PROBLEM PODZIAŁU ZBIORU DÓBR NIEPODZIELNYCH W SYTUACJI NIERÓWNYCH UPRAWNIEŃ[1]

Marek Bożykowski[2]
Uniwersytet Warszawski

Streszczenie: *Artykuł przedstawia modyfikację czterech nieprobabilistycznych procedur sprawiedliwego podziału zbioru dóbr niepodzielnych z użyciem pieniędzy: oryginalnej procedury Knastera, poprawionej procedury Knastera, procedury równych udziałów i procedury drugich najwyższych cen. Modyfikacja ma na celu przystosowanie wymienionych metod do problemu podziału zbioru dóbr w sytuacji nierównych uprawnień uczestników. Przedstawione zostają również dostosowane do szerszej klasy przypadków wersje postulatów: optymalności, proporcjonalności, wolności od zazdrości, słuszności, odporności na zachowania strategiczne i anonimowości. Zostanie również wykazane, że własności formalne wymienionych procedur w sytuacji nierównych uprawnień są identyczne, jak w klasycznym przypadku równych uprawnień.*

Słowa kluczowe: *nierówne uprawnienia, sprawiedliwy podział, dobra niepodzielne, procedura Knastera, poprawiona procedura Knastera, procedura równych udziałów, procedura drugich najwyższych cen, zmodyfikowana procedura Knastera, zmodyfikowana poprawiona procedura Knastera, procedura proporcjonalnych udziałów, zmodyfikowana procedura drugich najwyższych cen.*

FAIR DIVISION OF A SET OF INDIVISIBLE GOODS IN A SITUATION OF UNEQUAL ENTITLEMENTS

Abstract: *The paper presents modification of four nonprobabilistic procedures of fair division of a set of indivisible goods with money: Original Knaster, Adjusted Knaster, Equal Shares and Second Prices. The purpose of modification is to adjust the aforementioned methods to the problem of division of a set of goods in a situation of unequal entitlements. Extended versions of six formal*

[1] Autor serdecznie dziękuje anonimowym Recenzentom za cenne uwagi.

[2] Marek Bożykowski, Instytut Socjologii Uniwersytetu Warszawskiego, ul. Karowa 18, 00-324 Warszawa, e-mail: m.bozykowski@is.uw.edu.pl

properties, namely: strong Pareto optimality, proportionality, envy-freeness, equitability, strategy-proofness and anonymity are also presented. Moreover, proofs of procedures having the same formal properties in a situation of unequal entitlements as in a situation of equal entitlements are shown.

Keywords: *unequal entitlements, fair division, indivisible goods, Knaster, Adjusted Knaster, Equal Shares, Second Prices, Modified Knaster, Modified Adjusted Knaster, Proportional Shares, Modified Second Prices.*

1. Wprowadzenie

W literaturze dotyczącej problemu podziału dóbr przyjmuje się zwykle, że wszyscy uczestnicy podziału mają równe uprawnienia do dzielonego zbioru dóbr. W praktyce jednak zdarzają się sytuacje, w których uprawnienia niektórych osób są większe niż innych. Przykładowo, bliżsi krewni mają prawo do większej części spadku niż dalsi, w sprawach rozwodowych sąd może przyznać jednej ze stron uprawnienie do większej części majątku niż drugiej, a większy wkład w inwestycję powinien owocować odpowiednio większym udziałem w zyskach. Większość procedur podziału nie jest przystosowana do rozwiązywania problemu podziału dóbr w tego typu sytuacjach.

Celem niniejszego artykułu jest zaprezentowanie czterech procedur podziału przystosowanych do sytuacji nierównych uprawnień i zbadanie ich własności formalnych. Na początku zostaną wprowadzone podstawowe pojęcia i oznaczenia. Następnie zostaną przedstawione modyfikacje czterech procedur podziału (oryginalnej procedury Knastera, poprawionej procedury Knastera, procedury równych udziałów oraz procedury drugich najwyższych cen), przystosowujące je do problemu podziału dóbr w sytuacji nierównych uprawnień. Wszystkie wymienione procedury wykorzystują transfery pieniężne i przyjmują pieniądze jako miarę użyteczności. Potem zostaną zdefiniowane postulaty, czyli zostaną przedstawione cechy procedur pożądane przy tej klasie problemów. Na koniec zostanie omówione, które postulaty są spełniane przez poszczególne badane procedury. Punktem wyjścia jest mój poprzedni artykuł z Nr 15 „Decyzji" – *Procedury podziału zbioru dóbr niepodzielnych z rekompensatami pieniężnymi*.

2. Podstawowe pojęcia i oznaczenia

Włączenie nierównych uprawnień do problemu podziału dóbr wymaga wprowadzenia paru nowych pojęć i modyfikacji części dotychczasowych:

Podział zbioru niepodzielnych dóbr z rekompensatami pieniężnymi – funkcja, która przypisuje każde dobro któremuś z n uczestników podziału, a ponadto wyznacza wektor transferów pieniężnych o n składowych i sumie 0.

Profil oceny wartości dóbr – zestaw ocen wartości każdego z dóbr należących do dzielonego zbioru przez poszczególnych uczestników podziału.

Wektor uprawnień – wektor o n dodatnich składowych i sumie 1, przypisujący każdemu uczestnikowi podziału liczbę równą temu, jaką część uprawnień do dzielonego zbioru ten uczestnik posiada.

Procedura podziału – funkcja, która każdej parze złożonej z profilu ocen wartości dóbr i wektora uprawnień przypisuje podział zbioru dóbr (w tym także transfery pieniężne).

W omawianych procedurach przeprowadzane są transfery pieniężne od uczestników podziału do wspólnej kasy i *vice versa*. Kwotę pozostałą we wspólnej kasie po transferach nazywamy **nadwyżką**. Jest ona rozdzielana między uczestników podziału.

