

PROCEDURY PODZIAŁU ZBIORU DÓBR NIEPODZIELNYCH Z REKOMPENSATAMI PIENIĘŻNYMI

Marek Bożykowski*
Uniwersytet Warszawski

Streszczenie: Artykuł przedstawia szczegółową analizę porównawczą czterech wybranych nieprobabilistycznych procedur sprawiedliwego podziału zbioru niepodzielnych dóbr z użyciem pieniędzy: oryginalnej procedury Knastera, poprawionej procedury Knastera, procedury równych udziałów i procedury drugich najwyższych cen. Dwie ostatnie są opisane po raz pierwszy w tym artykule. Analiza dotyczy formalnych własności wymienionych metod, a konkretnie posiadania przez nie pożądaných własności: optymalności, proporcjonalności, wolności od zazdrości, słuszności, odporności na zachowania strategiczne i anonimowości. Ponadto porównane będą klasy przypadków, dla których badane procedury spełniają wybrane postulaty.

Słowa kluczowe: sprawiedliwy podział, dobra niepodzielne, procedura Knastera, poprawiona procedura Knastera, wolność od zazdrości, słuszność.

PROCEDURES OF FAIR DIVISION OF A SET OF INDIVISIBLE GOODS WITH MONEY

Abstract: The paper presents and compares four nonprobabilistic procedures of fair division of a set of indivisible goods with money: Original Knaster, Adjusted Knaster, Equal Shares and Second Prices. The last two are presented for the first time in the article. The analysis concerns the formal properties of those methods, namely: strong Pareto optimality, proportionality, envy-freeness, fairness, strategy-proofness and anonymity. Moreover, classes of situations in which those procedures meet aforementioned properties will be compared.

Keywords: fair division, indivisible goods, Knaster, Adjusted Knaster, envy-freeness, equitability.

* Marek Bożykowski, Instytut Socjologii Uniwersytetu Warszawskiego, ul. Karowa 18, 00-324 Warszawa, e-mail: bozykows@wp.pl. Autor serdecznie dziękuje anonimowym Recenzentom za bardzo cenne uwagi.

1. Wprowadzenie

Problem sprawiedliwego podziału dóbr jest zagadnieniem, które do niedawna nie było przedmiotem analiz teoretycznych. W artykule *On games of fair division* (Kuhn, 1967) autor stwierdza, że tym tematem prawie nikt się nie zajmował. Owo „prawie” zawdzięczamy polskim matematykom, których pomysły jako jedyne znalazły się w tekście Kuhna. Polscy matematycy szczególnie upodobali sobie problem podziału tortu: Hugo Steinhaus przeanalizował powszechnie znaną metodę „jeden dzieli, drugi wybiera” i zaproponował własną procedurę (za interesowanych odsyłam do opisu sylwetki Steinhausa w Nr 6 „Decyzji” z grudnia 2006 r.; w tym samym wydaniu artykuł o probabilistycznych zasadach równości Klemensa Szaniawskiego), zaś Bronisław Knaster i Stefan Banach znaleźli rozszerzenie metody „jeden dzieli, drugi wybiera” na więcej niż dwóch uczestników podziału, tworząc „metodę ostatniego pomniejszającego” (Steinhaus, 1949). Oczywiście metody te mogą być z powodzeniem stosowane do dóbr podzielnych innych niż tort.

Istnieją jednak także dobra, które w wyniku podziału zauważalnie tracą na wartości (np. samochód, obraz) lub których podział jest niemożliwy ze względu na ich naturę (np. stanowisko, tytuł). Dobra takie, nazywane niepodzielnymi, wymagają osobnych procedur alokacji między uczestników podziału. Podstawowym problemem staje się tu zapobieżenie nierówności np. w sytuacjach, gdy dóbr jest mniej niż uczestników podziału lub dobra wyraźnie różnią się wartością (np. samochód i długopis). Problem ten ma dwa podstawowe rozwiązania: loterię lub system rekompensat pieniężnych. Artykuł ten omawia procedury wykorzystujące drugie z tych rozwiązań.

Celem niniejszego artykułu jest zaprezentowanie szczegółowej analizy porównawczej czterech wybranych procedur pod kątem spełniania kilku postulowanych własności procedur sprawiedliwego podziału dóbr. Zaczniemy od wprowadzenia podstawowych pojęć. Potem przejdziemy do zdefiniowania postulatów, czyli określimy, czego należy oczekiwać od procedury podziału. Następnie opiszemy cztery procedury: oryginalną procedurę Knastera, poprawioną procedurę Knastera, procedurę równych udziałów oraz procedurę drugich najwyższych cen. W następnym podrozdziale sprawdzimy, czy powyższe procedury spełniają wybrane postulaty. Na koniec zbadamy związki między własnościami podziałów otrzymanych przy zastosowaniu poszczególnych procedur.

2. Podstawowe pojęcia

Podziałem zbioru niepodzielnych dóbr z rekompensatami pieniężnymi nazwiemy funkcję, która każde dobro przypisuje któremuś z n uczestników podziału, a ponadto wyznacza wektor rekompensat pieniężnych o n składowych i o sumie 0.

Profilem ocen wartości dóbr nazwiemy zestaw ocen wartości każdego z dzielonych dóbr przez poszczególnych uczestników podziału.

Procedurą podziału nazwiemy funkcję, która każdemu profilowi ocen wartości dóbr przypisuje podział zbioru dóbr (w tym także pieniężne wypłaty uboczne).

3. Postulowane własności procedur sprawiedliwego podziału dóbr

Aby jakaś procedura podziału mogła być uznana za sprawiedliwą, powinna ona posiadać pewne pożądane własności (tj. spełniać pewne postulaty). Niniejszy artykuł skupia się na sześciu takich własnościach. Cztery pierwsze dotyczą podziałów generowanych przez procedurę, a dwie kolejne – samej procedury.

