.szajowski@pwr.wroc.pl

Za artykuł ten oraz artykuł w *Die Welt* w 2001 Autor otrzymał drugą nagrodę w konkursie na działalność zwiększającą społeczną świadomość znaczenia matematyki *(Raising Public Awareness of Mathematics)* organizowanym przez Europejskie Towarzystwo Matematyczne. Pierwszą nagrodę w tym konkursie otrzymał prof. N. Crato z Lizbony za serię artykułów w tygodniku *Expresso,* a trzecią S. Grozdev, I. Derzhanski i I. Gendova z Bułgarii za ich artykuły w dzienniku *Dnevnik.*

Redakcja dziękuje prof. Brussowi za zgodę na polski przekład artykułu. Dziękujemy również prof. Krzysztofowi Szajowskiemu za pomysł zamieszczenia tego artykułu w „Decyzjach" i przetłumaczenie go.

Bibliografia

[1] Bruss F.T. 1998. *Unerwartete Strategien.* „Mitteilungen der Deutschen Mathematikervereinigung" 3: 6-8.

[2] Bruss F.T. 2000. *Der Ungewissheit ein Schnippchen schlagen.* „Spektrum der Wissenschaft" 6: 106-107.

[3] Cover T.M.1987. *Problem 2.5 : Pick the largest number.* „Springer Verlag". New York.

Komentarz do pracy „Jak przechytrzyć niepewność"

Marcin Malawski

Z przyjemnością zamieszczamy w *Decyzjach* artykuł prof. Brussa, wybitnego specjalisty w dziedzinie optymalnego zatrzymywania procesów losowych[1], a także – jak widzimy – utalentowanego popularyzatora nauki. Poniższy komentarz zawiera kilka uwag o tych fragmentach artykułu, które mogą być dla Czytelników niejasne lub szczególnie zaskakujące.

Z-strategia, polegająca na wyznaczeniu w myśli pewnego progu akceptacji *Z* i następnie wyborze pierwszej oferty (liczby) leżącej powyżej tego progu, to niewątpliwie niekonwencjonalny i efektowny, a zarazem prosty sposób „uszczknięcia" dla siebie w warunkach niepewności czegoś więcej niż można oczekiwać przy wyborze czysto losowym. Warto jednak pamiętać, że opisane przez Autora sytuacje, w których zaleca on użycie takich strategii, charakteryzują się bardzo ubogą wiedzą decydenta o obiektach, spośród których wybiera: w najlepszym wypadku wie on tylko tyle, że proponowane ceny muszą przekraczać 300 tysięcy złotych. Oczywiście to założenie w praktyce często jest realistyczne. Jeżeli jednak chcemy porównywać efektywność różnych *Z*-strategii czy wręcz szukać najlepszej spośród nich (optymalnego progu), musimy wiedzieć choć trochę o rozkładzie prawdopodobieństwa liczb (ofert), których się spodziewamy – np. móc ocenić szansę tego, że któraś przekroczy 340 tysięcy. Gdy zaś rozkład prawdopodobieństwa jest znany (jak to często, i zresztą nieraz dyskusyjnie, zakładają ekonomiści, np. przy modelowaniu aukcji), decydent może posłużyć się wypracowanymi przez dziesięciolecia metodami optymalizacji.

Z drugiej strony wydaje mi się, że określenie przez Autora prezentowanego działu matematyki jako „strategiczne myślenie" jest dość ostrożne. Rzeczywiście, pan Kowalski i pani DeGroot ustalając ceny, jakie zaproponują za dom, na pewno zastanowią się nad sposobem wybierania oferty przez sprzedającego, a studenci prof. Brussa zapewne też pomyśleli o tym, jak będzie on postępował przy wyborze, zanim zapisali swoje liczby na kartkach. Jednak *Z*-strategie można z powodzeniem stosować także w wielu sytuacjach, w których nie występuje strategiczna interakcja. „Oferta specjalna w supermarkecie, ładne mieszkanie, atrakcyjna praca czy nawet Ona lub On na całe życie" to nie zawsze efekt świadomego wyboru innego decydenta rozgrywającego z nami jakąś grę. Więcej: gdy musimy zdecydować o tym, czy na zaplanowaną całodzienną wycieczkę w góry pójść dziś czy jutro, a nie ma wiarygodnych prognoz pogody, też warto rozważyć użycie *Z*-strategii.