Poniżej przedstawione zostają oznaczenia używane w dalszej części artykułu:

G – zbiór uczestników podziału

D – zbiór dzielonych dóbr

X – zbiór możliwych podziałów

x – podział generowany przez daną procedurę; $x \in X$

n – liczba uczestników podziału

m – liczba dzielonych dóbr

w_i – uprawnienie i-tego uczestnika (należna mu część dzielonego zbioru dóbr);

$$\forall i \in G: 0 < w_i < 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

c_{ik} – wycena k-tego dobra przez i-tego uczestnika podziału

C_i – suma wycen i-tego uczestnika podziału

$$C_i = \sum_{k=1}^{m} c_{ik}$$

M_k – najwyższa wycena k-tego dobra

M_k^2 – druga najwyższa wycena k-tego dobra

$D(x,i)$ – zbiór dóbr otrzymanych przez i-tego uczestnika w podziale x

$u_i(x,j)$ – wartość dla i-tego użytkownika podziału koszyka (dobra+transfery) otrzymanego przez j-tego uczestnika podziału w w podziale x

$u'_i(x,j)$ – wartość dla i-tego użytkownika podziału koszyka (dobra+transfery) otrzymanego przez j-tego uczestnika podziału w w podziale x przed rozdzieleniem nadwyżki

$b(x)$ – łączna wartość nadwyżki przy podziale x

$b(x,i)$ – część nadwyżki przydzielana i-temu uczestnikowi podziału przy podziale x;

$$\sum_{i=1}^{n} b(x,i) = b(x)$$

$$u_i(x,i) = u'_i(x,i) + b(x,i)$$

3. Postulowane własności procedur podziału

Aby procedura podziału mogła być uznana za sprawiedliwą, powinna ona posiadać pewne własności. W niniejszym artykule zostanie omówione sześć postulatów: optymalności, proporcjonalności, wolności od zazdrości, słuszności (wg definicji Bramsa i Taylora, 1996, 1999), odporności na zachowania strategiczne oraz anonimowości. Cztery pierwsze postulaty dotyczą podziałów generowanych przez procedurę, a dwa pozostałe – samej procedury.

Klasyczne ujęcie niektórych postulatów zakłada równe uprawnienia wszystkich uczestników podziału. W przypadku nierównych uprawnień niektóre z tych własności mogłyby być wręcz niepożądane. W związku z powyższym, część postulatów wymaga dostosowania do nowej sytuacji. Poniżej przedstawione zostają postulaty w ich klasycznym brzmieniu oraz w wersji rozszerzonej – przystosowanej do problemu podziału zbioru dóbr przy nierównych uprawnieniach (o ile modyfikacja była potrzebna).

Optymalność (*strong Pareto optimality)* – podział optymalny to taki, że nie istnieje taki inny podział, który byłby lepszy (bardziej preferowany) dla co najmniej jednego uczestnika podziału i jednocześnie nie gorszy dla wszystkich uczestników:

$$x\ jest\ optymalny \leftrightarrow \nexists y \in X\colon \Big(\big(\exists i \in G\colon u_i(y,i) > u_i(x,i)\big) \wedge \big(\forall i \in G\colon u_i(y,i) \geq u_i(x,i)\big) \Big)$$

W przypadku, gdy procedura generuje wyłącznie podziały optymalne, nazwiemy ją *optymalną*.

Postulat pozostaje sensowny także w sytuacji nierównych uprawnień.

Proporcjonalność (*proportionality*) – podział jest proporcjonalny, jeśli każdy z uczestników podziału wycenia otrzymany koszyk (dobra + transfery) na warty co najmniej $\frac{1}{n}$ wartości całego dzielonego zbioru dóbr:

$$\forall i \in G: u_i(x,i) \geq \frac{C_i}{n}$$

W przypadku, gdy procedura generuje wyłącznie podziały proporcjonalne, nazwiemy ją *proporcjonalną*.

Postulat ten nie wydaje się adekwatny do sytuacji nierównych uprawnień. Przykładowo, jeśli jest dwóch uczestników podziału, z których jeden ma wyraźnie większe uprawnienia (np. 90%), to żądanie, aby obaj dostali tyle, by uważać otrzymaną część za wartą co najmniej połowę wartości całego zbioru, wydaje się pozbawione sensu. Należałoby raczej wymagać, aby jeden uważał otrzymaną część za wartą co najmniej 90% wartości całego zbioru, zaś drugi – co najmniej 10%. W przypadku nierównych uprawnień należałoby zatem posługiwać się zmodyfikowaną wersją postulatu proporcjonalności – podział jest proporcjonalny, jeśli każdy z uczestników podziału wycenia otrzymany koszyk (dobra + transfery) na kwotę równą co najmniej takiej części wartości całego dzielonego zbioru dóbr, ile wynosi jego uprawnienie:

$$x\ jest\ proporcjonalny \leftrightarrow \forall i \in G: u_i(x,i) \geq w_i C_i$$

Wolność od zazdrości (*envy-freeness)* – podział cechuje się brakiem zazdrości, jeśli każdy uczestnik podziału uważa otrzymany koszyk (dobra + transfery) za warty co najmniej tyle, co koszyk otrzymany przez każdego innego uczestnika:

$$\forall i,j \in G: u_j(x,j) \geq u_j(x,i)$$

Jeśli procedura generuje wyłącznie podziały cechujące się brakiem zazdrości, to nazwiemy ją *wolną od zazdrości*.

Ten postulat również nie wydaje się właściwy w przypadku nierównych uprawnień – nie wydaje się wcale przeczyć sprawiedliwości, gdy uczestnik posiadający 10% uprawnień woli od własnego koszyka koszyk uczestnika mającego 90% uprawnień, jednak można uznać jego pretensje za zasadne w sytuacji, gdyby wyceniał koszyk drugiego uczestnika na kwotę ponad dziewięciokrotnie większą niż własny. Należałoby zatem podzielić wyceny przez odpowiednie uprawnienia:

$$x\ jest\ bez\ zazdrości \leftrightarrow \forall i,j \in G: \frac{u_j(x,j)}{w_j} \geq \frac{u_j(x,i)}{w_i}$$

Słuszność (*equitability)* – podział jest słuszny, jeżeli każdy uczestnik wycenia otrzymany przez siebie koszyk na taką samą część wartości całego zbioru dóbr:

$$\forall i,j \in G\colon \frac{u_i(x,i)}{C_i} = \frac{u_j(x,j)}{C_j}$$

Jeśli procedura generuje wyłącznie podziały słuszne, to nazwiemy ją *słuszną*.

