

Zastosowanie modeli czynnikowych w zarządzaniu portfelowym ryzykiem kredytowym na przykładzie kredytów hipotecznych i gotówkowych

Nadesłany 23.04.12

Zaakceptowany do druku 16.08.12

Piotr Osiński | Bank Gospodarki Żywnościowej | p_osin@wp.pl

Abstrakt

Cel: W literaturze przedmiotu i w praktyce brakuje jednolitego standardu pomiaru portfelowego ryzyka kredytowego w odniesieniu do kredytów detalicznych. Dlatego w niniejszym artykule autor stawia sobie za cel przybliżenie możliwości użycia tzw. modeli czynnikowych w zarządzaniu portfelowym ryzykiem kredytowym instytucji kredytowej.

Metoda: Autor przedstawia analizę teoretyczną własności modeli czynnikowych, a następnie ilustruje ich zastosowanie na przykładzie danych o kredytach hipotecznych i kredytach gotówkowych pochodzących z jednej z dużych instytucji kredytowych licencjonowanych w Polsce. W artykule wykorzystane są narzędzia analizy wrażliwości.

Wnioski: Znaczące różnice w wyliczonych kredytowych wartościach zagrożonych wskazują na niezwykle istotną rolę założeń poszczególnych wersji modeli oraz doboru parametrów przy wykorzystaniu tej grupy modeli. Ponadto, sugeruje to konieczność używania dodatkowych narzędzi weryfikacji poprawności wyliczeń, takich jak np. analiza warunków skrajnych czy też wiedza ekspercka.

Oryginalność: Wkład w literaturę przedmiotu jest dwójaki. Przede wszystkim w artykule został przedstawiony sposób wykorzystania modeli czynnikowych dla portfeli detalicznych ekspozycji kredytowych oraz uzyskane na podstawie danych empirycznych wyniki kalkulacji kredytowej wartości zagrożonej. Dodatkowo zanalizowana została wrażliwość kredytowych wartości zagrożonych na dobór modelu oraz parametrów ryzyka.

Słowa kluczowe: modele czynnikowe, modele ryzyka kredytowego, kredytowa wartość zagrożona

The Use of Factor Models in Portfolio Credit Risk Management of Mortgage Backed Housing Loans and Cash Loans Portfolios

Primary submission 23.04.12
Final acceptance 16.08.12

Abstract

Purpose: Within literature as well as in practice there is no one common standard of measuring portfolio credit risk of credit exposures toward retail clients. Therefore, the Article's goal is to present the possibility of using for these purposes so called factor models.

Approach: The article presents theoretical analysis of factor models' properties and then is illustrating their usage basing on the data on mortgage backed housing loans and cash loans from one of the biggest credit institutions licensed in Poland. In the article techniques of stress testing analysis are being used as well.

Findings: The significant differences in credit value at risk estimates indicate that parameters and assumptions of factor models have a critical role when we try to use this group of models. Additionally, the results suggest that it is necessary to use verification tools like stress tests or expert knowledge.

Value: The article extends the literature findings in two aspects. First, it presents how to use factor models for retail loans portfolios and shows the results of CVaR estimates basing on empirical data. Second, it verifies the sensitivity of CVaR estimates to model selection and risk parameters.

Keywords: factor models, credit risk models, credit value at risk

JEL: C02, G21, G23, G32

Przyczyny rozwoju modeli pomiaru portfelowego ryzyka kredytowego

W XXI w. modele pomiaru portfelowego ryzyka kredytowego są powszechnie wykorzystywanym narzędziem w procesie zarządzania ryzykiem kredytowym. Istnieje wiele przyczyn, które doprowadziły do tej sytuacji. W celu przejrzystego ich przedstawienia w artykule podzielono je na wynikające z: wymogów regulacyjnych, sytuacji rynkowej oraz rozwoju nauki i technologii. W przypadku tych pierwszych z pewnością istotnym czynnikiem wpływającym na wzrost zainteresowania modelami pomiaru portfelowego ryzyka kredytowego, na który zwraca uwagę A. Saunders, były propozycje Banku Rozrachunków Międzynarodowych w postaci Nowej

Umowy Kapitałowej (NUK, Basel II), dotyczące adekwatności kapitałowej (Huschens, Vogl, Wania 2004), które po wdrożeniu do krajowego ustawodawstwa stały się w wielu krajach powszechnie obowiązującymi wymaganiami. Poprzez wdrożenie propozycji Banku Rozrachunków Międzynarodowych instytucje nadzorcze dążyły do sytuacji, w której instytucje kredytowe dysponują kapitałem w wartości niezbędnej do pokrycia strat nieoczekiwanych, a tym samym są zabezpieczone przed niewypłacalnością (Schmid 2003). Można powiedzieć, że opracowanie NUK, a w konsekwencji większy nacisk na budowę i wdrażanie modeli pomiaru ryzyka kredytowego, było odpowiedzią na „słabość” poprzednich rozwiązań proponowanych przez Bank Rozrachunków Międzynarodowych w zakresie zasad kalkulacji regulacyjnych wymogów kapitałowych z tytułu ryzyka kredytowego, znanych pod nazwą Basel I. Nowa Umowa Kapitałowa z jednej strony pozwala na dokładniejsze wyliczenie regulacyjnego wymogu kapitałowego poprzez zróżnicowanie poszczególnych kontrahentów pod kątem ryzyka, jakie jest z nimi związane w przypadku stosowania metod zaawansowanych, czy też poprzez wyróżnienie większej liczby klas ryzyka dla metody standardowej. Z drugiej strony poprzez wprowadzenie konieczności wyliczania kapitału ekonomicznego pozwala na uwzględnienie efektu dywersyfikacji w zarządzaniu ryzykiem kredytowym. Należy pamiętać, że Nowa Umowa Kapitałowa wręcz wymusza na instytucjach kredytowych rozwijanie modeli pomiaru ryzyka kredytowego (Jarrov, van Deventer 2004), jeśli chcą one być obciążone niskim wymogiem kapitałowym i tym samym – konkurencyjne w stosunku do innych instytucji. Jest to szczególnie istotne w sytuacji rynkowej, w której instytucje kredytowe cierpią na brak kapitału.