Optymalność (*strong Pareto optimality*) – inaczej efektywność; podział spełnia ten postulat, jeśli nie istnieje taki inny podział, który byłby lepszy (bardziej preferowany) co najmniej dla jednego uczestnika i jednocześnie nie gorszy dla wszystkich uczestników podziału.

Postulat ten gwarantuje, że nie będzie takiej pary uczestników, która chciałaby się wymienić częścią otrzymanego udziału – ze spełnienia postulatowi wynika, że jeśli taka zamiana byłaby korzystna dla jednego z nich, to byłaby niekorzystna dla drugiego.

Procedurę generującą wyłącznie podziały optymalne nazwiemy *optymalną*.

Proporcjonalność (*proportionality*) – podział spełnia ten postulat, jeśli każdy z uczestników podziału ocenia otrzymaną część jako wartą co najmniej $1/n$ wartości całego dzielonego zbioru dóbr. Jest to definicja odbiegająca od naturalnego użycia słowa „proporcjonalność”, jednak przyjęta w literaturze przedmiotu.

Postulat ten gwarantuje, że każdy z uczestników otrzyma co najmniej swój sprawiedliwy udział (rozumiany wg definicji Knastera, por. rozdział 4). Jeżeli uczestnicy podziału niejednakowo oceniają wartość dzielonych dóbr, może się zdarzyć, że każdy uczestnik otrzyma udział, który oceni na więcej niż $1/n$.

Procedurę generującą wyłącznie podziały proporcjonalne nazwiemy *proporcjonalną*.

Brak zazdrości (*envy-freeness*) – podział spełnia ten postulat, jeśli każdy z uczestników podziału ocenia otrzymaną część jako wartą co najmniej tyle, co część każdego z pozostałych uczestników. Innymi słowy, nie odniósłby żadnej korzyści, zamieniając otrzymaną część na część otrzymaną przez innego uczestnika podziału.

Role tego postulatu jest m.in. zapewnienie stabilności wyniku – żaden z uczestników podziału nie może szczerze zgłosić pretensji, że wynik jest niesprawiedliwy, bo inny uczestnik podziału otrzymał więcej; żaden też nie wystąpiłby do drugiego z propozycją wymienienia się otrzymanymi udziałami.

Procedurę generującą wyłącznie podziały cechujące się brakiem zazdrości nazwiemy *wolną od zazdrości*.

Słuszność (*equitability*) – podział spełnia ten postulat, jeśli każdy uczestnik podziału otrzymuje taką część całości wedle swojej oceny, co inni uczestnicy wedle własnych ocen. Rozumienie słuszności podają za Bramsem i Taylorem (1996, 1999). W literaturze można spotkać także inne definicje słuszności, jednak wszystkie odbiegają one od naturalnego znaczenia słowa „słuszność”.

Role tego postulatu jest zapewnienie, że wszyscy uczestnicy podziału będą „jednakowo zadowoleni”.

Sam postulat słuszności wydaje się niewystarczający. Podział, w którym każdy uczestnik otrzymuje najniższą cenioną przez niego dobro, może spełniać ten postulat (każdy otrzymuje część, którą ocenia na, powiedzmy, 1% wartości całego zbioru), ale nie wydaje się on być możliwy do zaakceptowania jako podział sprawiedliwy. Wskazane jest zatem dołączenie do postulatu słuszności również innych postulatów.

Procedurę generującą wyłącznie podziały słuszne nazwiemy *słuszną*.

Odporność na zachowania strategiczne (*strategy-proofness*) – procedura spełnia ten postulat, jeżeli żadnemu uczestnikowi podziału nie opłaca się podać nieszczerych ocen wartości dóbr przy znajomości wycen pozostałych uczestników i przy założeniu, że podadzą oni szczerze wyceny.

Niestety, postulat odporności na zachowania strategiczne jest bardzo trudny do spełnienia. Niemniej jednak warunek ten również nie wydaje się wystarczający – procedura, która wszystkie dobra przypisze najstarszemu uczestnikowi podziału, jest odporna na zachowania strategiczne, ale trudno ją uznać za sprawiedliwą.

Anonimowość (*anonymity*) – procedura spełnia ten postulat, jeśli procedura nie uwzględnia innych cech uczestników podziału niż ich zadeklarowane oceny wartości dóbr.

Postulat ten odpowiada za bezstronność – żaden z uczestników podziału nie jest uprzywilejowany ani dyskryminowany. Procedura anonimowa nie uwzględnia czynników takich, jak: wiek, płeć, sytuacja rodzinna czy finansowa etc. Bez znaczenia jest także uporządkowanie uczestników podziału – dana osoba otrzyma taki sam udział niezależnie od tego, czy nazwiemy ją Uczestnikiem 1 czy Uczestnikiem 4.

4. Badane procedury podziału

Artykuł ten analizuje cztery procedury podziału zbioru dóbr niepodzielnych:

- 1) oryginalna procedura Knastera (K);
- 2) poprawiona procedura Knastera (AK);
- 3) procedura równych udziałów (RU);
- 4) procedura drugich najwyższych cen (DNC).

Dwie ostatnie zostają po raz pierwszy zaprezentowane w tym artykule.

Założenia

Wszystkie wymienione procedury wychodzą z tych samych założeń. Dodatkowo wszystkie z wymienionych metod są niejawne (tzn. żaden uczestnik podziału nie ma dostępu do informacji o deklaracjach pozostałych uczestników) i nielosowe. Dzięki temu możliwe jest sensowne porównywanie tych procedur między sobą.

Założenia:

- 1) pieniądze są doskonale podzielne;
- 2) każdy uczestnik podziału ma liniową funkcję użyteczności na pieniądzach;
- 3) każdy uczestnik podziału jest w stanie wycenić każde dobro z dzielonego zbioru, tj. podać taką kwotę pieniędzy, że uczestnik ten jest indyferentny między tym dobrem a tą kwotą;
- 4) użyteczność każdego podzbioru zbioru dzielonych dóbr jest dla danego uczestnika podziału równa sumie użyteczności elementów tego podzbioru dla tego uczestnika (założenie o addytywności);
- 5) każdy uczestnik podziału dysponuje wolnymi środkami pieniężnymi wystarczającymi do wypłaty rekompensat (wystarczy kwota w wysokości sumy własnych wycen rozdzielanych dóbr).