Ten postulat także wydaje się nieprzystosowany do sytuacji nierównych uprawnień. Oczekiwalibyśmy raczej, że uczestnik o dwukrotnie większych uprawnieniach będzie oceniał otrzymany koszyk na kwotę równą dwukrotnie większej części wartości całego zbioru. Zatem i w tym przypadku należałoby podzielić wyceny przez uprawnienia:

$$x\ jest\ słuszny \leftrightarrow \forall i,j \in G\colon \frac{u_i(x,i)}{w_i C_i} = \frac{u_j(x,j)}{w_j C_j}$$

Odporność na zachowania strategiczne *(strategy-proofness)* – procedura spełnia ten postulat, jeśli żadnemu uczestnikowi podziału nie opłaca się podać nieszczerych ocen wartości dóbr.

Postulat ten pozostaje sensowny w sytuacji nierównych uprawnień.

Anonimowość *(anonymity)* – procedura jest anonimowa, jeśli nie uwzględnia innych cech uczestników podziału niż zadeklarowane oceny wartości dóbr.

Definicja ta nie przystaje do nowej sytuacji, gdyż nakazywałaby ona pomijać kluczową dla omawianego problemu informację o uprawnieniach. Na potrzeby tego artykułu przyjmujemy, że procedura jest anonimowa, jeśli nie uwzględnia innych cech uczestników podziału, niż **ich uprawnienia** i zadeklarowane oceny wartości dóbr.

Jak łatwo zauważyć, w sytuacji gdy wszyscy uczestnicy podziału mają równe uprawnienia, rozszerzone wersje postulatów są tożsame z klasycznymi.

4. Badane procedury podziału

W niniejszym artykule przeanalizowane zostaną cztery procedury:

1) Oryginalna procedura Knastera (K)
2) Poprawiona procedura Knastera (AK)
3) Procedura równych udziałów (ES)
4) Procedura drugich najwyższych cen (SP)

W modelu przyjmujemy następujące założenia:

1) Pieniądze są doskonale podzielne
2) Każdy uczestnik podziału ma liniową funkcję użyteczności na pieniądzach

3) Każdy uczestnik podziału jest w stanie wycenić wartość każdego z dóbr należącego do dzielonego zbioru, tj. podać taką kwotę pieniędzy, że uczestnik ten jest indyferentny między tym dobrem a tą kwotą
4) Użyteczność każdego podzbioru zbioru dzielonych dóbr jest dla każdego użytkownika równa sumie użyteczności elementów tego podzbioru (założenie o addytywności)
5) Każdy uczestnik dysponuje wolnymi środkami pieniężnymi wystarczającymi do wypłaty rekompensat (wystarczy kwota równa sumie własnych wycen rozdzielanych dóbr)

Żadna z powyższych procedur nie jest przystosowana do problemu podziału zbioru dóbr w sytuacji nierównych uprawnień. Poniżej przedstawione zostaną procedury najpierw w wersji oryginalnej, a następnie w wersji zmodyfikowanej do nowego problemu. Modyfikacja procedur przebiega analogicznie do modyfikacji poprawionej procedury Knastera przez Corradich (2002).

Oryginalna procedura Knastera (1946)

Najstarsza z omawianych procedur, spopularyzowana przez Hugo Steinhausa (1948, 1949).

Uczestnicy w tajemnicy przed sobą nawzajem dokonują oceny wartości dóbr należących do dzielonego zbioru. Każde dobro trafia do uczestnika, który wycenił je na najwyższą kwotę (w przypadku remisu decyduje arbiter). Dla każdego uczestnika wyliczany jest jego **sprawiedliwy udział**, równy $\frac{1}{n}$ sumy jego wycen. Uczestnicy, którzy otrzymali dobra, które łącznie wyceniają na kwotę większą niż ich sprawiedliwy udział, wpłacają różnicę do wspólnej kasy, a ci, którzy otrzymali dobra o mniejszej wartości niż ich sprawiedliwy udział, otrzymują różnicę ze wspólnej kasy. Następnie kwotę pozostałą we wspólnej kasie (nadwyżkę) rozdziela się równo między uczestników podziału.

Wartość koszyka otrzymanego przez *j*-tego uczestnika podziału:

$$u_j(x, j) = \frac{1}{n} C_j + \frac{b(x)}{n}$$

Pierwszym składnikiem sumy jest sprawiedliwy udział *j*-tego uczestnika, a drugim – otrzymana część nadwyżki.

Zmodyfikowana procedura Knastera (MK) różni się od oryginału w dwóch miejscach:

1) Sprawiedliwy udział jest równy iloczynowi posiadanych uprawnień i sumy wycen.
2) Nadwyżka jest dzielona proporcjonalnie do uprawnień.

Wartość koszyka otrzymanego przez *j*-tego uczestnika podziału:

$$u_j(x,j) = w_j C_j + w_j b(x)$$

Tutaj również pierwszym składnikiem sumy jest sprawiedliwy udział *j*-tego uczestnika, a drugim – otrzymana część nadwyżki.

Poprawiona procedura Knastera (Raith 2000)

Procedura przebiega jak procedura Knastera z wyjątkiem sposobu podziału nadwyżki. W poprawionej procedurze Knastera nadwyżka jest dzielona proporcjonalnie do sumy wycen. Dzięki tej zmianie generowane podziały są słuszne.

Wartość koszyka otrzymanego przez *j*-tego uczestnika podziału:

$$u_j(x,j) = \frac{1}{n} C_j + \frac{C_j}{\sum_g C_g} b(x)$$

Tutaj również pierwszym składnikiem sumy jest sprawiedliwy udział *j*-tego uczestnika, a drugim – otrzymana część nadwyżki.

Zmodyfikowana poprawiona procedura Knastera (Corradi 2002) również różni się od poprawionej procedury Knastera sposobem określania sprawiedliwego udziału (jest on równy iloczynowi posiadanych uprawnień i sumy wycen) oraz podziałem nadwyżki – jest on proporcjonalny do iloczynu odsetka posiadanych uprawnień i sumy wycen (czyli do sprawiedliwego udziału).

Wartość koszyka otrzymanego przez *j*-tego uczestnika podziału:

$$u_j(x,j) = w_j C_j + \frac{w_j C_j}{\sum_g (w_g C_g)} b(x)$$

Tutaj również pierwszym składnikiem sumy jest sprawiedliwy udział *j*-tego uczestnika, a drugim – otrzymana część nadwyżki.