W ostatnich latach pomiar ryzyka kredytowego z wykorzystaniem odpowiednich modeli stał się jednym z podstawowych wyzwań w ogólnie pojętym procesie zarządzania ryzykiem, na co z pewnością znaczący wpływ miała **sytuacja rynkowa**. Związane jest to przede wszystkim z faktem, że w relacji do posiadanych kapitałów wartość portfeli ekspozycji kredytowych instytucji kredytowych jest znacząca, a tym samym istotne jest ryzyko kredytowe, jakie biorą one na siebie. Wysoki poziom ryzyka kredytowego dla instytucji kredytowych ma z kolei poważne konsekwencje dla sposobu zarządzania nim. Oczywiście jest, że znaczące zagrożenie wynikające z działalności kredytowej wiąże się z koniecznością wdrożenia odpowiednich sposobów zarządzania oraz pomiaru ryzyka. Między innymi dlatego pojawiła się potrzeba opracowania bardziej wyrafinowanych technik pomiaru ryzyka dających podstawy do jego skutecznego ograniczania (Morgan 1997). W konsekwencji doprowadziło to do ekspansji metod ilościowych, zwłaszcza do powstania oraz rozwoju modeli pomiaru portfelowego ryzyka kredytowego. Znacząca wartość portfela ekspozycji kredytowych instytucji kredytowych nie jest jedyną przyczyną rynkową wpływającą na dynamiczny rozwój modeli pomiaru portfelowego ryzyka kredytowego. Na inne, równie istotne przyczyny rozwoju modeli omawianego rodzaju zwrócił uwagę A. Saunders (2001). Do głównych przyczyn zaliczył on sytuację na rynkach finansowych, ze szczególnym uwzględnieniem wzrostu liczby bankructw², a także wzrastającą konkurencję w zakresie walki o klienta o słabszej kondycji finansowej, która skutkuje ograniczaniem marż przez instytucje kredytowe. Szczególną rolę wzrostu konkurencji w sek-

² Bankructwa w Stanach Zjednoczonych w latach 1995–1997.

torze bankowym w kontekście rozwoju modeli pomiaru portfelowego ryzyka kredytowego podkreślił również W. Kuryłek, powołując się na badania przeprowadzone przez T. Wilsona (1998). Rosnąca konkurencja wymuszała na instytucjach kredytowych większą konkurencyjność cenową, umożliwiającą zachowanie już obsługiwanych klientów, a także pozyskiwanie nowych klientów. Z drugiej strony świadomość zagrożenia wymuszała zachowanie odpowiedniego poziomu bezpieczeństwa. Wśród przesłanek rozwoju modeli pomiaru ryzyka kredytowego z pewnością istotną rolę odegrały także takie czynniki jak: rozwój rynku wtórnego kredytowych instrumentów pochodnych wynikający także m.in. z wzrostu konkurencyjności oraz chęci usprawnienia procesu zarządzania ryzykiem kredytowym (Jackowicz 2001), a także coraz większy poziom ich zaawansowania (Caouette et al. 2008). Oba te czynniki wymieniane są w artykułach W. Kuryłka (2003) czy też T. Wilsona (1998) i przedstawiane jako istotne dla rozwoju modeli pomiaru portfelowego ryzyka kredytowego.

Powyżej przedstawione zostały przesłanki rozwoju modeli pomiaru portfelowego ryzyka kredytowego związane z wymogami regulacyjnymi oraz sytuacją rynkową. Nie można jednak zapominać o wymiernej roli nakładów przeznaczanych przez instytucje kredytowe na dalszy rozwój technik pomiaru ryzyka kredytowego z powodu potencjalnych korzyści płynących z zastosowania modeli pomiaru ryzyka kredytowego (Hull 2000). Zmianom w sposobie modelowania ryzyka kredytowego sprzyjał niewątpliwie także rozwój technologii oraz związana z tym możliwość gromadzenia niezbędnych do modelowania danych oraz możliwość wykorzystania zaawansowanych modeli matematycznych pozwalających na przykład na modelowanie grubych „ogonów” rozkładu strat. Wśród przyczyn rozwoju modeli pomiaru portfelowego ryzyka kredytowego związanych z nauką oraz technologią znaczącą rolę odegrały również nowe publikacje oraz rozwiązania proponowane w tym obszarze. Można powiedzieć, że fundamentalne dla rozwoju modeli pomiaru ryzyka kredytowego były prace: F. Blacka i M. Scholesa (1973) oraz R. Mertona (1973). Z jednej strony stwarzały one solidne fundamenty do pomiaru ryzyka kredytowego, z drugiej zaś motywowały do dalszego rozwoju modeli. Motywacja ta wynikała przede wszystkim ze świadomości czytelników, że rozwiązania omawiane w tych publikacjach nie są pozbawione wad wpływających na poprawność pomiaru ryzyka kredytowego (Young, Helwege, Jing-Zhi, 2004). Podsumowując przyczyny rozwoju modeli pomiaru portfelowego ryzyka, można przywołać opinie R. Gallatiego (2003) oraz A. Saundersa i L. Allen (2002). Jako główne przyczyny rozwoju modeli wskazują oni: pojawienie się nowych norm w zakresie adekwatności kapitałowej, pogorszenie jakości kredytowej kontrahentów, konieczność wprowadzenia bardziej konkurencyjnych marż, pojawienie się nowych instrumentów, a także rozwój technologii.

| Teoria modeli czynnikowych pomiaru portfelowego ryzyka kredytowego

Jednym z głównych rodzajów modeli pomiaru portfelowego ryzyka kredytowego są modele czynnikowe. Znajdują one szerokie zastosowanie w praktyce rynkowej. W szczególności modelem czynnikowym jest model proponowany w ramach metod zaawansowanych Nowej Umowy Kapitałowej.