Z powyższych założeń wynika, że uczestnik jest indyferentny między danym podzbiorem zbioru dzielonych dóbr a kwotą równą sumie jego wycen elementów tego podzbioru.

Opis procedur

Oryginalna procedura Knastera

Uczestnicy podziału oceniają wartość dzielonych dóbr. Każde dobro trafia do tego uczestnika podziału, który wycenił je najwyżej (w przypadku remisu decyduje arbiter). Dla każdego uczestnika wyliczamy jego **sprawiedliwy udział**, który jest równy $1/n$ sumy jego ocen wartości dóbr. Następnie wyliczamy różnicę między sumą jego wycen otrzymanych przez niego dóbr a jego sprawiedliwym udziałem. Uczestnik podziału wpłaca do wspólnej kasy kwotę równą tej różnicy, a jeżeli różnica jest ujemna, tj. uczestnik otrzymał dobra, które są dla niego warte mniej niż wynosi jego sprawiedliwy udział, uczestnikowi jest ze wspólnej kasy wypłacana kwota równa wartości bezwzględnej tej różnicy. Jeżeli w kasie została nadwyżka, jest ona rozdzielana równo pomiędzy wszystkich uczestników podziału.

Nadwyżka jest zawsze nieujemna. Jest ona równa różnicy między sumą najwyższych wycen wszystkich dóbr a sumą sprawiedliwych udziałów wszystkich uczestników. Suma sprawiedliwych udziałów jest równa $1/n$ sumy wszystkich wycen. Nie może być ona większa od sumy najwyższych wycen, bo oznaczałoby to, że ktoś ma ocenę wartości jakiegoś dobra wyższą od najwyższej. Może się jednak zdarzyć, że wszyscy mają najwyższą ocenę wartości każdego z dóbr – dzieje się tak w sytuacji, kiedy wszyscy uczestnicy podziału wyceniają każde dobro na taką samą kwotę co pozostali. W tej (i tylko w tej) sytuacji nadwyżka będzie równa 0, w pozostałych zaś będzie dodatnia.

Jest to najstarsza z omawianych procedur, zaproponowana przez wybitnego polskiego matematyka Bronisława Knastera w 1946 r., spopularyzowana przez Hugo Steinhausa (1948).

Poprawiona procedura Knastera (Adjusted Knaster)

Procedura ta jest bardzo podobna do oryginalnej procedury Knastera. Jediną różnicą jest to, że nadwyżka nie jest dzielona równo między uczestników podziału, ale proporcjonalnie do sumy ocen wartości dóbr, tj. uczestnik otrzymuje taką część nadwyżki, jaką część sumy sum ocen wartości dóbr stanowi suma jego ocen wartości dóbr.

Nadwyżka będzie tej samej wielkości, co w przypadku oryginalnej procedury Knastera, a zatem z pewnością będzie nieujemna.

Procedurę tę zaproponował Matthias Raith w 1998 r. W Polsce jest znana także pod nazwą „procedura „poprawionego Knastera”” (Lissowski, 2008). Zmiana

wprowadzona do oryginalnej procedury Knastera wydaje się dość rozsądna – skoro system transferów wyrównuje użyteczności (wyrażone w pieniądzu) do poziomu proporcjonalnego do sumy ocen wartości dóbr, to czemu mielibyśmy dzielić nadwyżkę w sposób nieproporcjonalny?

Przykład 1. Oryginalna procedura Knastera i poprawiona procedura Knastera – sposób obliczania podziału końcowego dla przykładowego profilu ocen wartości dóbr

		Uczestnik			
		1	2	3	4
Wycena dobra	A	100 zł	80 zł	50 zł	80 zł
	B	50 zł	120 zł	30 zł	60 zł
	C	50 zł	40 zł	80 zł	60 zł
Suma ocen		200 zł	240 zł	160 zł	200 zł
Sprawiedliwy udział		50 zł	60 zł	40 zł	50 zł
Otrzymane dobra		A	B	C	-
Wartość otrzymanych dóbr		100 zł	120 zł	80 zł	0 zł
Różnica*		50 zł	60 zł	40 zł	-50 zł
Udział w nadwyżce (K)		25 zł	25 zł	25 zł	25 zł
Podział końcowy (K)		A – 25 zł	B – 35 zł	C – 15 zł	75 zł
Udział w nadwyżce (AK)		25 zł	30 zł	20 zł	25 zł
Podział końcowy (AK)		A – 25 zł	B – 30 zł	C – 20 zł	75 zł

* różnica między wartością otrzymanych dóbr a sprawiedliwym udziałem.

Jak widać, poprawiona procedura Knastera różni się od oryginalnej procedury Knastera wyłącznie sposobem podziału nadwyżki.

Procedura równych udziałów

Uczestnicy podziału oceniają wartość dzielonych dóbr. Każde dobro trafia do osoby, która wyceniła je najwyżej (w przypadku remisu decyduje arbiter) i osoba ta wpłaca do wspólnej kasy kwotę w wysokości swojej oceny wartości otrzymanego dobra. Uzyskane w ten sposób pieniądze zostają podzielone równo między wszystkich uczestników podziału.

Procedura ta jest przedstawiona po raz pierwszy w niniejszym artykule. Zapewnia ona, że każdy z uczestników podziału wycenia otrzymany przez siebie udział na taką samą kwotę, na jaką pozostali uczestnicy wyceniają swoje udziały. Dzieje się tak, ponieważ przed rozdzieleniem zebranych pieniędzy między uczestników każdy wycenia swój udział na 0 (bo zapłacił za otrzymane dobra dokładnie tyle, ile są dla niego warte). Pieniądze są rozdzielane równo, zatem każdy uczestnik wycenia swój udział na taką samą kwotę.

