

ROBERT AUMANN

Marcin Malawski

**Instytut Podstaw Informatyki PAN
i Akademia Leona Koźmińskiego**

Wprowadzenie

Gdy piętnaście lat temu szwedzka Królewska Akademia Nauk po raz pierwszy przyznała Nagrodę Nobla w dziedzinie nauk ekonomicznych za pracę z teorii gier, dla wielu laików zaskoczeniem było nagrodzenie tak egzotycznej tematyki (w Polsce jeden ze znaczących tytułów prasowych informację o tej nagrodzie zatytułował „Nobel za pokera?”), natomiast wśród ekspertów można było spotkać się z reakcją typu: skoro już teoria gier, to dlaczego nie Aumann?

Rzeczywiście, o ile werdykt z 1994 o przyznaniu nagrody za „pionierską analizę równowagi w teorii gier niekooperacyjnych” dobrze uzasadnia ówczesny wybór laureatów¹, o tyle już wtedy Robert Aumann uchodził za „big bossa” światowej teorii gier. Wywarł on ogromny wpływ na wiele jej nurtów, a niektóre zapoczątkował; można bez większego ryzyka sformułować opinię, że nikt inny w tej dyscyplinie nie dorównuje mu pod względem rozległości zainteresowań badawczych. Aumann jest też ojcem kilku znaczących pojęć teorii gier (takich jak równowaga skorelowana, mocna równowaga czy zgoda na brak zgody), które – choć nie tak fundamentalne jak równowaga Nasha czy wartość Shapleya – bądź zapoczątkowały nowe kierunki badań, bądź po latach okazały się ważne w nowych kontekstach.

Komitet Noblowski uhonorował Aumanna razem z Thomasem Schellingiem nagrodą w 2005 r. „za polepszenie naszego rozumienia zjawisk konfliktu i współpracy poprzez analizy metodami teorii gier”. W oficjalnym uzasadnieniu [16] większość miejsca zajmuje omówienie prac Aumanna dotyczących gier powtarzanych. Warto jednak spostrzec, że te pozycje [2, 10] wcale nie należą do jego najczęściej cytowanych prac. Nawet gdyby nigdy ich nie napisał, byłby zapewne jednym z najpoważniejszych

¹ Sylwetki dwóch z nich prezentowaliśmy we wcześniejszych numerach *Decyzji* ([15], [14]).

kandydatów do Nagrody Nobla. Jego wyniki dotyczące gier i rynków z nieskończonymi zbiorami graczy są równie fundamentalne, problematykę wiedzy w grach zaczął badać jako pierwszy, ma poważne osiągnięcia w różnych innych obszarach teorii gier, a także w zastosowaniach.

W ostatnich dziesięcioleciach teoria gier stała się – w jakimś stopniu także za sprawą Aumanna – ustabilizowaną dziedziną wiedzy, mającą swoje niekwestionowane miejsce w nauce i edukacji. Aumann w dalszym ciągu pozostaje nie tylko jednym z jej czołowych twórców i animatorów (był m. in. pierwszym prezydentem Game Theory Society w latach 1999-2003), ale także – można powiedzieć – ambasadorem. Widzi ją jako „interdyscyplinę” badającą wszelkie interakcje z racjonalnego punktu widzenia i znajdującą zastosowanie wszędzie tam, gdzie występuje interakcja pomiędzy podmiotami działającymi każdy w swoim interesie (podobnie jak matematyka znajduje zastosowanie w każdej dziedzinie poddającej się sformalizowanemu opisowi).

Podczas zeszlórocznego popularnego wykładu w Warszawie powiedział m.in. półzartem, że to raczej ekonomia jest gałęzią teorii gier niż odwrotnie. Inne takie „gałęzie” to oczywiście socjologia, nauki polityczne, wojskowe, ale także prawo, informatyka czy biologia. Aumann przekonuje – i potrafi podać dobre argumenty – że w każdej z tych dyscyplin można owocnie stosować teorię gier.