Przykład 1. Zmodyfikowana procedura Knastera i zmodyfikowana poprawiona procedura Knastera – sposób obliczania podziału końcowego dla przykładowego profilu ocen wartości dóbr i wektora uprawnień

	Uczestnik			
	1	2	3	4
Uprawnienia	0,3	0,1	0,1	0,5
Wycena dobra A	100 zł	80 zł	50 zł	80 zł
Wycena dobra B	50 zł	120 zł	30 zł	60 zł
Wycena dobra C	50 zł	40 zł	80 zł	60 zł
Suma wycen	200 zł	240 zł	160 zł	200 zł
Sprawiedliwy udział	60 zł	24 zł	16 zł	100 zł

Otrzymane dobra	A	B	C	-
Różnica	40 zł	96 zł	64 zł	-100 zł
Udział w nadwyżce (MK)	30 zł	10 zł	10 zł	50 zł
Podział końcowy (MK)	A – 10 zł	B – 86 zł	C – 54 zł	150 zł
Udział w nadwyżce (MAK)	30 zł	12 zł	8 zł	50 zł
Podział końcowy (MAK)	A – 10 zł	B – 84 zł	C – 56 zł	150 zł

Procedura równych udziałów (Bożykowski, 2011)

Uczestnicy w tajemnicy przed sobą nawzajem dokonują oceny wartości dóbr należących do dzielonego zbioru. Każde dobro trafia do uczestnika, który wycenił je na najwyższą kwotę (w przypadku remisu decyduje arbiter). Uczestnik ten wpłaca do wspólnej kasy kwotę równą swojej ocenie wartości tego dobra. Zebrane w ten sposób pieniądze są następnie dzielone równo między uczestników podziału.

Wartość koszyka otrzymanego przez *j*-tego uczestnika podziału:

$$u_j(x, j) = \frac{1}{n}\sum_k M_k$$

Uczestnik nic nie zyskuje ani nie traci podczas rozdzielania dóbr. Jeśli nie otrzymuje dobra, nie musi za nie płacić, a jeśli otrzymuje – płaci za nie dokładnie tyle, ile jest dla niego warte. Zatem przed rozdzieleniem pieniędzy ze wspólnej kasy każdy uczestnik wycenia, że otrzymany przez niego koszyk (dobra i transfery) jest wart 0. Następnie pieniądze ze wspólnej kasy zostają rozdzielone równo między uczestników podziału. Wartość ostatecznie otrzymanego koszyka jest zatem równa kwocie otrzymanej ze wspólnej kasy.

Procedura proporcjonalnych udziałów (PS) przebiega podobnie, z tą jednak różnicą, że zebrane pieniądze są dzielone proporcjonalnie do uprawnień.

Wartość koszyka otrzymanego przez *j*-tego uczestnika podziału:

$$u_j(x, j) = w_j \sum_k M_k$$

W tym wypadku wartość ostatecznie otrzymanego koszyka również jest równa kwocie otrzymanej ze wspólnej kasy, jednak ze względu na zmianę sposobu podziału pieniędzy kwota ta może być inna.

Przykład 2. Procedura proporcjonalnych udziałów – sposób obliczania podziału końcowego dla przykładowego profilu ocen wartości dóbr i wektora uprawnień

	Uczestnik			
	1	2	3	4
Uprawnienia	0,3	0,1	0,1	0,5
Wycena dobra A	100 zł	80 zł	50 zł	80 zł
Wycena dobra B	50 zł	120 zł	30 zł	60 zł
Wycena dobra C	50 zł	40 zł	80 zł	60 zł
Otrzymane dobra	A	B	C	-
Do zapłaty	100 zł	120 zł	80 zł	0 zł
Otrzymana kwota	90 zł	30 zł	30 zł	150 zł
Podział końcowy	A – 10 zł	B – 90 zł	C – 50 zł	150 zł

Procedura drugich najwyższych cen (Bożykowski, 2011)

Uczestnicy w tajemnicy przed sobą nawzajem dokonują oceny wartości dóbr należących do dzielonego zbioru. Każde dobro trafia do uczestnika, który wycenił je na najwyższą kwotę (w przypadku remisu decyduje arbiter). Uczestnik ten wpłaca do wspólnej kasy kwotę w wysokości **drugiej najwyższej wyceny tego dobra**, podobnie jak ma to miejsce w aukcji Vickreya (1961). Zebrane w ten sposób pieniądze są następnie dzielone równo między uczestników podziału.

Wartość koszyka otrzymanego przez *j*-tego uczestnika podziału:

$$u_j(x,j) = \frac{1}{n}\sum_k M_k^2 + \sum_{k\in D(x,j)} (M_k - M_k^2)$$

Jeżeli uczestnik wycenił dane dobro najwyżej, to otrzymuje je za kwotę równą drugiej najwyższej wycenie tego dobra, zatem zyskuje na tym tyle, ile wynosi różnica między dwiema najwyższymi wycenami. Do wspólnej kasy trafia łącznie kwota równa sumie drugich najwyższych wycen poszczególnych dóbr. Kwota ta jest rozdzielana równo między uczestników podziału.

Zmodyfikowana procedura drugich najwyższych cen (MSP) różni się od oryginału tym, że zebrane pieniądze dzielone są proporcjonalnie do uprawnień[3].

Wartość koszyka otrzymanego przez *j*-tego uczestnika podziału:

$$u_j(x,j) = w_j\sum_k M_k^2 + \sum_{k\in D(x,j)} (M_k - M_k^2)$$

[3] Procedura równych uprawnień i procedura drugich najwyższych cen są analogiczne do aukcji charytatywnych odpowiednio najwyższych cen i drugich najwyższych cen przy założeniu, że dla każdego uczestnika użyteczność każdej złotówki uzyskanej przez organizację charytatywną jest równa $\frac{1}{n}$ złotówki w kieszeni. W przypadku modyfikacji tych procedur, użyteczność ta dla *i*-tego uczestnika wynosi w_i (por. Engers, McManus 2007).