Przykład 2. Procedura równych udziałów – sposób obliczania podziału końcowego dla przykładowego profilu ocen wartości dóbr

		Uczestnik			
		1	2	3	4
Wycena dobra	A	100 zł	80 zł	50 zł	80 zł
	B	50 zł	120 zł	30 zł	60 zł
	C	50 zł	40 zł	80 zł	60 zł
Otrzymane dobra	A	B	C	-	
Do zapłaty		100 zł	120 zł	80 zł	0 zł
Udział		75 zł	75 zł	75 zł	75 zł
Podział końcowy		A – 25 zł	B – 45 zł	C – 5 zł	75 zł

Procedura drugich najwyższych cen

Uczestnicy podziału oceniają wartość dzielonych dóbr. Każde dobro trafia do osoby, która wyceniła je najwyżej (w przypadku remisu decyduje arbiter) i osoba ta wpłaca do wspólnej kasy kwotę w wysokości **drugiej najwyższej wyceny tego dobra**. Uzyskane w ten sposób pieniądze zostają podzielone równo między wszystkich uczestników podziału.

Procedura ta jest przedstawiona po raz pierwszy w niniejszym artykule. Adaptuje ona pewne elementy niejawniej aukcji Vickreya do problemu podziału zbioru dóbr niepodzielnych. W aukcji Vickreya (Vickrey, 1961) licytujący podają oferty cenowe (oferty te nie są podawane do wiadomości pozostałych licytujących). Aukcję wygrywa osoba, która złożyła najwyższą ofertę, ale płaci tyle, ile wynosiła druga najwyższa oferta. Aukcja Vickreya jest odporna na jednostkowe zachowania strategiczne licytujących.

Przykład 3. Procedura drugich najwyższych cen – sposób obliczania podziału końcowego dla przykładowego profilu ocen wartości dóbr

		Uczestnik			
		1	2	3	4
Wycena dobra	A	100 zł	80 zł	50 zł	80 zł
	B	50 zł	120 zł	30 zł	60 zł
	C	50 zł	40 zł	80 zł	60 zł
Otrzymane dobra	A	B	C	-	
Do zapłaty		80 zł	60 zł	60 zł	0 zł
Udział		50 zł	50 zł	50 zł	50 zł
Podział końcowy		A – 30 zł	B – 10 zł	C – 10 zł	50 zł

Zobaczymy teraz zestawienie podziałów końcowych.

Jak widać, procedury te mogą dla tego samego profilu ocen wartości dóbr generować różne podziały. Mają jednak pewną cechę wspólną – wszystkie procedury przydzielają dobra tym uczestnikom podziału, którzy oceniają wartość tych dóbr na najwyższą kwotę.

Tabela 1. Zestawienie podziałów końcowych wygenerowanych przez oryginalną procedurę Knastera, poprawioną procedurę Knastera, procedurę równych udziałów i procedurę drugich najwyższych cen dla tego samego profilu ocen wartości dóbr

Procedura	Uczestnik			
	1	2	3	4
K	A – 25 zł	B – 35 zł	C – 15 zł	75 zł
AK	A – 25 zł	B – 30 zł	C – 20 zł	75 zł
RU	A – 25 zł	B – 45 zł	C – 5 zł	75 zł
DNC	A – 30 zł	B – 10 zł	C – 10 zł	50 zł

5. Podstawowe własności procedur podziału

Po przedstawieniu omawianych procedur i pożądanymi własności zobaczymy, które postulaty są spełniane przez poszczególne metody przy założeniu podawania przez uczestników prawdziwych wycen.

Tabela 2. Własności formalne procedur

Procedura	Optymalność	Proporcjonalność	Wolność od zazdrości	Śluszość	Odporność na zachowania strategiczne	Anonimowość
K	tak	tak	nie	nie	nie	tak
AK	tak	tak	nie	tak	nie	tak
RU	tak	tak	tak	nie	nie	tak
DNC	tak	tak	tak	nie	nie	tak

Jeżeli spełnianie powyższych postulatów potraktować jako wyznacznik jakości procedury, to oryginalna procedura Knastera wypada najsłabiej – możemy „za darmo” dostać jeszcze słuszość (AK) lub wolność od zazdrości (RU lub DNC).

Należy pamiętać, że procedury podziału dóbr są często stosowane do pewnego szczególnego rodzaju podziału, a mianowicie – do podziału między dokładnie dwóch uczestników podziału (np. przy podziale majątku w sprawach rozwodowych). Okazuje się, że przy ograniczeniu zastosowania procedury do tej klasy problemów metoda może zyskać właściwość, której nie ma bez tego ograniczenia. W przypadkach podziału zbioru dóbr pomiędzy dwóch uczestników procedury K i AK zyskują dodatkowo właściwość wolności od zazdrości. Jeżeli przyjmiemy spełnianie postulatów za kryterium jakości procedury, to w przypadku, gdy mamy dokładnie dwóch uczestników podziału, poprawiona procedura Knastera jest najlepszym wyborem.

Poniżej przedstawione zostają dowody na spełnianie lub niespełnianie sześciu wybranych postulatów przez badane procedury.

Optymalność

Procedura jest optymalna zawsze i tylko, jeśli każde dobro trafia do osoby, która wyceniła je najwyżej.

Jeżeli jakieś dobro trafiłoby do osoby, która nie wyceniła tego dobra najwyżej, to mogłaby ona odstąpić to dobro osobie ceniącej je wyżej za rekompensatą pieniężną w wysokości pomiędzy tymi dwiema wycenami. Podział taki byłby lepszy dla obu tych osób, a jednocześnie nie gorszy dla wszystkich, a zatem pierwotny podział nie był optymalny. W przypadku gdy wszystkie dobra trafiają do tych, którzy wycenili je najwyżej, taka zamiana jest niemożliwa.

Wszystkie badane metody przydzielają dobra tym, którzy oceniają je najwyżej, a zatem wszystkie cztery procedury są optymalne.

Proporcjonalność

Wszystkie z badanych procedur spełniają postulat proporcjonalności.