Życiorys

Robert Aumann urodził się w 1930 r. we Frankfurcie nad Menem w zamożnej rodzinie żydowskiej. Rodzina planowała emigrację już wkrótce po dojściu Hitlera do władzy, długo jednak odwlekała ten krok, by ostatecznie wyjechać do Stanów Zjednoczonych na rok przed wybuchem wojny. Sam Aumann podaje tę historię jako przykład tego, jak nieraz będąc w środku wydarzeń trudniej prawidłowo ocenić sytuację niż obserwując je z dystansu. W Nowym Jorku Aumann ukończył studia matematyczne w City College, po czym w 1954 obronił doktorat w Massachusetts Institute of Technology. Następnie pracował w Princeton, a w 1956 przeniósł się do Izraela, gdzie od ponad pół wieku jest wierny tej samej uczelni – Uniwersytetowi Hebrajskiemu w Jerozolimie. Zwykle jednak spędza także dużo czasu w Stanach i pracuje w tamtejszych uczelniach i centrach badawczych.

Zaczynał od czystej matematyki, a w pracy doktorskiej – pisanej pod kierunkiem samego George’a Whiteheada – podał częściowe rozwiązanie trudnego klasycznego problemu teorii węzłów. Teorią gier pierwszy raz zajął się nieco przypadkiem, gdy zespołowi badań operacyjnych w Princeton, w którym był zatrudniony, zlecono pracę nad problemem najefektywniejszej obrony miasta przed atakiem bombowców, z któ-

rych tylko mała część ma ładunki atomowe. Z czasem wchodził coraz głębiej w teorię gier i jej dotyczy znakomita większość jego prac. Zdarzało mu się jednak też pisać znaczące prace czysto matematyczne – np. całkę Aumanna ([4]) studiują i stosują matematycy rozmaitych specjalności.

Aumann jest jednym z założycieli centrum badań racjonalności (Center for Rationality) na uniwersytecie w Jerozolimie, w którego pracach uczestniczą specjaliści wielu różnych dziedzin – matematycy, statystycy, ekonomiści, psychologowie, biologowie, informatycy, prawnicy – i chlubi się, że jest to jedyny w świecie ośrodek teorii gier o tak szerokim spektrum współpracowników. (W wywiadzie [12] wyrażał żal, że nie ma wśród nich lekarzy, bo także w medycynie racjonalne dążenie do maksymalizacji własnego poziomu zadowolenia jest bardzo istotne).

Ten szeroki horyzont widzenia – jak sam twierdzi – zawdzięcza zarówno znakomitemu i wszechstronnemu wykształceniu odebranemu w młodości, jak temu, że parokrotnie miał okazję pracować nad poważnymi problemami praktycznymi. Jedną z pierwszych jego prac było stworzenie algorytmu realokacji sprzętu (radarów, sonarów, radiostacji itp.) z okrętów wojennych wycofywanych ze służby przez US Navy na pozostające w służbie i nowe ([7]), zaś seria raportów [10] (podsumowana później w [9]) wzięła się z analizy dynamiki negocjacji rozbrojeniowych wielkich mocarstw w latach sześćdziesiątych.

Gry powtarzane

Gra powtarzana polega na wielokrotnym rozgrywaniu tej samej gry przez tych samych graczy. Gracze mogą wtedy uzależniać decyzje podejmowane w kolejnych rundach gry od przebiegu poprzednich rund, co umożliwia wystąpienie różnych zjawisk, na jakie w pojedynczej rozgrywce nie było miejsca: budowy reputacji, nagradzania (bądź karania) partnera za określone zachowania itp.

Już od lat pięćdziesiątych, czyli właściwie od zarania współczesnej teorii gier, specjaliści byli przekonani, że powtarzanie gry przez tych samych graczy sprzyja współpracy pomiędzy nimi – oczywiście tam, gdzie taka współpraca w ogóle ma sens. Nawet w klasycznym dylemacie więźnia, w którym zdradzenie partnera jest strategią dominującą, dziesiątki eksperymentów potwierdziły, że przy dostatecznie wielu powtórzeniach w tej samej parze graczy postępowanie lojalne jest raczej regułą niż wyjątkiem. Choć akurat w tej grze skończona liczba powtórzeń nie prowadzi do jakościowo nowych równowag Nasha w porównaniu z grą jednoetapową (łatwo pokazać, że w każdej równowadze gracze muszą zdradzać w każdym kroku), pojawiła się wiara

w to, że takie równowagi wystąpią w grze powtarzanej *nieskończenie* wiele razy². To przypuszczenie uzyskało później nazwę „folk theorem” – twierdzenia, w którego prawdziwość wierzy cały zainteresowany „lud”, ale nikt go nie udowodnił ani nawet porządnie nie sformułował.