► Model jednoczynnikowy

Najprostszą wersją omawianego typu modeli jest model jednoczynnikowy. Jest to model zakładający, że zmiana wartości aktywów dłużnika $V_{k,s}$ s -tego dłużnika w k -tym portfelu, zgodnie z wzorem (1) zależna jest od jednego czynnika systematycznego Y_k wspólnego dla wszystkich kredytobiorców z k -tego portfela oraz od jednego czynnika specyficznego $\varepsilon_{k,s}$ charakterystycznego dla poszczególnych kredytobiorców k -tego portfela kredytowego. Zarówno zmiana wartości aktywów, jak i oba czynniki (systematyczny i swoisty) mają standardowe rozkłady normalne. Zachowanie wszystkich kredytobiorców jest ze sobą powiązane, ponieważ każdy z dłużników pozostaje pod wpływem działania czynnika Y_k . Siłę oddziaływania czynnika Y_k określa współczynnik korelacji ρ_k . Można powiedzieć, że czynnik systematyczny Y_k odzwierciedla stan gospodarki czy też reprezentuje cykle gospodarcze (Forest, Belkin, Suchower 1998) i w dobrych latach przyjmuje dużą wartość, zmniejszając prawdopodobieństwo niewypłacalności, natomiast w złych latach ma niską wartość, zwiększając prawdopodobieństwo niewypłacalności. Należy zaznaczyć, że czynnik systematyczny oraz czynniki specyficzne są niezależne (Huschens, Vogl, Wania 2004) oraz przyjęte jest założenie, że mają rozkład normalny $N(0,1)$.

$$V_{k,s} = \sqrt{\rho_k} Y_k + \sqrt{1 - \rho_k} \varepsilon_{k,s} \quad (1)$$

dla każdego $s < S$

Zgodnie z modelem jednoczynnikowym niewypłacalność następuje w momencie, gdy wartość aktywów $V_{k,s}$ spadnie poniżej określonego progu. Tym samym, oprócz ustalenia wartości aktywów w celu oszacowania bezwarunkowego prawdopodobieństwa niewypłacalności (tj. niezależnego od wartości czynnika systematycznego Y_k), konieczne jest określenie wartości progu, przy którym klient staje się niewypłacalny. Próg ten, oznaczany jako $K_{k,s}$, określa się zgodnie z wzorem (2).

$$K_{k,s} = \Phi^{-1}(p_{s,k}) \quad (2),$$

gdzie Φ^{-1} jest funkcją odwrotną do dystrybuanty rozkładu normalnego, a $p_{s,k}$ oznacza długookresowe (średnie) prawdopodobieństwo niewypłacalności.

W omawianym modelu w celu oszacowania bezwarunkowego prawdopodobieństwa niewypłacalności przyjmowane są założenia, że ekspozycje w portfelu są jednakowej wartości oraz że próg niewypłacalności jest wspólny dla wszystkich ekspozycji, tj. $K_{k,s} = K_k$. Warto zaznaczyć, że założenie o wspólnej wartości progowej jest znaczącym uproszczeniem modelu, które jednocześnie wydaje się usprawiedliwione w przypadku jednorodnych portfeli kredytowych. Przy założeniach opisanych powyżej średnie (długookresowe) prawdopodobieństwo niewypłacalności klienta z k -tego portfela wyznaczone jest na podstawie wzoru:

$$p_{s,k} = P[V_{k,s} < K_k] \quad (3).$$

W momencie gdy określone jest średnie prawdopodobieństwo niewypłacalności klienta, możliwe jest przejście do wyznaczania rozkładu prawdopodobieństwa niewypłacalności na poziomie portfela kredytowego. Przy założeniu o niezależności ekspozycji, czyli w przypadku, gdy ρ_k jest równe 0, prawdopodobieństwo n niewypłacalności w portfelu kredytowym szacowane jest zgodnie z wzorem (4):

$$f(n) = \binom{N_k}{n} (p_{k,s})^n (1 - p_{k,s})^{N_k - n} \quad (4).$$

Z uwagi na to, że w rzeczywistości korelacja nie jest jednak zerowa, niezwykle istotną rolę odgrywa wykorzystanie warunkowej niezależności niewypłacalności. Innymi słowy należy skorzystać z faktu, że dla określonej realizacji y_k czynnika systematycznego Y_k , niewypłacalności są od siebie niezależne (Perli, Nayda 2003). W takiej sytuacji, analogicznie jak powyżej, wyznacza się prawdopodobieństwo niewypłacalności klienta, przy czym uzależnia się je od realizacji zmiennej Y_k zgodnie z wzorami (5) i (6):

$$p_{k,s}(y_k) = P[V_{k,s} < K_k | Y_k = y_k] \quad (5),$$

$$p_{k,s}(y_k) = P\left[\varepsilon_{k,s} < \frac{K_k - \sqrt{\rho_k} Y_k}{\sqrt{1 - \rho_k}} | Y_k = y_k\right] = \Phi\left(\frac{K_k - \sqrt{\rho_k} y_k}{\sqrt{1 - \rho_k}}\right) \quad (6).$$

Następnie, korzystając z warunkowej niezależności, ustala się wartość warunkowego prawdopodobieństwa n niewypłacalności dla danej realizacji $Y_k = y_k$ z wykorzystaniem rozkładu dwumianowego zgodnie z wzorem:

$$P[X = n | Y_k = y_k] = \binom{N_k}{n} (p_{k,s}(y_k))^n (1 - p_{k,s}(y_k))^{(N_k - n)} \quad (7).$$

W celu oszacowania bezwarunkowego prawdopodobieństwa n niewypłacalności należy dokonać uśrednienia warunkowego prawdopodobieństwa n niewypłacalności $P[X = n | Y_k = y_k]$ po realizacjach zmiennej Y_k , korzystając z wzoru (8):

$$P[X = n] = \int_{-\infty}^{\infty} P[X = n | Y_k = y_k] \phi(y_k) dy_k \quad (8),$$

gdzie ϕ oznacza funkcję gęstości standardowego rozkładu normalnego.

Wykorzystując wzory (6), (7) oraz (8), otrzymuje się wzór na prawdopodobieństwo n niewypłacalności (9) oraz wzór na dystrybuantę rozkładu (10):

$$P[X = n] = \int_{-\infty}^{\infty} \binom{N_k}{n} \left(\Phi \left(\frac{K_k - \sqrt{\rho_k} y_k}{\sqrt{1 - \rho_k}} \right) \right)^n \left(1 - \Phi \left(\frac{K_k - \sqrt{\rho_k} y_k}{\sqrt{1 - \rho_k}} \right) \right)^{(N_k - n)} \phi(y_k) dy_k \quad (9)$$

$$P[X \leq n] = \sum_{n=0}^m \int_{-\infty}^{\infty} \binom{N_k}{n} \left(\Phi \left(\frac{K_k - \sqrt{\rho_k} y_k}{\sqrt{1 - \rho_k}} \right) \right)^n \left(1 - \Phi \left(\frac{K_k - \sqrt{\rho_k} y_k}{\sqrt{1 - \rho_k}} \right) \right)^{(N_k - n)} \phi(y_k) dy_k \quad (10).$$