Aby spełniony był warunek proporcjonalności, każdy uczestnik podziału musi otrzymać udział, którego wartość oceni co najmniej na $1/n$ wartości całego zbioru dzielonych dóbr, czyli tyle, ile wynosi jego sprawiedliwy udział. W przypadku K i AK wpłaty i wypłaty ze wspólnej kasy są skonstruowane tak, aby wyrównywać użyteczności do wysokości sprawiedliwych udziałów, a nadwyżka jest dzielona między uczestników. Każdy uczestnik podziału dostaje jako swoją część nadwyżki nieujemną kwotę pieniędzy, a zatem zarówno K, jak i AK są proporcjonalne.

Z addytywności wynika, że jeśli alokacja każdego pojedynczego dobra będzie spełniała warunek proporcjonalności, to podział całego zbioru dóbr również. W procedurze RU osoba, która ma najwyższą wycenę na dane dobro, otrzymuje je i płaci za nie tyle, ile jest dla niej warte, a następnie odzyskuje $1/n$ tej kwoty przy rozdzielaniu pieniędzy między uczestników, zatem otrzymuje równo $1/n$ swojej wyceny tego dobra. W przypadku pozostałych osób otrzymują one kwotę w wysokości $1/n$ najwyższej wyceny, a zatem kwotę nie mniejszą niż $1/n$ ich wyceny na to dobro. Oznacza to, że każdy uczestnik wyceni swój udział co najmniej na $1/n$ sumy wartości wszystkich dzielonych dóbr, a zatem procedura RU jest proporcjonalna.

W przypadku procedury DNC dowód jest podobny. Jedyna różnica jest taka, że osoba o najwyższej wycenie płaci za dobro kwotę równą nie najwyższej, lecz drugiej najwyższej wycenie, zatem jeśli w przypadku procedury RU oceniała swój udział na $1/n$, to teraz ocenia go na nie mniejszy od $1/n$. Pozostali uczestnicy otrzymują kwotę równą $1/n$ drugiej najwyższej wyceny, co jest sumą nie mniejszą od $1/n$ ich wycen. Zatem procedura DNC jest proporcjonalna.

Wolność od zazdrości

Procedury K i AK są wolne od zazdrości w sytuacji, gdy jest dwóch uczestników podziału, lecz nie muszą być wolne od zazdrości, gdy jest ich więcej. Procedury RU i DNC są wolne od zazdrości w każdej sytuacji.

W przypadku gdy mamy dwóch uczestników podziału, proporcjonalność jest równoważna brakowi zazdrości. Podział będzie proporcjonalny, jeśli obaj uczestnicy wyceniają swój udział co najmniej na połowę wartości całego zbioru. Podział będzie się cechował brakiem zazdrości, jeśli obaj uczestnicy oceniają swój udział na wart nie mniej niż udział drugiego uczestnika. Jak łatwo zauważyć, oba warunki są równoważne.

Zacznijmy od wykazania, że procedury K i AK są wolne od zazdrości w przypadku, gdy jest dwóch uczestników podziału, ale nie muszą być dla pozostałych przypadków. Obie procedury są proporcjonalne, a w przypadku, gdy uczestników podziału jest dwóch, proporcjonalność jest równoważna brakowi zazdrości, zatem K i AK są wolne od zazdrości dla $n = 2$. Niespełnianie tego postulatu dla $n > 2$ da się wykazać na prostym przykładzie:

Przykład 4. Przykładowy profil ocen wartości dóbr, dla którego oryginalna procedura Knastera i poprawiona procedura Knastera generują podział, który nie jest wolny od zazdrości

Wycena dobra	Uczestnik			
	1	2	3	4
A	20 zł	40 zł	80 zł	100 zł

Zobaczymy, jak będą wyglądały podziały końcowe wygenerowane przez procedury K i AK dla tego profilu (szczegóły obliczeń pozwoliłem sobie pominąć, ufając, że wcześniejsze opisy i przykłady pozwolą Czytelnikowi na samodzielne wykonanie rachunków i sprawdzenie prawdziwości wyników).

Tabela 3. Zestawienie podziałów końcowych wygenerowanych przez oryginalną procedurę Knastera i poprawioną procedurę Knastera dla przykładu 4

Podział końcowy	Uczestnik			
	1	2	3	4
K	15 zł	20 zł	30 zł	A – 65 zł
AK	8,33 zł	16,67 zł	33,33 zł	A – 58,33 zł

Jak nietrudno zauważyć, podziały te nie są wolne od zazdrości – w obu tych przypadkach uczestnik 1 zazdrości uczestnikom 2 i 3, a uczestnik 2 – uczestnikowi 3. Zatem procedury K i AK nie są wolne od zazdrości.

W przypadku procedury RU udział każdego z uczestników składa się z dóbr nabytych za określoną sumę pieniędzy oraz wypłaty ze wspólnej kasy. Nikt nie za-

zdrości nikomu wypłaty (bo wszyscy otrzymują ze wspólnej kasy taką samą kwotę) ani nabycia dóbr, gdyż nikt nie byłby skłonny zapłacić za te dobra więcej, niż zapłacił ich nabywca.

Dla procedury DNC dowód wygląda analogicznie – wypłaty ze wspólnej kasy są równe i nikt nie byłby gotów zapłacić za dobra więcej, niż uczynili to ich nabywcy (choć osoba o drugiej najwyższej wycenie jest indyferentna między nabyciem danego dobra po tej cenie a nienabyciem go wcale).

Słuszność

Pośród czterech badanych procedur jedynie procedura AK jest słuszna. Co więcej, jest ona jedyną procedurą jednocześnie słuszną i optymalną.