W pracy [2] Aumann jako pierwszy zajął się grami powtarzanymi nieskończenie wiele razy i udowodnił mocną wersję „folk theorem”. Pokazał on – nieco upraszczając – że każdy układ wypłat, w którym każdy z graczy dostaje więcej niż w pewnej równowadze gry jednoetapowej, wystąpi w pewnej równowadze (i to nawet w tzw. mocnej równowadze, co w grach więcej niż dwóch graczy stanowi istotną różnicę) gry nieskończenie powtarzanej. Na przykład w dylemacie więźnia jedną z równowag prowadzących do korzystnych dla obu graczy wypłat przy postępowaniu lojalnym jest para strategii „wet za wet”: każdy z graczy w pierwszej rundzie zachowuje się lojalnie, a w każdej następnej tak, jak jego partner zachował się w poprzedniej.

Gra powtarzana jest rozsądnym modelem interakcji w czasie, te zaś w rzeczywistości występują nagminnie: konkurujący handlowcy wielokrotnie rozgrywają w tym samym gronie podobną grę ustalania cen na kolejne okresy, np. tygodnie, a związkowcy co roku negocjują z pracodawcą podwyżki płac. Aumann na tym polu zajmował się później właśnie zastosowaniami ([10]). Teoretycy zaś szczególnie żywo zajęli się grami powtarzanymi; sama „folk theorem” zainspirowała zapewne setki prac, z czasem okazało się też, że podobne wyniki można uzyskać dla gier – choć co prawda już nie wszystkich – powtarzanych skończenie wiele razy.

Gry bezatomowe i „duże” rynki

Do najczęściej cytowanych prac Aumanna należy seria artykułów rozpoczęta pracą [3] i ukoronowana napisaną wspólnie z Lloydem Shapleyem książką [11]. Dotyczą one gier i rynków z nieskończonymi zbiorami nieskończenie małych graczy. Idea takiej gry jest następująca: decyzja pojedynczego gracza nie ma wpływu na wynik gry, ale decyzje odpowiednio dużej grupy już mają.

Prosty i zresztą użyteczny model przyjmuje jako zbiór graczy odcinek $[0, 1]$ – każdy z graczy jest reprezentowany przez inny punkt tego odcinka. Taką grę nazywamy *bezaatomową*. Choć takie nieskończone gry nie występują w praktyce, stanowią one bardzo dobre i wygodne od strony matematycznej przybliżenie gier z dużą liczbą bardzo „ma-

² Wypłaty graczy w takiej grze są zdefiniowane jako sumy zdyskontowanych wypłat z poszczególnych powtórzeń gry, dzięki czemu są one skończone, i dodatkowo zostają przeskalowane w zależności od współczynnika dyskontowania, aby można je było sensownie porównać z wypłatami gry jednoetapowej.

łych” graczy. Sam Aumann dowcipnie stwierdził ([12]), że nawet wybory prezydenta USA w 2000 r. były grą bezatomową – żaden z pojedynczych wyborców, nawet na Florydzie, nie mógł wpłynąć na ich wynik (natomiast sędziowie Sądu Najwyższego mogli).

Grami z nieskończonymi zbiorami graczy jako pierwszy zajmował się w latach sześćdziesiątych Shapley z grupą współpracowników, nazywając je grami oceanicznymi i stosując do modelowania głosowań³. Aumann natomiast użył gry bezatomowej do analizy rynku z nieskończoną liczbą małych podmiotów gospodarczych i uzyskał fundamentalne twierdzenie o równoważności, będące uzupełnieniem pierwszej zasady ekonomii dobrobytu.

Zasada ta głosi, że w warunkach doskonałej konkurencji równowaga – tzn. taki układ cen dóbr oraz planów produkcyjnych i konsumpcyjnych wszystkich podmiotów rynkowych, przy którym każdy producent osiąga w ramach swych ograniczeń budżetowych maksymalny zysk, a każdy konsument maksymalny poziom zadowolenia, i dodatkowo podaź równoważy popyt – jest zawsze optymalna w sensie Pareto. Zbiór takich optymalnych produkcji i konsumpcji nazywamy *rdzeniem* rynku.