► Model jednoczynnikowy – postać uproszczona dla dużych portfeli

W poprzednim podpunkcie zaprezentowany został model jednoczynnikowy, który pozwala na ustalenie kredytowej wartości zagrożonej niezależnie od liczby ekspozycji kredytowych znajdujących się w portfelu. Ma on jedną zasadniczą wadę, jaką jest czasochłonność obliczeń wykonywanych przy jego użyciu. Jest to szczególnie uciążliwe dla portfeli kredytowych składających się z dużej liczby ekspozycji. Można uprościć ten model i sprowadzić go do postaci analitycznej, czyli postaci niewykorzystującej numerycznych oszacowań. Korzystanie z uproszczonego modelu w konsekwencji pozwala na znacznie szybsze dokonywanie obliczeń przy jednoczesnym zachowaniu należytej precyzji. Możliwe jest to w sytuacji, gdy będziemy rozważać jedynie duże portfele, czyli takie, w których N , oznaczające liczbę ekspozycji, dąży do nieskończoności. Co prawda w rzeczywistości nie ma się do czynienia z portfelami nieskończenie licznymi, jednakże stosowanie powyższego uproszczenia nie wpływa w znaczący sposób na wyniki w sytuacji, gdy badaniom podlegają portfele o znacznej liczbie ekspozycji (Schoenbucher 2000).

W celu wyprowadzenia analitycznej postaci wzoru na prawdopodobieństwo niewypłacalności portfela kredytowego, podobnie jak w modelu przedstawionym w punkcie 2.1, indywidualne prawdopodobieństwo niewypłacalności uwarunkowane realizacją y_k zmiennej Y_k określa się wzorem:

$$p_{k,s}(y_k) = \Phi \left(\frac{K_k - \sqrt{\rho_k} y_k}{\sqrt{1 - \rho_k}} \right) \quad (11).$$

Z uwagi na fakt, że warunkowe prawdopodobieństwa niewypłacalności są niezależne z prawa wielkich liczb, wiadomo, że dla dużych portfeli, tj. składających się z dużej liczby ekspozycji, udział ekspozycji wobec klientów, którzy naprawdę stają się niewypłacalni, jest bliski indywidualnemu prawdopodobieństwu niewypłacalności (Schoenbucher 2000). Tym samym,

gdy X jest udziałem ekspozycji wobec klientów niewypłacalnych w portfelu kredytowym, zachodzi:

$$P[X = p_{k,s}(y_k) | Y_k = y_k] \rightarrow 1 \quad (12).$$

Jako że nie jest znana wartość Y_k , w celu oszacowania bezwarunkowego prawdopodobieństwa niewypłacalności dokonać należy uśrednienia po oczekiwanych realizacjach Y_k zgodnie z wzorem (13):

$$P[X \leq x] = E \left(P[X \leq x | Y_k] = \int_{-\infty}^{\infty} P[X \leq x | Y_k = y_k] \phi(y_k) dy_k \right) \quad (13)$$

Na podstawie wzorów (13) i (12) otrzymuje się:

$$P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{\infty} P[X = p_{k,s}(y_k) \leq x | Y_k = y_k] \phi(y_k) dy_k \quad (14),$$

$$P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{\infty} 1_{\{p_{k,s}(y_k) \leq x\}} \phi(y_k) dy_k = \int_{-y^*}^{\infty} \phi(y_k) dy_k = \Phi(y^*) \quad (15),$$

gdzie y^* jest tak dobrane, aby spełnione były następujące warunki: $p(-y) = x$, $p(y) < x$ dla y należących do przedziału $(-y^*, \infty)$, tj. aby indywidualne prawdopodobieństwo niewypłacalności było mniejsze niż liczba rzeczywiście obserwowanych niewypłacalności. Taki stan mamy dla y^* o postaci:

$$y^* = \frac{1}{\sqrt{\rho_k}} \left(\sqrt{1 - \rho_k} \Phi^{-1}(x) - K_k \right) \quad (16).$$

Ostatecznie rezultatem jest dystrybuanta prawdopodobieństwa niewypłacalności (17):

$$P[X \leq x] = \Phi(y^*) = \Phi \left(\frac{1}{\sqrt{\rho_k}} \left(\sqrt{1 - \rho_k} \Phi^{-1}(x) - K_k \right) \right) \quad (17),$$

Dla osób zajmujących się modelowaniem ryzyka kredytowego istotniejszą od informacji o tym, z jakim prawdopodobieństwem wystąpi n niewypłacalności, jest informacja o prawdopodobieństwie niewypłacalności odpowiadającym danemu kwantylowi rozkładu zmiennej X . W związku z powyższym konieczne jest przekształcenie wzoru (17) na dystrybuantę. Otrzymuje się w ten sposób wzór na kwantyl rzędu α rozkładu prawdopodobieństwa niewypłacalności (18):

$$x = \Phi \left(\frac{\sqrt{\rho_k} \Phi^{-1}(\alpha) + \Phi^{-1}(dy_{sr,k})}{\sqrt{1 - \rho_k}} \right) \quad (18).$$

► Model jednoczynnikowy uwzględniający korelację międzyportfelową

Wszystkie z zaprezentowanych do tej pory wyliczeń dla modeli jednoczynnikowych były dokonywane dla sytuacji, w której występuje jeden homogeniczny portfel kredytowy bądź wiele portfeli, które są ze sobą idealnie dodatnio skorelowane. W takiej sytuacji, chcąc ustalić kredytową wartość zagrożoną dla wszystkich portfeli, wystarczy zsumować kredytowe wartości zagrożone dla poszczególnych portfeli. W praktyce jednak często wyróżnia się co najmniej kilka jednorodnych portfeli, które różnią się między sobą czynnikami systematycznymi wpływającymi na niewypłacalność klientów z tych portfeli. W takiej sytuacji pojawia się problem korelacji międzyportfelowych. W rzeczywistości portfele nie są ze sobą idealnie skorelowane i w rezultacie konieczne jest uwzględnienie korelacji międzyportfelowej. Uwzględnienie korelacji międzyportfelowych pozwala na urealnienie pomiaru ryzyka, na jakie narażona jest instytucja kredytowa, i tym samym na ograniczenie wymogu kapitałowego. Korelację międzyportfelową można uwzględnić w modelu np. poprzez wyznaczanie łącznej straty dla portfeli kredytowych jako kwantyla z rozkładu sumy strat warunkowych dla zadanych wartości czynników systematycznych y_k , gdzie stratę warunkową dla wszystkich portfeli wyznacza się zgodnie z wzorem:

$$\text{Strata warunkowa} = \sum_{k=1}^l \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(p_{s,k}) - y_k \sqrt{\rho_k}}{\sqrt{1 - \rho_k}} \right) * DLGD_k \quad (19),$$

gdzie l oznacza liczbę portfeli.