W procedurze AK system transferów gwarantuje każdemu uczestnikowi jego sprawiedliwy udział (czyli $1/n$ sumy ocen wartości dóbr). Wartość ostatecznego koszyka dóbr dla każdego uczestnika jest równa jego sprawiedliwemu udziałowi + otrzymanej części nadwyżki. Zatem aby zagwarantować, że każdy dostanie taki sam odsetek sumy swoich ocen wartości dóbr, nadwyżka musiałaby być dzielona proporcjonalnie do sumy ocen. W procedurze AK nadwyżka jest dzielona w taki właśnie sposób, a zatem procedura AK jest słuszna. Poprzednio wykazano, że procedura AK jest optymalna.

Jeżeli jakaś procedura przyznaje dobra w inny sposób niż procedura AK, to znaczy, że musi czasem przyznawać dobro komuś, kto nie ceni go najwyżej, a zatem procedura taka nie byłaby optymalna. Gdyby jakaś optymalna procedura różniła się od procedury AK transferami pieniężnymi, to procedura ta nie byłaby słuszna. Zatem każda optymalna i słuszna procedura jest tożsama z procedurą AK.

Oznacza to, że z tego, że procedury K, RU i DNC są optymalne, wynika, że nie są słuszne.

Odporność na zachowania strategiczne

Żadna z wymienionych procedur nie jest odporna na zachowania strategiczne. Zobaczmy, co może się stać, gdyby jeden z uczestników (uczestnik 1) dowiedział się, jak uczestnik 2 ocenia wartość dóbr i postanowił zmodyfikować swoje deklarowane oceny, zaniżając wycenę dobra A i zwyżając wycenę dobra B:

Przykład 5. Profile oceny wartości dóbr: szczerze oceny wartości dóbr i wartości zadeklarowane w sytuacji, gdy uczestnik 1 zachowuje się strategicznie

Wycena dobra	Uczestnik	
	1	2
A	120 zł	10 zł
B	30 zł	40 zł
Po modyfikacji		
A	12 zł	10 zł
B	38 zł	40 zł

Zobaczmy, jak teraz wyglądałyby wyniki wygenerowane przez poszczególne procedury (szczegółowe wyliczenia pozostawiam Czytelnikowi):

Tabela 4. Zestawienie podziałów końcowych wygenerowanych przez oryginalną procedurę Knastera, poprawioną procedurę Knastera, procedurę równych udziałów i procedurę drugich najwyższych cen dla profilu szczerych ocen wartości dóbr i profilu, w którym uczestnik 1 strategicznie zmodyfikował swoje deklarowane oceny (przykład 5)

Podział końcowy...	Uczestnik	
	1	2
	oryginalna procedura Knastera	
przed modyfikacją	A – 15 zł	B + 15 zł
po modyfikacji	A + 14 zł	B – 14 zł
	poprawiona procedura Knastera	
przed modyfikacją	A	B
po modyfikacji	A + 14 zł	B – 14 zł
	procedura równych udziałów	
przed modyfikacją	A – 40 zł	B + 40 zł
po modyfikacji	A + 14 zł	B – 14 zł
	procedura drugich najwyższych cen	
przed modyfikacją	A + 10 zł	B – 10 zł
po modyfikacji	A + 14 zł	B – 14 zł

Jak widać, wszystkie cztery procedury generują ten sam podział dla zmodyfikowanego profilu ocen wartości dóbr. Łatwo też zauważyć, że w przypadku wszystkich czterech procedur podanie nieprawdziwych ocen wartości dóbr przyniosło korzyści uczestnikowi 1. Wynika stąd, że żadna z badanych procedur nie jest odporna na zachowania strategiczne.

W przypadku procedur K i AK uczestnik zyskał zarówno na zniżeniu oceny wartości dobra A, jak i na zawyżeniu oceny wartości dobra B. W przypadku procedury RU uczestnik zyskuje wyłącznie na zniżeniu wyceny dobra A, zaś w przypadku procedury DNC – wyłącznie na zawyżeniu wyceny dobra B, co da się łatwo sprawdzić na przykładzie, w którym uczestnik zmodyfikowałby tylko jedną wycenę (sprawdzenie pozostawiam Czytelnikowi).

Procedura RU jest całkowicie odporna na zawyżanie ocen wartości dóbr. Jeżeli ocenia się dobro najwyżej, to zawyżenie wyceny się nie opłaca, bo prowadzi do konieczności wypłacenia wyższych rekompensat. Jeżeli ma się wycenę niższą niż najwyższa, to zawyżanie wycen nie jest opłacalne – jeśli przebije się najwyższą wycenę, to traci się w porównaniu z sytuacją wyjściową, a jeśli nie – niczego się nie zyskuje, bo i tak otrzymuje się kwotę równą $1/n$ najwyższej wyceny.

Procedura DNC jest całkowicie odporna na zniżanie wycen. Jeżeli ma się najwyższą wycenę, to zniżenie wyceny niczego nie daje – i tak wypłaca się rekompensatę w wysokości drugiej najwyższej wyceny – a obniżenie deklarowanej oceny po-

niżej drugiej najwyższej oceny pozbawia nas tego dobra. W pozostałych przypadkach również nie jest to opłacalne – jeśli ma się drugą najwyższą wycenę, to obniżenie wyceny zmniejsza kwotę otrzymanej rekompensaty, jeśli zaś ma się wycenę niższą niż druga najwyższa wycena, to jej zmniejszenie nie ma wpływu na wynik.

Anonimowość

We wszystkich czterech procedurach jedyną informacją zbieraną o uczestnikach podziału są ich oceny wartości dóbr, zatem procedury te są anonimowe.

6. Związki między własnościami podziałów generowanych przez poszczególne metody

Oryginalna procedura Knastera – słuszność a brak zazdrości

Oryginalna procedura Knastera nie jest ani wolna od zazdrości, ani słusna. Oznacza to, że niektóre z generowanych przez nią podziałów nie cechują się brakiem zazdrości, a niektóre nie spełniają postulatu słuszności. Okazuje się, że oryginalna procedura Knastera nigdy nie generuje podziałów jednocześnie słusznych i z zazdrością. Do przeprowadzenia dowodu będziemy potrzebowali dwóch twierdzeń:

Twierdzenie 1

W przypadku oryginalnej procedury Knastera warunek słuszności jest spełniony zawsze i tylko, gdy sumy ocen wartości dóbr wszystkich uczestników podziału są równe.