Na rynkach skończonych rdzeń jest zwykle większy niż zbiór alokacji równowagi. Natomiast na rynkach bezatomowych, jak pokazał Aumann, te dwa zbiory są identyczne – każdy układ planów produkcyjnych i konsumpcyjnych optymalny w sensie Pareto można otrzymać jako równowagę rynku przy pewnych cenach dóbr. Innymi słowy, do każdego takiego układu da się dojść przez zdecentralizowane decyzje podmiotów rynkowych – wystarczy ustalić odpowiednie ceny i umożliwić wszystkim graczom optymalizowanie na własną rękę.

Podsumowaniem tego nurtu prac Aumanna jest matematyczna książka [11] zestawiająca i rozwijająca techniki analizy gier bezatomowych.

Wspólna wiedza i problem zgody na brak zgody

Artykuł [5] jest zjawiskiem bardzo szczególnym. Ukazał się w jednym z najbardziej prestiżowych czasopism matematycznych. Tekst liczy trzy strony, w tym około połowy zajmuje werbalna dyskusja. Aumann zaczyna go od stwierdzenia, że publikuje swój wynik z pewną nieśmiałością, ponieważ po właściwym matematycznym ujęciu problemu samo twierdzenie jest oczywiste. Istotnie, pracę jest w stanie zrozumieć bystri student, a dowód twierdzenia jest elementarny. Tymczasem praca doczekała się setek cytowań i zapoczątkowała całą nową dziedzinę wiedzy.

³ Shapley dopuszcza w takich grach, obok „oceanu” graczy „małych”, także skończenie wielu graczy „dużych” – na przykład dużych akcjonariuszy spółki, którzy odkupili wszystkie akcje od istotnej części graczy „małych”, np. wszystkich z przedziału od 0,8 do 0,95.

Aumann udowodnił, że jeśli dwie osoby mają taki sam subiektywny rozkład a priori prawdopodobieństwa na pewnej rodzinie zdarzeń i ich rozkłady prawdopodobieństwa a posteriori – uaktualnione w wyniku nabycia pewnej prywatnej informacji, być może różnej dla każdej z osób – stanowią wspólną wiedzę ich obojga, to także one muszą być jednakowe. Innymi słowy, osoby takie nie mogą zgodzić się co do tego, że się nie zgadzają. Wspólna wiedza dwóch osób o pewnym fakcie A oznacza, że:

- obie wiedzą, że zachodzi A,
- każda z nich wie, że druga wie, iż zachodzi A,
- osoba 1 wie, że osoba 2 wie, że 1 wie o A i podobnie 2 wie, że 1 wie, że 2 wie o A itd... --

prawdziwe jest każde zdanie będące takim skończonym ciągiem. Można pokazać, że w różnych twierdzeniach teorii gier niezbędnym założeniem jest wspólna wiedza wszystkich graczy o rozgrywanej grze. Gdy tej wspólnej wiedzy nie ma, mamy do czynienia z grą z *niekompletną informacją*, której analiza jest zazwyczaj znacznie trudniejsza.

Aumann już wcześniej zajmował się subiektywnym prawdopodobieństwem – jest między innymi współautorem ważnej pracy [1]. Jednak w [5] istotniejsza od samego sformułowanego powyżej twierdzenia jest formalna definicja wspólnej wiedzy o zdarzeniu przy zastosowaniu rozbitcia informacyjnego zbioru wszystkich możliwych stanów świata jako opisu posiadanej informacji⁴. Sama idea takiego rozbitcia była obecna w teorii gier już od lat pięćdziesiątych (zbiory informacyjne), a Aumann wprowadzając pojęcie wspólnej wiedzy, nie był pierwszy – wcześniej pod tą samą nazwą określił je filozof David Lewis [13]. Jednak dopiero dokonana przez Aumanna formalizacja rozpoczęła rozwój kierunku badań zwanego uczenie „epistemologią interakcyjną”. Zajmuje się on, najkrócej mówiąc, zagadnieniami wiedzy o wiedzy innych podmiotów i poza samą teorią gier [6] ma szerokie zastosowania – od ekonomii (rynków finansowe) po informatykę.