W takiej sytuacji, przy wyliczaniu łącznej straty w portfelu kredytowym, możliwe jest wykorzystanie symulacji Monte Carlo, przyjmując, że zmienne Y_1, Y_2, \dots, Y_k dla każdego z portfeli osobno mają standardowy rozkład normalny. Przy ich jednoczesnym ujęciu mają one wielowymiarowy rozkład normalny o macierzy kowariancji odpowiadającej ich macierzy korelacji $R_{k \times k}$.

W pierwszym kroku symulacji należy określić wartość współczynnika korelacji między czynnikami specyficznymi. Szacunku tego należy dokonać na podstawie ciągu obserwacji czynników systematycznych dla każdej ze zmiennych. Ciąg obserwacji $Y_{k,1}, Y_{k,2}, \dots, Y_{k,t}$, gdzie k oznacza k -ty portfel, a t czas, wyznaczany jest na podstawie wzoru:

$$pd_{k,i} = \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(p_{s,k}) - \sqrt{\rho_{k,i}} y_{k,i}}{\sqrt{1 - \rho_{k,i}}} \right) \quad (20).$$

Mając ustaloną macierz korelacji, można przekształcić niezależne zmienne losowe wylosowane ze standardowego rozkładu normalnego X_1, X_2, \dots, X_k w skorelowane zmienne Y_1, Y_2, \dots, Y_k , dla których macierz korelacji ma postać $R_{k \times k}$. Przyjmując, że wektor realizacji zmiennych Y_1, Y_2, \dots, Y_k ma postać: $y_n = y_1, y_2, \dots, y_k$, zaś wektor realizacji niezależnych zmiennych X_1, X_2, \dots, X_k jest

postaci: $x_n = x_1, x_2, \dots, x_k$, związek między oboma wektorami przedstawić możemy w następujący sposób:

$$y_n = C^T x_n \quad (21)$$

gdzie C jest macierzą Cholesky'ego, czyli macierzą spełniającą warunek $R_{k \times k} = C^T C$.

► Model wieloczynnikowy uwzględniający korelację międzyportfelową

W tym podpunkcie zaprezentowany zostanie uogólniony model czynnikowy pozwalający na ujęcie wielu zmiennych wpływających na wypłacalność kredytobiorcy. Idea modeli wieloczynnikowych została opisana m.in. przez P. Schoenbuchera (2000), a także przez A. Lucasa (2000). W modelu wieloczynnikowym wartość aktywów determinowana jest przez wektor Z_k zawierający j czynników. Każdy z tych czynników wpływa na wartość aktywów s -tego klienta w k -tym portfelu zgodnie z przypisaną mu wagą ryzyka β_k^j . Wagi te składają się na wektor wag β_k . W zakresie idei konstrukcyjnej model wieloczynnikowy nie różni się od modelu jednoczynnikowego, natomiast jest on zdecydowanie bardziej skomplikowany, jeśli chodzi o sposób wyliczania wartości zagrożonej. W takim ujęciu wartość aktywów opisywana jest wzorem (22), a próg, w zależności od wersji modelu, jest indywidualnie ustalany dla poszczególnych ekspozycji bądź też jest wspólny dla poszczególnych portfeli.

$$V_{k,s} = \sum_{j=1}^J \beta_k^j z_k + \alpha_{k,s} \varepsilon_{k,s} \quad (22)$$

gdzie $\varepsilon_{k,s}$ jest czynnikiem specyficznym s -tego dłużnika w k -tym portfelu, a $\alpha_{k,s}$ współczynnikiem dla tego czynnika.

Tradycyjnie, w momencie gdy wartość aktywów spadnie poniżej wartości progu, następuje niewypłacalność klienta. Konkretnym przykładem modelu wieloczynnikowego będzie model zależny od czynnika specyficznego $\varepsilon_{k,s}$ charakterystycznego dla poszczególnych ekspozycji oraz dwóch czynników tworzących kombinacją liniową determinującą wartość czynnika systematycznego Z_k . Zmienna Z_k kształtowana jest przez czynnik Ψ , który wpływa na wszystkie ekspozycje, oraz czynnik F_k , który oddziałuje tylko na ekspozycje z danego portfela k . Siłę zależności zmiennej Z_k od zmiennych Ψ i F_k określa współczynnik λ_k . W modelu zakłada się, że zmienna Ψ i zmienne F_k mają rozkład normalny standardowy i są niezależne. W rezultacie otrzymuje się wzór określający czynnik systematyczny:

$$Z_k = \lambda_k \Psi + \sqrt{1 - \lambda_k^2} F_k \quad (23)$$

Po podstawieniu wzoru (23) do wzoru (22) możliwe jest wyznaczenie ostatecznej postaci modelu determinującego zdolność kredytową kontrahenta.

Kredytowa wartość zagrożona w wybranych modelach czynnikowych

W niniejszym artykule wyliczenia kredytowej wartości zagrożonej przeprowadzone zostaną dla: (1) modelu jednoczynnikowego z korelacjami wyliczonymi na podstawie danych wewnętrznych; (2) uproszczonego modelu jednoczynnikowego z korelacjami wyliczonymi na podstawie danych wewnętrznych; (3) uproszczonego modelu jednoczynnikowego z korelacjami zgodnymi z Basel II, (4) uproszczonego modelu jednoczynnikowego z korelacjami zgodnymi z Basel II oraz uwzględniającego korelację międzyportfelową, a także dla (5) modelu wieloczynnikowego z korelacjami zgodnymi z Basel II oraz uwzględniającego korelację międzyportfelową. Wyselekcjonowany zestaw modeli pozwoli na dokonanie kompleksowej oceny modeli czynnikowych.