Przykład 3. Zmodyfikowana procedura drugich najwyższych cen – sposób obliczania podziału końcowego dla przykładowego profilu ocen wartości dóbr i wektora uprawnień

	Uczestnik			
	1	2	3	4
Uprawnienia	0,3	0,1	0,1	0,5
Wycena dobra A	100 zł	80 zł	50 zł	80 zł
Wycena dobra B	50 zł	120 zł	30 zł	60 zł
Wycena dobra C	50 zł	40 zł	80 zł	60 zł
Otrzymane dobra	A	B	C	-
Do zapłaty	80 zł	60 zł	60 zł	0 zł
Otrzymana kwota	60 zł	20 zł	20 zł	100 zł
Podział końcowy	A – 20 zł	B – 40 zł	C – 40 zł	100 zł

W sytuacji, gdy wszyscy uczestnicy podziału mają równe uprawnienia, zmodyfikowane procedury są tożsame z ich oryginalnymi odpowiednikami.

5. Podstawowe własności procedur podziału

W poprzednim artykule (Bożykowski, 2011) zbadałem własności formalne procedur w sytuacji równych uprawnień (przy założeniu, że uczestnicy podają prawdziwe wyceny). Wyniki analiz przedstawione są w tabeli 1.

Tabela 1. Własności formalne procedur w sytuacji równych uprawnień

Procedura	Optymalność	Proporcjonalność	Wolność od zazdrości	Słuszność	Odporność na zachowania strategiczne	Anonimowość
K	tak	tak	nie	nie	nie	tak
AK	tak	tak	nie	tak	nie	tak
ES	tak	tak	tak	nie	nie	tak
SP	tak	tak	tak	nie	nie	tak

Jeżeli procedura nie spełnia któregoś postulatu, to jej modyfikacja również go nie spełnia. Niespełnianie postulatu jest równoważne z tym, że istnieje taki profil oceny wartości dóbr, dla którego podział wygenerowany przez daną procedurę nie posiada określonej pożądanej właściwości. Dla tego samego profilu ocen wartości dóbr i wektora uprawnień, którego wszystkie wyrazy są równe $\frac{1}{n}$ (tj. gdy uczestnicy mają równe uprawnienia), zmodyfikowana wersja procedury wygeneruje identyczny podział co jej oryginalny odpowiednik. Podział ten, oczywiście, nadal nie spełnia danego postulatu.

Należy zbadać, czy zmodyfikowane procedury spełniają wszystkie postulaty (oczywiście, w rozszerzonej wersji), które są spełniane przez ich oryginalne odpowiedniki. Mogłoby się okazać, że procedura spełnia dany postulat w sytuacji równych uprawnień, a jednocześnie istnieje taka para profilu ocen wartości dóbr i wektora uprawnień, dla której postulat ten nie jest spełniony.

Optymalność

Podział jest optymalny wtedy i tylko wtedy, gdy każde dobro trafia do tego uczestnika, który wycenił je najwyżej. Gwarantuje to najwyższą sumę łącznej wyceny wartości otrzymanych koszyków.

W przypadku, w którym dobro trafiłoby do uczestnika o wycenie niższej niż najwyższa, to mógłby przekazać to dobro uczestnikowi o najwyższej ocenie wartości tego dobra w zamian za kwotę równą swojej wycenie. Dzięki temu jeden z uczestników zyskałby na tej transakcji, a żaden nie poniósłby straty. Zatem podział, w którym dobro trafia do uczestnika o nie najwyższej wycenie, nie jest optymalny.

We wszystkich czterech badanych procedurach dobra zawsze trafiają do uczestników o najwyższej wycenie, zatem procedury te są optymalne.

Proporcjonalność

Wszystkie cztery badane procedury są proporcjonalne, tj.

$$\forall i \in G\colon u_i(x,i) \geq w_i C_i$$

Zmodyfikowana procedura Knastera

Wartość koszyka i-tego uczestnika podziału wynosi

$$u_i(x,i) = w_i C_i + w_i b(x)$$

Aby wykazać, że zmodyfikowana procedura Knastera jest proporcjonalna, wystarczy udowodnić, że otrzymywana część nadwyżki jest nieujemna. Zacznijmy od wykazania nieujemności całej nadwyżki. Nadwyżka wynosi

$$b(x) = \sum_k M_k - \sum_g \left(w_g C_g\right)$$

Wycena wartości dobra przez uczestnika podziału nie może być większa od maksymalnej wyceny:

$$\forall g \in G\colon c_{gk} \leq M_k$$

zatem suma jego wycen nie może być większa od sumy maksymalnych wycen

$$\forall g \in G\colon C_g \leq \sum_k M_k$$

Ponadto wiemy, że uprawnienia są dodatnie, a ich suma wynosi 1

$$0 < w_g < 1$$

$$\sum_g w_g = 1$$

zatem

$$\sum_k M_k \geq \sum_i \left(w_g C_g\right)$$

Wynika stąd, że nadwyżka jest nieujemna

$$b(x) \geq 0$$

Dodatnia część nieujemnej nadwyżki również jest nieujemna

$$w_i b(x) \geq 0$$

a zatem zmodyfikowana procedura Knastera jest proporcjonalna, CBDO.

$$w_i C_i + w_i b(x) \geq \; w_i C_i$$

$$u_i(x, i) \geq w_i C_i$$

Zmodyfikowana poprawiona procedura Knastera

Wartość koszyka i-tego uczestnika podziału wynosi

$$u_i(x, i) = \; w_i C_i + \frac{w_i C_i}{\sum_g \left(w_g C_g\right)} b(x)$$

W tym przypadku również wystarczy wykazać, że otrzymana część nadwyżki jest nieujemna. Wielkość nadwyżki jest taka sama jak w przypadku MK, różni się tylko sposób jej rozdzielenia między uczestników podziału. Również w tym przypadku uczestnicy otrzymują dodatnią część nieujemnej kwoty, a zatem kwotę nieujemną. Oznacza to, że MAK jest proporcjonalna.

$$u_i(x, i) \geq w_i C_i$$

Procedura proporcjonalnych udziałów

Wartość koszyka i-tego uczestnika podziału wynosi

$$u_i(x, i) = \; w_i \sum_k M_k$$

Jak wykazaliśmy wcześniej, suma wycen uczestnika nie może być większa od sumy maksymalnych wycen

$$\sum_k M_k \geq C_i$$

Po pomnożeniu obu stron przez uprawnienie uzyskujemy

$$w_i \sum_k M_k \geq w_i C_i$$

zatem

$$u_i(x, i) \geq w_i C_i$$

co oznacza, że PS jest proporcjonalna.