Dowód

Oryginalna procedura Knastera korzysta z systemu wpłat i wypłat ze wspólnej kasy, aby każdy uczestnik podziału otrzymał koszyk dóbr (powiększonych lub pomniejszonych o transfery) równy swojemu sprawiedliwemu udziałowi (tj. $1/n$ sumy ocen wartości dóbr), a ewentualną nadwyżkę dzieli równo między uczestników podziału. Przed rozdzieleniem nadwyżki wszyscy uczestnicy oceniają otrzymane koszyki na $1/n$ wartości całego zbioru dóbr. Aby po rozdzieleniu nadwyżki odsetek ten był równy dla wszystkich uczestników, nadwyżka musiałaby być rozdzielona proporcjonalnie do sumy wycen. Procedura Knastera dzieli nadwyżkę równo. Jedynym przypadkiem, kiedy równy podział jest jednocześnie podziałem proporcjonalnym do sumy wycen, jest taki, kiedy sumy wycen wszystkich uczestników podziału są równe. Zatem procedura Knastera spełnia warunek słuszności zawsze i tylko, gdy sumy wycen wszystkich uczestników podziału są równe.

Twierdzenie 1 jest prawdziwe także dla procedury równych udziałów. Jak wykazano wcześniej, w procedurze równych udziałów każdy uczestnik wycenia swój udział na tę samą kwotę. Kwota ta będzie stanowiła równy odsetek ich sumy wycen tylko w przypadku, gdy ich sumy wycen będą jednakowe.

Twierdzenie 2

W przypadku oryginalnej procedury Knastera, jeśli w pewnym profilu uczestnik i zazdrości uczestnikowi j , to uczestnik i ma niższą sumę ocen wartości dóbr niż j .

Dowód

Jeżeli uczestnik i (U_i) zazdrości uczestnikowi j (U_j), to znaczy, że wyżej ceni udział U_j niż własny. Udział składa się z trzech części: otrzymanych dóbr, transferu wyrównującego do sprawiedliwego udziału oraz części nadwyżki. Nadwyżka jest dzielona równo, co oznacza, że U_i musi wyżej cenić udział U_j bez należnej mu części nadwyżki niż swój udział bez części nadwyżki. Oznacza to, że U_i ceni dobra i i transfer U_j wyżej niż swoje dobra i i transfer (które wycenia na swój sprawiedliwy udział). U_i ceni dobra U_j na kwotę nie większą, niż czyni to U_j (gdyby było inaczej, to U_i musiałby mieć najwyższą wycenę na któreś z nich, zatem trafiłyby one do niego), ale woli dobra i i transfer U_j od swojego sprawiedliwego udziału. Oznacza to, że U_j otrzymuje wyrównanie do większej kwoty niż U_i , zatem sprawiedliwy udział U_j jest większy niż U_i . Sprawiedliwy udział to po prostu $1/n$ sumy wycen, a zatem U_j ma wyższą sumę wycen niż U_i .

Twierdzenie 2 jest prawdziwe również dla poprawionej procedury Knastera. Sytuacja różni się tutaj tylko tym, że nadwyżka nie jest dzielona równo, lecz proporcjonalnie do sumy wycen, a zatem osoba o wyższej sumie ocen wartości dóbr otrzymuje większą część nadwyżki. Należy zatem uwzględnić różnicę w części nadwyżki otrzymanej przez U_i i U_j . Jednak różnica ta niewiele zmienia – jest ona bardziej korzystna dla U_j niż U_i wtedy i tylko wtedy, gdy U_j ma większą sumę wycen od U_i .

Z twierdzeń 1 i 2 wynika, że **oryginalna procedura Knastera nigdy nie generuje podziałów jednocześnie słusznych i z zazdrością.**

7. Porównanie własności procedur

Oryginalna procedura Knastera a poprawiona procedura Knastera

Jeżeli w pewnym profilu U_i zazdrości U_j przy podziale wygenerowanym przez oryginalną procedurę Knastera, to U_i zazdrości U_j także przy podziale dokonanym wedle poprawionej procedury Knastera. Z powyższego twierdzenia wynika, że je-

śli dla danego profilu poprawiona procedura Knastera generuje podział cechujący się brakiem zazdrości, to oryginalna procedura Knastera też.

Dowód

Udział składa się z dóbr, transferu i części nadwyżki. W procedurze K nadwyżka zostaje równo podzielona między uczestników, zatem jeśli U_i zazdrości U_j , to znaczy, że U_i woli dobra i transfer U_j od swoich dóbr i transferu. W procedurze AK nadwyżka jest dzielona proporcjonalnie do sumy wycen. Jak wykazano powyżej, jeśli przy podziale wygenerowanym przez K U_i zazdrości U_j , to U_i ma niższą sumę wycen niż U_j . Zatem U_j otrzyma większą część nadwyżki niż U_i . U_i ceni wyżej dobra i transfer otrzymane przez U_j od własnych, zatem będzie wolał dobra, transfer i część nadwyżki U_j od tych, które sam otrzymał, zatem U_i będzie zazdrościł U_j .

Zależność w drugą stronę nie zachodzi, tzn. istnieją takie profile preferencji, dla których K generuje podziały cechujące się brakiem zazdrości, a AK nie. Oczywiście, istnieją także takie profile preferencji, dla których zarówno K i AK wyznaczają podziały bez zazdrości (np. dla wszystkich przypadków, gdy jest dwóch uczestników podziału).