W obliczeniach wykorzystane zostaną dane jednej z większych, licencjonowanych w Polsce instytucji kredytowych. Dane obejmują okres prawie sześciu lat, od maja 2004 do kwietnia 2010 r., i dotyczą stanów na koniec poszczególnych miesięcy. Obejmują one 5 504 756 miesięcznych obserwacji. Dane dostępne są na poziomie poszczególnych transakcji. Dla potrzeb analizy empirycznej wyodrębnione zostały portfele: kredytów **mieszkaniowych zabezpieczonych hipotecznie** dla klientów detalicznych oraz kredytów **gotówkowych** dla klientów detalicznych. Wyodrębnienie wymienionych portfeli nastąpiło na podstawie informacji o typie klienta oraz rodzaju ekspozycji kredytowej. W wyniku przeprowadzonego podziału powstał **portfel kredytów mieszkaniowych zabezpieczonych hipotecznie** (dalej nazywany skrótowo portfelem kredytów mieszkaniowych), składający się z 43,4 tys. ekspozycji kredytowych według stanu na koniec kwietnia 2010 r. o wartości 5,88 mld zł. Jest to portfel podmiotowo homogeniczny o średniej wartości ekspozycji 135 tys. zł, zawierający ekspozycje denominowane zarówno w złotych, jak i w walutach obcych. Wartość tego portfela oraz liczba ekspozycji systematycznie rosły w analizowanym okresie. Można powiedzieć, że portfel ten charakteryzował się dynamicznym wzrostem. W maju 2004 r. na portfel ten składało się 8,6 tys. ekspozycji o wartości zaledwie 375,7 mln zł. W analizowanym okresie wartość tego portfela wzrosła o ponad 5,5 mld zł, czyli o ok. 1500%. Wartość średniej pojedynczej ekspozycji z kolei wzrosła trzykrotnie w porównaniu do wartości z maja 2004 r. Kolejnym wyodrębnionym portfelem jest **portfel kredytów gotówkowych**. Kredyty gotówkowe są to kredyty udzielane na dowolny cel, dla których nie są ustanawiane zabezpieczenia. W odróżnieniu od portfela kredytów mieszkaniowych wartość tego portfela w analizowanym okresie nie rosła systematycznie. W przypadku tego portfela możliwe jest wyróżnienie dwóch etapów jego rozwoju. Od maja 2004 do grudnia 2007 r. jego łączny wolumen był dość stabilny. Na koniec maja 2004 r. wynosił 217,6 mln zł i przez trzy i pół roku spadł do 213 mln zł. Warto przy tym zaznaczyć, że w okresie tym systematycznie rosła średnia wartość pojedynczej ekspozycji (z ok. 4,5 tys. zł w grudniu 2007 do 3 tys. zł w maju 2004), znacznie spadała natomiast liczba ekspozycji z 72 tys. do 47 tys. W drugim etapie, tj. od grudnia 2007 r. do kwietnia 2010 r., portfel ten charakteryzował się dynamicznym wzrostem zarówno wartości portfela, liczby ekspozycji, jak i średniej wartości ekspozycji, które w kwietniu 2010 r. wyniosły odpowiednio: 705 mln zł, 81,2 tys. zł, 8,7 tys. zł.

W celu umożliwienia obliczeń w ramach każdego z tak wyodrębnionych portfeli dane źródłowe poddane zostały przekształceniu. Dostępne dane zostały podzielone na dane z poszczególnych okresów miesięcznych. Dla każdego zestawu danych miesięcznych wyodrębniono dane opisowe pozwalające na określenie charakterystyki klienta oraz dane finansowe wykorzystywane do wyliczeń. Wśród danych finansowych znalazły się m.in. informacje o: zadłużeniu początkowym będącym kapitałem z poprzedniego miesiąca, kapitale końcowym jako stanie kapitału (zadłużenia) na koniec danego miesiąca, początkowej klasie przeterminowania odpowiadającej przeterminowaniu z poprzedniego miesiąca, końcowej klasie przeterminowania odpowiadającej przeterminowaniu z końca danego miesiąca. Ponadto wyznaczona została spłata dokonywana w ciągu danego miesiąca. Z uwagi na fakt, że nie były dostępne bezpośrednio informacje o spłacie, za spłatę uznawana była zmiana stanu kapitału do spłaty, czyli różnica między kapitałem końcowym oraz kapitałem początkowym (zadłużeniem końcowym i początkowym). Jednocześnie przy ustalaniu spłaty wykorzystana została informacja o sposobie zamknięcia rachunków. Pozwalało to na uniknięcie traktowania zmiany stanu kapitału jako spłaty w sytuacji, gdy zmiana stanu wynikała z umorzenia, restrukturyzacji czy też przewalutowania kredytu. Podczas przygotowywania danych dokonane zostały korekty mające na celu usunięcie błędnych zapisów. Z każdego zestawu danych miesięcznych usunięte zostały ekspozycje, dla których przeterminowanie w ciągu miesiąca wzrosło o więcej niż 31 dni. Ponadto zestawy danych zostały skorygowane o ekspozycje, dla których w wysokich klasach przeterminowania zaobserwowane bardzo wysokie spłaty. Wśród danych opisowych wykorzystane zostały takie dane jak: typ klienta, rodzaj produktu kredytowego czy też waluta kredytu. W efekcie opisanych powyżej działań opracowany został zestaw danych, który w dalszej części pracy posłuży do wyliczeń parametrów ryzyka, takich jak: prawdopodobieństwo niewypłacalności oraz stopy odzysku na moment niewypłacalności, a także wykorzystany zostanie do testowania jakości modeli pomiaru portfelowego ryzyka kredytowego ekspozycji wobec klientów detalicznych.

Na podstawie danych historycznych dotyczących wolumenów, odzysków oraz liczby niewypłacalności, wyliczone zostały wskaźniki niezbędne do ustalenia kredytowej wartości zagrożonej w wymienionych modelach czynnikowych. W tabelach 1–3 zaprezentowane zostały prawdopodobieństwa niewypłacalności, straty na moment niewypłacalności w kryzysie (*ang. downturn LGD*), korelacje wewnątrzportfelowe zgodne z *Basel II* i ustalone na podstawie dostępnych danych wewnętrznych, a także macierze korelacji międzyportfelowej i macierz Cholesky'ego.

Tabela 1 | Parametry ryzyka

Parametr ryzyka	Kredyty mieszkaniowe	Kredyty gotówkowe
Downturn LGD	56,92%	76,30%
PD	1,73%	6,82%
Korelacje ustalone na podstawie dostępnych danych	2,99%	6,46%
Korelacja zgodna z Basel II	15%	4,19%
Źródło: opracowanie własne.		