Zmodyfikowana procedura drugich najwyższych cen

Wartość koszyka i-tego uczestnika podziału wynosi

$$u_i(x, i) = w_i \sum_k M_k^2 + \sum_{k \in D(x,i)} (M_k - M_k^2)$$

Jeżeli i-ty uczestnik nie otrzymał danego dobra, to nie mógł go wycenić na więcej niż drugą najwyższą cenę

$$\forall k \notin D(x, i) \colon c_{ik} \leq M_k^2$$

zatem rekompensata za nieotrzymane dobra jest równa co najmniej sumie jego wycen tych dóbr pomnożonej przez jego uprawnienie

$$w_i \sum_{k \notin D(x,i)} M_k^2 \geq w_i \sum_{k \notin D(x,i)} c_{ik}$$

Jeżeli i-ty uczestnik otrzymał dane dobro, to zapłacił za nie drugą najwyższą cenę, a zatem nie więcej, niż jest ono dla niego warte. Różnica między dwiema najwyższymi wycenami stanowi jego zysk. Poza tym uczestnik otrzymuje z powrotem część kwoty wpłaconej do wspólnej kasy. Łącznie jest to nie mniej niż suma jego wycen otrzymanych dóbr pomnożona przez jego uprawnienie:

$$w_i \sum_{k \in D(x,i)} M_k^2 + \sum_{k \in D(x,i)} (M_k - M_k^2) \geq w_i \sum_{k \in D(x,i)} c_{ik}$$

Dodając do siebie obie nierówności otrzymujemy

$$w_i \sum_{k \notin D(x,i)} M_k^2 + w_i \sum_{k \in D(x,i)} M_k^2 + \sum_{k \in D(x,i)} (M_k - M_k^2) \geq w_i \sum_{k \notin D(x,i)} c_{ik} + w_i \sum_{k \in D(x,i)} c_{ik}$$

co daje się uprościć do postaci

$$u_i(x,i) \geq w_i C_i$$

co oznacza, że MSP jest proporcjonalna.

Wolność od zazdrości

W sytuacji równych uprawnień jedynie dwie z badanych procedur były wolne od zazdrości – procedura równych udziałów i procedura drugich najwyższych cen. Ich zmodyfikowane wersje w sytuacji, gdy uprawnienia są nierówne, także są wolne od zazdrości, tj.

$$\forall i,j \in G: \frac{u_j(x,j)}{w_j} \geq \frac{u_j(x,i)}{w_i}$$

Procedura proporcjonalnych udziałów

Wartość otrzymanych koszyków w oczach otrzymujących je uczestników wynosi odpowiednio

$$u_i(x,i) = \ w_i \sum_k M_k$$

$$u_j(x,j) = \ w_j \sum_k M_k$$

Przed rozdzieleniem pieniędzy ze wspólnej kasy i-ty uczestnik wycenia swój koszyk na 0

$$u'_i(x,i) = \ 0$$

J-ty uczestnik wycenia dobra otrzymane przez i-tego uczestnika na kwotę nie większą niż i-ty, zatem ten koszyk wycenia na nie więcej niż 0

$$u'_j(x,i) = \sum_{k \in D(x,i)} \left(c_{jk} - M_k\right) \leq \ 0$$

Następnie i-ty uczestnik otrzymuje ze wspólnej kasy kwotę równą $w_i \sum_k M_k$. Skoro przed dodaniem tej kwoty koszyk i-tego uczestnika był wart dla j-tego uczestnika co najwyżej 0, to po dodaniu tej kwoty jest dla niego wart co najwyżej $w_i \sum_k M_k$

$$u_j(x,i) \leq \; w_i \sum_k M_k$$

Dzieląc obie strony nierówności przez w_i otrzymujemy

$$\frac{u_j(x,i)}{w_i} \leq \sum_k M_k = \frac{u_j(x,j)}{w_j}$$

a zatem j-ty uczestnik nie zazdrości i-temu

$$\frac{u_j(x,j)}{w_j} \geq \frac{u_j(x,i)}{w_i}$$

CBDO

Zmodyfikowana procedura drugich najwyższych cen

Wartość otrzymanych koszyków w oczach otrzymujących je uczestników wynosi odpowiednio

$$u_i(x,i) = \; w_i \sum_k M_k^2 + \sum_{k \in D(x,i)} (M_k - M_k^2)$$

$$u_j(x,j) = \; w_j \sum_k M_k^2 + \sum_{k \in D(x,j)} (M_k - M_k^2)$$

J-ty uczestnik wycenia dobra otrzymane przez i-tego uczestnika na kwotę nie większą niż druga najwyższa wycena

$$\forall k \in D(x,i) \colon c_{jk} \leq M_k^2$$

Co za tym idzie, wartość koszyka i-tego uczestnika w oczach j-tego uczestnika przed rozdzieleniem pieniędzy ze wspólnej kasy wynosi nie więcej niż 0

$$u'_j(x,i) = \sum_{k \in D(x,i)} \left(c_{jk} - M_k^2\right) \leq \; 0$$

a po rozdzieleniu nadwyżki – co najwyżej tyle, ile i-ty uczestnik otrzymał ze wspólnej kasy

$$u_j(x,i) \leq w_i \sum_k M_k^2$$

Dzieląc obie strony nierówności przez w_i otrzymujemy

$$\frac{u_j(x,i)}{w_i} \leq \sum_k M_k^2$$

J-ty uczestnik wycenia otrzymany przez siebie koszyk na kwotę

$$u_j(x,j) = w_j \sum_k M_k^2 + \sum_{k \in D(x,j)} (M_k - M_k^2) \geq w_j \sum_k M_k^2$$

Dzieląc przez w_j otrzymujemy

$$\frac{u_j(x,j)}{w_j} \geq \sum_k M_k^2 \geq \frac{u_j(x,i)}{w_i}$$

a zatem *j*-ty uczestnik nie zazdrości *i*-temu

$$\frac{u_j(x,j)}{w_j} \geq \frac{u_j(x,i)}{w_i}$$

Słuszność

W przypadku równych uprawnień, spośród omawianych procedur jedynie poprawiona procedura Knastera spełnia postulat słuszności. Zmodyfikowana poprawiona procedura Knastera zachowuje tę własność, tj.