Postać

Aumann nie jest typem uczonego spędzającego całe życie przy biurku. Był zapalonym (i dobrym) narciarzem, uprawiał wspinaczkę skałkową, dużo podróżuje i lubi gotować. Dochował się dziewiętnastoletniego wnuka i uważa swe życie rodzinne za wyjątkowo szczęśliwe.

Jest znany ze zdecydowanych poglądów na różne tematy okołonaukowe, niekiedy niezgodnych z aktualną opinią większości. Parokrotnie miałem okazję słyszeć lub czytać jego druzgocące sądy o badaniach opinii publicznej, ilustrowane rozmaity-

⁴ W tym ujęciu decydent może nie wiedzieć, jaki jest rzeczywisty stan świata, ale wie, do którego z (rozłącznych) zbiorów rozbitcia ten stan należy.

mi przykładami uderzająco nietrafionych wyników. Kilka lat temu, w parę godzin po wyborach w Izraelu, 90% zapytanych, czy brali w nich udział, odpowiedziało „tak”, podczas gdy rzeczywista frekwencja wyniosła 68%. Skąd taki błąd? Aumann tłumaczy to racjonalnością reguł postępowania (*rule rationality*), którą człowiek przyswaja – niekoniecznie świadomie – z doświadczeniem i która może stać w sprzeczności z racjonalnością poszczególnych działań; w tym wypadku ma ona prowadzić do tego, że ludzie, starając się (jak zwykle) być mili dla rozmówcy, odruchowo udzielają tej odpowiedzi, którą ich zdaniem ankieter chciałby usłyszeć.

W podobny sposób można także rozsądnie objaśniać powszechnie obserwowane w eksperymentach z grami typu ultimatum odrzucanie mało korzystnych ofert. Racjonalność nakazuje taką ofertę przyjąć. Gdy jednak ją odrzucę, odejdę wprawdzie od stołu z niczym, ale ten, kto mi ją złożył, zostanie za to ukarany i na przyszłość dobrze się zastanowi, nim złoży mi podobną. Akurat w tych eksperymentach nie ma „przyszłości”, a gracze nie znają partnerów, ale racjonalność reguł postępowania nakazuje, by nie dawać sobą pomiatać.

Także o ekonomii eksperymentalnej, studiującej „nieracjonalne” postępowanie ludzi w eksperymentach laboratoryjnych, Aumann nie ma zbyt wysokiego mniemania: jego zdaniem trudno oczekiwać racjonalności w sztucznie kreowanych sytuacjach, z jakimi ludzie nie mają do czynienia w normalnym życiu. Decyzje podjęte w laboratorium nie mówią wiele o decyzjach w rzeczywistości ekonomicznej, a jeszcze gorzej jest, gdy badani nie mają naprawdę zdecydować, a tylko powiedzieć, jaką decyzję podjęliby, gdyby... – takie odpowiedzi o rzeczywistym postępowaniu nie mówią nic.

Aumann jest religijnym żydem, ściśle przestrzega szabasu i potrafi pójść po poradę w kwestii moralnej do rabina. W młodości wręcz rozważał poświęcenie się studiom talmudycznym i w Nowym Jorku przez pewien czas uczęszczał równolegle na uniwersytet i do jesziwy. Co ciekawe, nabyta tam wiedza znajduje odbicie w jego ściśle matematycznej twórczości. Piękna praca [8] opisująca rozwiązanie pewnej klasy gier kooperacyjnych, tzw. gier bankructwa, obraca się wokół fragmentu Talmudu, który ma zalecać dokładnie ten sam podział masy upadłościowej, co reguła wymyślona w ogólniejszym kontekście przez matematyków w roku 1969.

Artykuł [8] zaczyna się słowami „Człowiek umiera, pozostawiając długi d_1, d_2, \dots, d_n przewyższające jego majątek E . Jak należy rozdzielić majątek między wierzycieli?” Taka forma jest bardzo charakterystyczna dla prac Aumanna. Jest on znakomitym pisarzem, a jego prace są nie tylko starannie dopracowane – wspomina m. in., jak kiedyś przez pół godziny kłócił się z Shapleyem o jeden przecinek w ich wspólnym tekście – ale także zorientowane na czytelnika. Aumann zawsze stara się go zaciekawić i dba o zilustrowanie nawet trudnych tematów prostymi i przemawiającymi do wyobraźni przykładami.