Tabela 2 | Macierz korelacji

Portfel kredytowy	Kredyty mieszkaniowe	Kredyty gotówkowe
kredyty mieszkaniowe	100,0%	77,3%
kredyty gotówkowe	77,3%	100,0%

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3 | Macierz Choleskyego

Portfel kredytowy	Kredyty mieszkaniowe	Kredyty gotówkowe
kredyty mieszkaniowe	100,0%	0,0%
kredyty gotówkowe	77,3%	63,4%

Źródło: opracowanie własne.

W przypadku modelu dwuczynnikowego ładunki czynnikowe prezentuje tabela 4.

Tabela 4 | Ładunki czynnikowe w modelu wypłacalności

	Kredyty mieszkaniowe	Kredyty gotówkowe
β^1	0,345	0,190
β^2	0,176	0,078
α	0,922	0,979

Źródło: opracowanie własne.

Na podstawie przedstawionych w niniejszym rozdziale parametrów wyliczona została kredytowa wartość zagrożona (tabela 5).

Tabela 5 | Kredytowa wartość zagrożona dla modeli czynnikowych

LP	Nazwa modelu	Zaangażowanie	Kredytowa wartość zagrożona	Kredytowa wartość zagrożona jako procent zaangażowania
1	Model jednoczynnikowy z korelacjami wyliczonymi na podstawie danych wewnętrznych	6 588 124 303	313 567 775	4,76%
2	Uproszczony model jednoczynnikowy z korelacjami wyliczonymi na podstawie danych wewnętrznych	6 588 124 303	313 209 796	4,75%
3	Uproszczony model jednoczynnikowy z korelacjami zgodnymi z Basel II	6 588 124 303	647 442 690	9,83%
4	Uproszczony model jednoczynnikowy z korelacjami zgodnymi z Basel II oraz uwzględniającego korelację międzyportfelową	6 588 124 303	626 453 689	9,51%
5	Modelu dwuczynnikowy z korelacjami zgodnymi z Basel II oraz uwzględniającego korelację międzyportfelową	6 588 124 303	627 961 080	9,53%

Źródło: opracowanie własne.

Opierając się na uzyskanych wynikach, można wnioskować, że w zależności od wybranego modelu czynnikowego kredytowe wartości zagrożone mogą znacząco różnić się od siebie. Dla wybranych modeli kredytowa wartość zagrożona przyjmowała wartości od 313 mln zł do 647 mln zł. Różnice te wynikają z wykorzystanych parametrów w ramach poszczególnych modeli oraz rodzaju modelu. Do elementów wpływających na wyniki zaliczyć należy: (1) liczbę czynników w modelu, (2) wartość współczynnika korelacji wewnątrzportfelowej, (3) uwzględnienie bądź nieuwzględnienie efektu korelacji międzyportfelowej oraz (4) wybór wersji uproszczonej lub pełnej modelu jednoczynnikowego. Istota poszczególnych elementów oceniona zostanie poprzez analizę modeli parami.

► Znaczenie postaci modelu

W artykule zaprezentowany został „pełny” model, pozwalający na ustalenie kredytowej wartości zagrożonej niezależnie od wielkości portfela kredytowego oraz model uproszczony przeznaczony dla portfeli kredytowych składających się w teorii z nieskończonej liczby ekspozycji kredytowych. Jak można zauważyć, różnica w kredytowej wartości zagrożonej jest nieznacząca. W praktyce oznacza to, że korzystniejsze w większości przypadków ze względu na szybkość obliczeń jest stosowanie modelu uproszczonego. Należy jednak pamiętać o ograniczeniach modelu uproszczonego i analizować, czy możliwe jest jego stosowanie. Model ten zwraca błędne rezultaty, gdy liczba ekspozycji w portfelu jest niska. Dodatkowo w przypadku stosowania modelu uproszczonego występują odchylenia od kredytowej wartości zagrożonej z „pełnego” modelu, jeśli wartość współczynnika korelacji wewnątrzportfelowej jest niska. Przykładowo, gdyby wartość współczynnika korelacji wynosiła 0,5%, to różnica między kredytowymi wartościami zagrożonymi odniesiona do kredytowej wartości zagrożonej z modelu uproszczonego osiągnęłaby poziom 1,5% w porównaniu do 0,11% występującej, gdy korelacja wewnątrzportfelowa wynosi 2,99% i 6,46% odpowiednio dla kredytów mieszkaniowych i gotówkowych.

► Rola współczynnika korelacji wewnątrzportfelowej

Wartość współczynnika korelacji wewnątrzportfelowej nie tylko determinuje, czy model uproszczony może być stosowany, ale także w znaczący sposób wpływa na uzyskane z modelu kredytowe wartości zagrożone. Wyliczając kredytową wartość zagrożoną dla modelu nr 2, w którym współczynniki korelacji wewnątrzportfelowej wynoszą 2,99% i 6,46% odpowiednio dla kredytów mieszkaniowych i gotówkowych oraz modelu nr 3 z korelacjami wewnątrzportfelowymi na poziomie 15% i 4,19%, uzyskuje się kredytowe wartości zagrożone, różniące się o ponad 50%. Porównując te dwa modele, warto przeanalizować kredytowe wartości zagrożone oddzielnie dla portfela kredytów mieszkaniowych oraz portfela kredytów gotówkowych. Można zauważyć wtedy, że kredytowa wartość zagrożona rośnie wraz ze wzrostem korelacji wewnątrzportfelowej i maleje wraz z jej spadkiem, przy czym zależność ta nie jest wprost proporcjonalna.

► Rola współczynnika korelacji międzyportfelowej

W rzeczywistości gospodarczej portfele ekspozycji kredytowych rzadko nie są z sobą w pełni skorelowane. Dlatego też wydaje się racjonalne ujęcie efektu dywersyfikacji w procesie szacowania kredytowej wartości zagrożonej. Uwzględnienie w modelu korelacji międzyportfelowej pozwoli na lepsze odzwierciedlenie rzeczywistości gospodarczej i będzie skutkowało niższą kredytową wartością zagrożoną. W artykule przedstawiony został zarówno model uwzględniający korelację międzyportfelową (model 3), jak i zakładający brak tej korelacji (model 4). Model trzeci zakłada idealną korelację między portfelem kredytów mieszkaniowych a portfelem kredytów gotówkowych, podczas gdy model 4 przyjmuje istnienie niedoskonałej korelacji. W modelu tym współczynnik korelacji międzyportfelowej wynosi 77,3%, co oznacza, że portfele są z sobą dość silnie skorelowane. Gdy analizuje się wyniki z tabeli 5, widać, że korelacja międzyportfelowa w tym przypadku miała ograniczony wpływ na kredytową wartość zagrożoną – kredytowa wartość zagrożona zmniejszyła się jedynie o 3,35%. Wynika to przede wszystkim z wysokiej jej wartości dla modelu 4.