$$\forall i,j \in G: \frac{u_i(x,i)}{w_i C_i} = \frac{u_j(x,j)}{w_j C_j}$$

Zmodyfikowana poprawiona procedura Knastera

Wartość otrzymanych koszyków w oczach otrzymujących je uczestników wynosi odpowiednio

$$u_i(x,i) = w_i C_i + \frac{w_i C_i}{\sum_g (w_g C_g)} b(x)$$

$$u_j(x,j) = w_j C_j + \frac{w_j C_j}{\sum_g (w_g C_g)} b(x)$$

Po podzieleniu obu stron równania przez iloczyn uprawnień i sumy wycen danego uczestnika otrzymujemy odpowiednio

$$\frac{u_i(x,i)}{w_i C_i} = 1 + \frac{b(x)}{\sum_g (w_g C_g)}$$

$$\frac{u_j(x,j)}{w_j C_j} = 1 + \frac{b(x)}{\sum_g (w_g C_g)} = \frac{u_i(x,i)}{w_i C_i}$$

Zatem MAK spełnia postulat słuszności.

Ani zmodyfikowana procedura Knastera ani procedura proporcjonalnych udziałów nie spełnia postulatu słuszności, jednak w przypadku obu procedur jest on spełniany w specyficznej klasie przypadków – w sytuacji, gdy sumy ocen wartości dóbr wszystkich uczestników podziału są równe.

Zmodyfikowana procedura Knastera

Z definicji

$$x \text{ jest słuszny} \leftrightarrow \forall i, j \in G: \frac{u_i(x,i)}{w_i C_i} = \frac{u_j(x,j)}{w_j C_j}$$

Wartość otrzymanych koszyków w oczach otrzymujących je uczestników wynosi odpowiednio

$$u_i(x,i) = w_i C_i + w_i b(x)$$

$$u_j(x,j) = w_j C_j + w_j b(x)$$

Jeżeli podział x jest słuszny, wówczas

$$\frac{w_i C_i + w_i b(x)}{w_i C_i} = \frac{w_j C_j + w_j b(x)}{w_j C_j}$$

Po podzieleniu licznika przez mianownik otrzymujemy

$$1 + \frac{b(x)}{C_i} = 1 + \frac{b(x)}{C_j}$$

a zatem

$$C_i = C_j$$

Dowód wynikania w drugą stronę pozostawiam Czytelnikowi.

Procedura proporcjonalnych udziałów

Wartość otrzymanych koszyków w oczach otrzymujących je uczestników wynosi odpowiednio

$$u_i(x,i) = w_i \sum_k M_k$$

$$u_j(x,j) = w_j \sum_k M_k$$

Jeżeli podział x jest słuszny, to z definicji

$$\frac{u_i(x,i)}{w_i C_i} = \frac{u_j(x,j)}{w_j C_j}$$

a zatem

$$\frac{w_i \sum_k M_k}{w_i C_i} = \frac{w_j \sum_k M_k}{w_j C_j}$$

Po skróceniu ułamków uzyskujemy

$$\frac{\sum_k M_k}{C_i} = \frac{\sum_k M_k}{C_j}$$

a zatem

$$C_i = C_j$$

Dowód wynikania w drugą stronę pozostawiam Czytelnikowi.

Niestety, klasa przypadków, w których zmodyfikowana procedura drugich najwyższych cen generuje podziały słuszne, nie daje się przedstawić w równie prosty sposób.

Odporność na zachowania strategiczne

Żadna z czterech omawianych procedur nie jest odporna na zachowania strategiczne.

Anonimowość

Żadna z czterech omawianych procedur nie uwzględnia żadnych informacji o uczestnikach poza ich uprawnieniami i zadeklarowanymi ocenami wartości dóbr, a zatem procedury te spełniają postulat anonimowości.

Podsumowanie

Zmodyfikowane procedury podziału dóbr spełniają te same zestawy postulatów, co ich oryginalne odpowiedniki:

Tabela 2. Własności formalne procedur w sytuacji nierównych uprawnień

Procedura	Optymalność	Proporcjonalność	Wolność od zazdrości	Słuszność	Odporność na zachowania strategiczne	Anonimowość
MK	tak	tak	nie	nie	nie	tak
MAK	tak	tak	nie	tak	nie	tak
PS	tak	tak	tak	nie	nie	tak
MSP	tak	tak	tak	nie	nie	tak

Jest to wniosek napawający optymizmem. Oznacza to, że w sytuacji nierównych uprawnień procedury te nie tracą żadnej ze swoich pożądanych właściwości. Inaczej rzecz ujmując, jeśli uznaliśmy te procedury za wystarczająco dobre przy równych uprawnieniach, to powinniśmy uznać ich odpowiednio zmodyfikowane wersje za równie dobre w sytuacji nierównych uprawnień. Procedury te radzą sobie równie dobrze z podziałem spadku między spadkobierców o nierównych uprawnieniach, co w klasycznej sytuacji równych uprawnień.

6. Związki między własnościami podziałów generowanych przez poszczególne metody

Zmodyfikowana procedura Knastera – słuszność a brak zazdrości

Podobnie jak oryginalna procedura Knastera, procedura ta nie generuje nigdy podziałów jednocześnie słusznych i z zazdrością.

Z definicji

$$j\ zazdrości\ i \leftrightarrow \frac{u_j(x,j)}{w_j} < \frac{u_j(x,i)}{w_i}$$

Koszyk dóbr da się podzielić na koszyk przed rozdzieleniem nadwyżki i otrzymaną część nadwyżki. Uzyskujemy wtedy

$$\frac{u'_j(x,j) + w_j b(x)}{w_j} < \frac{u'_j(x,i) + w_i b(x)}{w_i}$$

co po uproszczeniu daje

$$\frac{u'_j(x,j)}{w_j} + b(x) < \frac{u'_j(x,i)}{w_i} + b(x)$$

a zatem

$$\frac{u'_j(x,j)}{w_j} < \frac{u'_j(x,i)}{w_i}$$

Przed rozdzieleniem nadwyżki każdy uczestnik wycenia otrzymany koszyk na kwotę równą swojemu sprawiedliwemu udziałowi, tj. $w_g C_g$, stąd

$$\frac{u'_j(x,j)}{w_j} = C_j$$

$$\frac{u'_i(x,i)}{w_i} = C_i$$

J-ty uczestnik wycenia dobra otrzymane przez i-tego uczestnika na kwotę nie większą niż i-ty, zatem koszyk i-tego uczestnika wycenia na nie większą kwotę niż i-ty

$$C_j < \frac{u'_j(x,i)}{w_i} \leq \frac{u'_i(x,i)}{w_i} = C_i$$

Wynika stąd, że j-ty uczestnik ma niższą sumę wycen niż i-ty

$$C_j < C_i$$

Jednak jak zostało już wcześniej wykazane (por. 5. *Słuszność*)

$$x\ generowany\ przez\ MK\ jest\ słuszny \leftrightarrow \forall i,j \in G: C_i = C_j$$

zatem niemożliwe jest, aby zmodyfikowana procedura Knastera generowała podziały jednocześnie słuszne i z zazdrością.