To samo można powiedzieć o jego wykładach i referatach konferencyjnych. Słuchacz nie zawsze rozumie je w całości – bywają trudne – ale zawsze dostrzega, że wykładowca dołożył starań, by on zainteresował się i zrozumiał jak najwięcej. Często cały wykład jest osnuty na jednym konkretnym przykładzie.

Rok temu Aumann wygłosił gościnny wykład dla pracowników i studentów Akademii Leona Koźminkiego w Warszawie. Wybrał wtedy jako temat „*Game engineering*” – projektowanie (szeroko pojętych) gier, tzn. reguł gry, w taki sposób, aby osiągnąć społecznie pożądane cele. Ten bardzo obszerny temat obejmuje tak różne zagadnienia, jak np. konstrukcja ordynacji wyborczych i planowanie sieci dróg. W obu przypadkach chodzi o to, by reguły gwarantowały racjonalnie dopasowującym się do nich decydentom – wyborcom, kierowcom – jak najwyższy poziom satysfakcji; przy błędach w projektowaniu możliwa jest na przykład sytuacja taka, że otwarcie nowej drogi wydłuży czas spędzany w korkach. Wykład był popularny i osoby znające tematykę nie dowiedziały się wiele nowego, ale tradycyjnie został świetnie i żywo poprowadzony i pełna sala wysłuchała go z dużą ciekawością.

Zaś po tym wykładzie na pytanie studenta chcącego wiedzieć, jak noblista z ekonomii zainwestował pieniądze z nagrody (jakżeby inaczej w Polsce w roku 2008), uczony odpowiedział mniej więcej tak: „To nie jest szczególnie ważne. W moim wieku czas jest dobrem ważniejszym od pieniędzy i to przede wszystkim czas staram się dobrze inwestować”.

Bibliografia

- [1] Anscombe, F.J. i Aumann, R. 1963. *A definition of subjective Probability*. „Annals of Mathematical Statistics” 34: 199-205.
- [2] Aumann, R. 1959. *Acceptable points in general cooperative n-person games*, [w:] Contributions to the Theory of Games IV. Annals of Mathematics Study 40 wyd. H. Kuhn i A.W. Tucker. Princeton University Press: 307-317.
- [3] Aumann, R. 1964. *Markets with a Continuum of Traders*. „Econometrica” 32: 39-30.
- [4] Aumann, R. 1965. *Integrals of set-valued functions*. „Journal of Mathematical Analysis and Applications” 12: 1-12.
- [5] Aumann, R. 1976. *Agreeing to disagree*. „Annals of Statistics” 4: 1236-1239.
- [6] Aumann, R. 1995. *Backward induction and common knowledge of Rationality*. „Games and Economic Behavior” 8: 6-19.
- [7] Aumann, R. i Kruskal, J.B. 1959. *Assigning quantitative values to qualitative factors in the naval electronics problem*. „Naval Research Logistics Quarterly” 6: 1-16.
- [8] Aumann, R. i Maschler, M. 1985. *Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud*. „Journal of Economic Theory” 36: 195-213.
- [9] Aumann, R. i Maschler, M. 1995. *Repeated Games with Incomplete Information*. MIT Press.

- [10] Aumann, R., Maschler, M. i Stearns, R. *Game theoretic aspects of gradual disarmament. Repeated games of incomplete information*. Niepublikowane raporty firmy „Mathematica” (1966-1968).
- [11] Aumann, R. i Shapley, L. 1974. *Values of Non-Atomic Games*. Princeton University Press.
- [12] Hart, S. 2005. *An interview with Robert Aumann*. „Macroeconomic Dynamics” 9: 683-740.
- [13] Lewis, D. 1969. *Convention: a philosophical study*. Harvard University Press.
- [14] Malawski, M. 2005. *Reinhard Selten*. „Decyzje” 4: 2005.
- [15] Roy, J. 2004. *Fundamentalny wkład Johna Nasha w rozwój teorii Gier*. „Decyzje” 2.
- [16] Kungl Vetenskapsakademien. *Robert Aumann's and Thomas Schelling's Contributions to Game Theory: Analyses of Conflict and Cooperation* http://nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/2005/ecoadv05.pdf