Natomiast zaskakujący być może pomysł rzucenia kostką w celu określenia progu akceptacji pochodzi wprost z teorii gier i ma uzasadnienie jedynie[2] w sytuacji interakcji strategicznej różnych podmiotów. Wielu Czytelników może się zdziwić, dlaczego Autor chcąc „przechytrzyć niepewność" przez wprowadzenie progu *Z* wprowadza następnie dodatkowy element niepewności – wynik rzutu kostką – przy ustalaniu tego progu. Przecież losując jedną z 6 strategii nie podniesiemy naszej oczekiwanej wypłaty powyżej poziomu, jaki zapewnia nam najlepsza z tych strategii. Przypuśćmy zatem, że na podstawie jakiegoś głębokiego rozumowania, odzwierciedlającego naszą szczegółową wiedzę o rynku nieruchomości, wybraliśmy sobie przy sprzedaży domu próg akceptacji $Z = 325\ 000$ zł. (Od racjonalnej osoby wręcz należy oczekiwać jak najlepszego wykorzystania całej posiadanej wiedzy przy dokonywaniu wyboru – i zresztą większość z nas stara się to robić przy podejmowaniu ważnych decyzji). Ale pan Kowalski może przecież mieć taką samą wiedzę i na tej podstawie odtworzyć nasze rozumowanie oraz wybrany przez nas próg, po czym zaoferować nam za dom 325 100 zł (być może uprzedzając przy okazji ofertę 340 tysięcy od pani DeGroot).

W tej sytuacji losowanie *zabezpiecza nas* na wypadek *przejrzenia* przez innych graczy naszego rozumowania prowadzącego do wyboru strategii: pan Kowalski może domyślać się, co nam w duszy gra (i może nawet tego, że postanowiliśmy rzucić kostką), ale nie tego, ile oczek wyrzuciliśmy. Jest to dobrze znana z teorii gier *strategia mieszana,* jaka zwłaszcza w grach ściśle konkurencyjnych – czyli takich, w których interesy graczy są dokładnie przeciwstawne – bardzo często stanowi optymalny wybór.

Teoria gier mówi także, że w grach ściśle konkurencyjnych zawężenie zbioru możliwości (strategii) przeciwnika nie może być dla nas niekorzystne, tymczasem Autor twierdzi, że zwracając uwagę studentów na liczby ujemne, czyli być może rozszerzając ich zbiór strategii, poprawił swój wynik. Tu jednak nie ma żadnej sprzeczności. W klasycznej teorii gier gracz to istota doskonale racjonalna, bezbłędnie analizująca i wykorzystująca wszystkie możliwości i wobec tego niepodatna na „odwrócenie uwagi". W życiu oczywiście zazwyczaj jest inaczej.

I być może jest ciekawiej. W szczególności wcale nie byłbym zaskoczony, gdyby ludzie bez przygotowania teoretycznego też wymyślili i stosowali w praktyce jakieś wersje *Z*-strategii. Nie musi to nawet być wynik przemyślanego wyboru: jako próg *Z* może całkiem naturalnie posłużyć nam jakiś wyznaczony przez naszą osobowość czy też przez okoliczności poziom aspiracji.

Przypisy

[1] „Zatrzymanie" procesu losowego to zaprzestanie jego obserwacji i zadowolenie się (w najprostszej wersji) ostatnią zaobserwowaną realizacją. Klasycznym zagadnieniem optymalnego zatrzymywania jest *problem sekretarki,* w którym trzeba wybrać jedną spośród zgłaszających się po kolei kandydatek do pracy i nie ma możliwości powiedzenia „oddzwonimy do pani" – każdej kandydatce trzeba od razu po rozmowie ostatecznie odpowiedzieć „tak" lub „nie". Należy tu także wybór optymalnego momentu odejścia od stołu gry.

[2] Mechanizmy losowe mają wprawdzie zastosowanie także w bardzo użytecznych technikach obliczeniowych, tzw. metodach Monte Carlo, stosowanych m.in. też w zadaniach optymalizacji. Te metody jednak nie opierają się na pojedynczym rzucie kostką. Przeciwnie: polegają one na przeprowadzeniu bardzo dużej liczby losowań w celu przybliżonego wyznaczenia rozwiązania.