7. Porównanie własności procedur

Zmodyfikowana procedura Knastera a zmodyfikowana poprawiona procedura Knastera

Jeśli dla danego profilu ocen wartości dóbr zmodyfikowana procedura Knastera generuje podział, w którym j-ty uczestnik zazdrości i-temu, to zazdrości mu również przy podziale wygenerowanym dla tego profilu przez zmodyfikowaną poprawioną procedurę Knastera. Wynika z tego, że jeśli zmodyfikowana poprawiona procedura Knastera generuje podział cechujący się brakiem zazdrości, to zmodyfikowana procedura Knastera również.

Oznaczmy przez x podział generowany przez MK, a przez y podział generowany przez MAK.

$$j\ zazdrości\ i\ przy\ podziale\ x \leftrightarrow \frac{u_j(x,j)}{w_j} < \frac{u_j(x,i)}{w_i}$$

W przypadku MAK j-ty uczestnik wycenia otrzymany koszyk na kwotę równą

$$u_j(y,j) = w_j C_j + \frac{w_j C_j}{\sum_g (w_g C_g)} b(y)$$

a koszyk i-tego uczestnika na kwotę równą

$$u_j(y,i) = u'_j(y,i) + \frac{w_i C_i}{\sum_g (w_g C_g)} b(y)$$

Ponieważ MK i MAK różnią się tylko sposobem podziału nadwyżki, wyceny koszyków przed rozdzieleniem nadwyżki pozostają bez zmian

$$u'_j(y,i) = u'_j(x,i)$$

a zatem

$$C_j < \frac{u'_j(y,i)}{w_i}$$

Jak zostało już wykazane, jeśli przy podziale x generowanym przez MK j-ty uczestnik zazdrości i-temu, to ma niższą sumę wycen niż i-ty

$$\frac{u_j(x,j)}{w_j} < \frac{u_j(x,i)}{w_i} \rightarrow C_j < C_i$$

Jeżeli $C_j < C_i$, to prawdziwa jest także nierówność

$$\frac{C_j}{\sum_g (w_g C_g)} b(y) < \frac{C_i}{\sum_g (w_g C_g)} b(y)$$

Do lewej strony równania dodaję liczbę mniejszą niż do prawej, zatem poniższa nierówność także jest prawdziwa

$$C_j + \frac{C_j}{\sum_g (w_g C_g)} b(y) < \frac{u'_j(y,i)}{w_i} + \frac{C_i}{\sum_g (w_g C_g)} b(y)$$

Jednak tę nierówność da się zapisać prościej:

$$\frac{u_j(y,j)}{w_j} < \frac{u_j(y,i)}{w_i}$$

Zatem jeśli j-ty uczestnik zazdrości i-temu przy podziale generowanym przez MK, to zazdrości mu także przy podziale generowanym przez MAK.

8. Podsumowanie

Cztery omawiane procedury: oryginalna procedura Knastera, poprawiona procedura Knastera, procedura równych udziałów oraz procedura drugich najwyższych cen po zmodyfikowaniu ich celem dostosowania do problemu podziału dóbr w sytuacji nierównych uprawnień nie tylko zachowały swoje podstawowe właściwości (tj. spełniają te same postulaty), ale także bardziej złożone zależności – zmodyfikowana procedura Knastera, podobnie jak jej oryginalny odpowiednik, nie generuje nigdy podziałów jednocześnie słusznych i z zazdrością oraz generuje podziały bez zazdrości w szerszej klasie przypadków niż zmodyfikowana poprawiona procedura Knastera, tak jak w przypadku ich oryginalnych wersji.

Oznacza to, że nierówne uprawnienia nie stanowią problemu dla przedstawionych tu procedur. Żadna z nich nie utraciła żadnej z posiadanych pożądanych własności przy przejściu z równych do nierównych uprawnień. Ich użyteczność nie ogranicza się zatem, jak mogłoby się wydawać, do wąskiej kategorii sytuacji, w których wszyscy uczestnicy mają równe uprawnienia do dzielonego zbioru dóbr.

Bibliografia

Bożykowski, Marek. 2011. *Procedury podziału zbioru dóbr niepodzielnych z rekompensatami pieniężnymi*. „Decyzje" 15: 5-22.

Brams, Steven J., Alan D. Taylor. 1996. *Fair Division: From cake-cutting to dispute resolution*. Cambridge: Cambridge University Press.

Brams, Steven J., Alan D. Taylor. 1999. *The Win-Win Solution: Guaranteeing Fair Shares to Everybody*. New York: W.W. Norton & Company.

Corradi, Marco C., Valentina Corradi. 2002. *The Adjusted Knaster procedure under unequal entitlements*. „Decisions in Economics and Finance" 25: 157-160.

Engers, Maxim, Brian McManus. 2007. *Charity Auctions*. „International Economic Review" 48: 953-994

Knaster, Bronisław. 1946. *Sur le problème du partage pragmatique de H. Steinhaus*. „Annales de la Societé Polonaise de Mathematique" 19: 228-231.

Raith, Matthias G. 2000. *Fair-Negotiation Procedures*. „Mathematical Social Sciences" 39: 303-322.

Steinhaus, Hugo. 1948. *The Problem of Fair Division*. „Econometrica" 16: 101-104.

Steinhaus, Hugo. 1949. *Sur la division pragmatique*. „Econometrica" 17: 315-319.

Vickrey, William. 1961. *Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders*. „The Journal of Finance" 16: 8-37.