Przykład 6. Przykładowy profil ocen wartości dóbr, dla którego oryginalna procedura Knastera generuje podział bez zazdrości, a poprawiona procedura Knastera nie

		Uczestnik		
		1	2	3
Wycena dobra	A	1200 zł	960 zł	1080 zł
	B	960 zł	360 zł	1080 zł
	C	720 zł	1200 zł	1080 zł
Podział końcowy – K		A – 40 zł	C – 160 zł	B + 200 zł
Podział końcowy – AK		A – 40 zł	C – 185 zł	B + 225 zł

Podział uzyskany przy użyciu oryginalnej procedury Knastera cechuje się brakiem zazdrości. W przypadku podziału wygenerowanego przez poprawioną procedurę Knastera uczestnik 1 zazdrości uczestnikowi 3; uczestnik 1 ocenia swój udział na $1200 \text{ zł} - 40 \text{ zł} = 1160 \text{ zł}$, a udział uczestnika 3 na $960 \text{ zł} + 225 \text{ zł} = 1185 \text{ zł}$.

Oryginalna procedura Knastera a procedura równych udziałów

Oryginalna procedura Knastera generuje podział słuszny zawsze i tylko wtedy, gdy procedura równych udziałów generuje podział słuszny.

Dowód

Jak wykazano wcześniej, zarówno oryginalna procedura Knastera, jak i procedura równych udziałów generuje podział słuszny zawsze i tylko, gdy sumy wycen wszystkich uczestników podziału są równe.

Oryginalna procedura Knastera i procedura równych udziałów a procedura drugich najwyższych cen

Spełnianie postulatu słuszności przez oryginalną procedurę Knastera jest niezależne od spełniania postulatu słuszności przez procedurę drugich najwyższych cen.

Przykład 7. Przykładowy profil ocen wartości dóbr, dla którego oryginalna procedura Knastera generuje słuszny podział, a procedura drugich najwyższych cen nie

		Uczestnik			
		1	2	3	4
Wycena dobra	A	100 zł	80 zł	40 zł	20 zł
	B	100 zł	120 zł	160 zł	180 zł
Podział końcowy – K		A – 30 zł	70 zł	70 zł	B – 110 zł
Użyteczność wypłaty – K		70 zł	70 zł	70 zł	70 zł
% sumy wycen – K		35%	35%	35%	35%
Podział końcowy – DNC		A – 20 zł	60 zł	60 zł	B – 100 zł
Użyteczność wypłaty – DNC		80 zł	60 zł	60 zł	80 zł
% sumy wycen – DNC		40%	30%	30%	40%

Przykład 8. Przykładowy profil ocen wartości dóbr, dla którego procedura drugich najwyższych cen generuje słuszny podział, a oryginalna procedura Knastera nie

		Uczestnik			
		1	2	3	4
Wycena dobra	A	600 zł	400 zł	200 zł	350 zł
	B	400 zł	600 zł	300 zł	150 zł
Podział końcowy – K		A – 237,5 zł	B – 237,5 zł	237,5 zł	237,5 zł
Użyteczność wypłaty – K		362,5 zł	362,5 zł	237,5 zł	237,5 zł
% sumy wycen – K		36,25%	36,25%	47,5%	47,5%
Podział końcowy – DNC		A – 200zł	B – 200 zł	200 zł	200 zł
Użyteczność wypłaty – DNC		400 zł	400 zł	200 zł	200 zł
% sumy wycen – DNC		40%	40%	40%	40%

Jak widać na powyższych przykładach, z tego, że jedna z tych metod generuje słuszny podział nie wynika, że druga też.

Procedura równych udziałów generuje słuszny podział zawsze i tylko, gdy robi to oryginalna procedura Knastera, zatem jej relacja do procedury drugich najwyższych cen pod względem spełniania postulatu słuszności jest identyczna.

Wnioski

Podsumowując, wszystkie cztery badane procedury (oryginalna procedura Knastera, poprawiona procedura Knastera, procedura równych udziałów i procedura drugich najwyższych cen) są optymalne, proporcjonalne i anonimowe. Poprawio-

na procedura Knastera jest ponadto słuszna, a procedury równych udziałów i drugich najwyższych cen – wolne od zazdrości. Żadna z badanych procedur nie jest odporna na zachowania strategiczne, ale procedura równych udziałów jest odporna na zawyżanie wycen, a procedura drugich najwyższych cen – na ich zaniżanie.

Ani oryginalna procedura Knastera, ani poprawiona procedura Knastera nie jest wolna od zazdrości dla więcej niż dwóch uczestników podziału, ale pierwsza z nich generuje podziały bez zazdrości w szerszej klasie przypadków.

W sytuacji gdy jest dokładnie dwóch uczestników podziału, oryginalna procedura Knastera i poprawiona procedura Knastera są wolne od zazdrości. W tej klasie przypadków poprawiona procedura Knastera spełnia wszystkie badane postulaty oprócz odporności na zachowania strategiczne.

Bibliografia

- Brams, Steven J., Alan D. Taylor. 1996. *Fair Division: From cake-cutting to dispute resolution*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Brams, Steven J., Alan D. Taylor. 1999. *The Win-Win Solution: Guaranteeing Fair Shares to Everybody*. New York: W.W. Norton & Company.
- Knaster, Bronisław. 1946. *Sur le problème du partage pragmatique de H. Steinhaus*. Annales de la Société Polonaise de Mathématique 19: 228-231.
- Kuhn, Harold W. 1967. *On games of fair division*. W: M. Shubik (red.) *Essays in Mathematical Economics: In Honor of Oskar Morgenstern*. Princeton: Princeton University Press, 29-37.
- Lissowski, Grzegorz. 2008. *Zasady sprawiedliwego podziału dóbr*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe Scholar.
- Raith, Matthias G. 2000. *Fair-Negotiation Procedures*. „Mathematical Social Sciences” 39: 303-322.
- Steinhaus, Hugo. 1948. *The Problem of Fair Division*. „Econometrica” 16: 101-104.
- Steinhaus, Hugo. 1949. *Sur la division pragmatique*. „Econometrica” 17: 315-319.
- Vickrey, William. 1961. *Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders*. „The Journal of Finance” 16: 8-37.
- Weron, Rafał. *Hugo Steinhaus: matematyk, humanista i... popularyzator sprawiedliwego podziału tortu*. „Decyzje” 6: 113-118.