► Wpływ liczby czynników w modelu na kredytową wartość zagrożoną

W przypadku modeli czynnikowych można wyróżnić modele jedno- oraz wieloczynnikowe. Liczba czynników w modelu nie wpływa na kredytową wartość zagrożoną, o ile obrazują one to samo zjawisko. Zarówno w przypadku modelu z jednym czynnikiem, jak i wieloma czynnikami kredytowe wartości zagrożone osiągają zbliżone wartości. Dla pierwszego z tych modeli kredytowa wartość zagrożona wyniosła 626 mln zł, a dla drugiego 628 mln zł.

| Podsumowanie

W artykule omówiono ideę modeli czynnikowych. Zaprezentowane zostały przyczyny ich rozwoju oraz potencjalne zastosowania. Dla wybranych modeli czynnikowych przedstawiono teorię, a następnie przeprowadzono wyliczenia kredytowej wartości zagrożonej, bazując na danych jednej z dużych licencjonowanych w Polsce instytucji kredytowej. Ustalono, że kredytowe wartości zagrożone dla poszczególnych modeli znacząco różnią się od siebie. Wykazano, że największy wpływ na kredytową wartość zagrożoną ma wartość korelacji wewnątrzportfelowej oraz ujęcie bądź też nie korelacji międzyportfelowej. W znikomym stopniu kredytowa wartość zagrożona w modelach czynnikowych zależy od liczby czynników ujętych w modelu, czy też formy modelu (pełnej bądź uproszczonej). Powyższe wnioski uzyskano, badając kredytowe wartości zagrożone zaprezentowane w tabeli 5. Dzięki analizie modeli parami możliwe było wyizolowanie poszczególnych efektów. Porównując model 1 z modelem 2, w artykule oceniono wpływ na wynik uproszczonej oraz pełnej formuły modelu. Analizując modele 2 i 3, ustalono z kolei rolę wartości współczynnika korelacji wewnątrzportfelowej. W przypadku analizy modeli 3 i 5 wskazano na znaczenie korelacji międzyportfelowej, zaś modeli 4 i 5 – na rolę liczby czynników w modelu. Przeprowadzone rozumowanie uwidacznia rolę założeń przyjętych w modelach

w szacowaniu kredytowej wartości zagrożonej. Przy pomiarze ryzyka z wykorzystaniem tego narzędzia należy zadbać o dobór najlepszego z możliwych modeli. Jednocześnie trzeba pamiętać, że uzyskane wartości nie stanowią jedynego i ostatecznego rozwiązania. Konieczne jest ich testowanie z wykorzystaniem wiedzy eksperckiej czy też innych narzędzi, jak np. analiza warunków skrajnych.

B i b l i o g r a f i a

- Black F., Scholes M.** (1973) The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, s. 637–654, <http://dx.doi.org/10.1086/260062>.
- Caouette B., Altman A.I., Narayanan P., Nimmo R.W.J.** (2008) *Managing credit risk: The great challenge for global financial markets*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons.
- Forest L.R., Belkin Jr., B., Suchower J.** (Q3 1998) A One-Parameter Representation of Credit Risk and Transition Matrices. *CreditMetrics Monitor*, s. 46–56.
- Gallati R.** (2003) *Risk Management and Capital Adequacy*. New York: McGraw-Hill.
- Gupton G., Finger C., Bhatia M.** (1997) *Credit Metrics™ – technical document*, J.P. Morgan working paper, www.creditriskresource.com.
- Hull J.** (2003) *Options, Futures & Other Derivatives 5th Edition*. New Jersey: Prentice Hall.
- Huschens S., Vogl K., Wania R.** (2004) *Estimation of Default Probabilities and Default Correlations*, http://dx.doi.org/10.1007/3-540-26993-2_12.
- Jackowicz K.** (2001) Pochodne instrumenty kredytowe (I). Definicja i rodzaje pochodnych instrumentów kredytowych. *Bank i Kredyt*, Vol. 33, No. 3, s. 51–63.
- Jarrow R., van Deventer D.** (1999) Practical usage of credit risk models in loan portfolio and counterparty exposure management: an update. W: D. Shimko (red.), *Credit Risk: models and management*. London: Risk Publications.
- Kuryłek W.** (2003) Modelowanie ryzyka portfela kredytowego. *Bank i Kredyt*, Vol. 34, No. 5, s. 66–73.
- Lucas A., Klaassen P., Spreij P., Straetmans S.** (2001) An analytic approach to credit risk of large corporate bond and loan portfolio. *Journal of Banking and Finance*, Vol. 25, No. 9, s. 1635–1664.
- Merton R.** (1974) On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates. *Journal of Finance*, Vol. 29, No. 2, s. 449–470.
- Perli R., Nayda W.** (2003) *Economic and regulatory capital allocation for revolving retail exposures*, FEDs working paper No. 2003–39, s. 1–22.
- Saunders A.** (2001) *Metody pomiaru ryzyka kredytowego*. Kraków: Oficyna Ekonomiczna.
- Saunders A., Allen L.** (2002) *Credit Risk Measurement: new approaches to value at risk and other paradigms*. Hoboken: Wiley Finance.
- Schmid B.** (2003), *Credit Risk Pricing Models: Theory and Practice*. Berlin: Springer.
- Schoenbucher P.J.** (2001) Factor Models for Portfolio Credit Risk. *Journal of Risk Finance*, Vol. 3, No. 1, s. 45–56.
- Wilson T.** (1998) Portfolio credit risk. *FRBNY Economic Policy Review*, Vol. 4, No. 3, s.71–82.
- Young H., Helwege J., Huang, J.Z.** (2004) Structural models of corporate bond pricing: an empirical analysis. *The Review of Financial Studies*, Vol.17, No. 2, s. 499–544.