# PARAMETRYCZNE METODY RACJONOWANIA*

**Marek M. Kamiński****

**University of California**

***Streszczenie:*** *Artykuł analizuje problem racjonowania, czyli podziału pojedynczego, jednorodnego i doskonale podzielnego dobra pomiędzy agentów o różnych cechach, zwanych typami. Jeśli typ agenta jest dodatnią liczbą rzeczywistą (interpretowaną np. jako „roszczenie" agenta), twierdzenie Younga mówi, że przy założeniu ciągłości, metoda racjonowania jest spójna i symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy posiada reprezentację w postaci ciągłej funkcji parametrycznej. Twierdzenie to zostało uogólnione w niniejszym artykule na wszystkie ośrodkowe przestrzenie typów. Kolejne wyniki charakteryzują wszystkie, nie tylko ciągłe, metody parametryczne oraz podają proste kryterium rozstrzygające, kiedy metoda binarna (zdefiniowana jedynie dla dwóch agentów) może być rozszerzona do spójnej metody zdefiniowanej dla dowolnej liczby agentów. Omówione jest też zastosowanie do wielowymiarowego problemu bankructwa, ilustrujące korzyści z uogólnienia twierdzenia Younga.*

***Słowa kluczowe:*** *racjonowanie, alokacja, bankructwo, wybór społeczny, sprawiedliwy podział.*

## Wprowadzenie

Istotą problemu racjonowania jest podział pojedynczego, jednorodnego dobra lub obciążenia pomiędzy dwóch lub więcej agentów. Dobro może być podzielne lub dostępne jedynie w „kawałkach". Ilość dobra, które ma otrzymać agent lub, ogólniej, zbiór wszystkich alokacji, mogą być ograniczone. Cechy agenta – jego typ – mogą obejmować jego roszczenie (reprezentowane przez liczbę dodatnią), wektor roszczeń

* Podziękowania: Barbara Kataneksza, Grzegorz Lissowski, Francis Lovett, Marcin Malawski, Michael Maschler, Hervé Moulin, Monika Nalepa, Piotr Swistak, Peyton Young, anonimowi recenzenci oraz redaktor *Games and Economic Behavior* pomogli poprzez swoje komentarze ulepszyć tekst. Wersja oryginalna artykułu „Parametric Rationing Methods" została opublikowana w *Games and Economic Behavior*, 2006, vol. 54(1): 115-133.

** Department of Political Science i Institute for Mathematical Behavioral Science, University of California, 3151 Social Science Plaza, Irvine, CA 92697-5100, U.S.A.; email: marek.kaminski@uci.edu; tel 9498242744; fax 8018805878.

różnych typów, zapis jego potrzeb lub zasług, funkcję użyteczności lub najbardziej pożądaną wielkość dobra.

Przykładów racjonowania ze złożonymi cechami agentów jest mnóstwo. W sytuacjach podziału spadku, bankructwa lub likwidacji firmy, pewien majątek musi zostać rozdzielony pomiędzy dłużników, spadkobierców lub akcjonariuszy. W wyborach parlamentarnych z ordynacją proporcjonalną mandaty muszą najpierw zostać podzielone pomiędzy okręgi wyborcze, a następnie pomiędzy partie w okręgach. Podczas niedoborów czasu wojny lub w gospodarkach centralnie planowanych racjonowaniu może podlegać benzyna, mięso, cukier czy mleko. Podczas prywatyzacji poprzez giełdę udziały w prywatyzowanej firmie mogą zostać przyznane zainteresowanym inwestorom, pracownikom firmy lub nawet wszystkim obywatelom kraju. Podczas restytucji mienia lub reprywatyzacji poprzedni właściciel lub właściciele mogą otrzymać rekompensatę. W przedsiębiorstwie czas pracy może zostać podzielony pomiędzy pracowników z różnymi preferencjami względem odpoczynku i pracy. W klubach i spółkach koszty, a czasem również i zyski, alokowane są pomiędzy członków i wspólników. Wreszcie jednym z najważniejszych problemów racjonowania jest podział podatków pomiędzy różne kategorie podatników oraz zaprojektowanie budżetu państwa.

Niniejszy artykuł rozwija wyniki Younga (1987) z jego klasycznego studium charakteryzującego szczególnie interesujące rozwiązania problemu racjonowania – takie, które mogą być reprezentowane przy pomocy funkcji parametrycznej. Metoda racjonowania jest parametryczna, jeśli każdemu typowi można przyporządkować funkcję określającą jego względny udział dla wszystkich możliwych poziomów dostępności dobra. Dla problemu roszczeń, tzn. dla typów będących dodatnimi liczbami rzeczywistymi, Young udowodnił, że ciągłe metody parametryczne są identyczne z ciągłymi metodami, które spełniają proste aksjomaty symetrii i spójności. Okazuje się, że ta charakteryzacja może zostać uogólniona do praktycznie wszystkich problemów racjonowania, tzn. takich, w których typy agentów są elementami ośrodkowej przestrzeni topologicznej (na przykład takiej, jak $R$, $R^k$, lub niektóre przestrzenie funkcji użyteczności lub relacji preferencji z odpowiednią topologią). Drugi z wyników artykułu precyzuje rolę aksjomatu ciągłości. Metoda jest parametryczna wtedy i tylko wtedy, gdy jest symetryczna i spójna oraz gdy istnieje ośrodkowa topologia na przestrzeni typów taka, że metoda jest ciągła w tej topologii. Wreszcie ostatnim rozważanym pytaniem jest: kiedy metoda racjonowania zdefiniowana dla par agentów może być rozszerzona do spójnej metody zdefiniowanej dla dowolnej liczby agentów? Artykuł prezentuje proste kryterium istnienia takiego spójnego rozszerzenia.

Plan pracy jest następujący: w części „Model" wprowadzone zostają formalnie pojęcia ogólnego problemu racjonowania oraz podane konkretne przykłady. W części „Metody racjonowania" zdefiniowane są metody racjonowania, podstawowe aksjomaty oraz reprezentacja parametryczna. Dalej przedstawione są wyniki. W części „Zastosowania" przedyskutowano zastosowanie wyników do amerykańskiego prawa bankructwa. Wszystkie dowody znajdują się w Dodatku.

## Model[1]

Każdy konkretny nieograniczony model racjonowania jest trójką obiektów $(\aleph,T,max)$ takich, że: $\aleph=\{1,2,...\}$ jest zbiorem liczb naturalnych oznaczających *etykiety* lub *nazwy* potencjalnych agentów. Ponieważ zbiór $\aleph$ pozostaje niezmieniony we wszystkich modelach rozważanych w tym artykule, będziemy dalej pomijać go w opisie. $T$, przestrzeń *typów*, jest strukturą relacyjną, tzn. niepustym zbiorem ze zdefiniowanymi relacjami, podzbiorami elementów, etc. W najważniejszych wynikach $T$ będzie przestrzenią topologiczną lub ośrodkową przestrzenią topologiczną. *Agent* jest identyfikowany z parą $\{i,t\}$, lub $t_i$, gdzie $i \in \aleph$ jest nazwą agenta, zaś $t \in T$ jego typem. Bez utraty ogólności możemy utożsamiać nazwę agenta $i$ z samym agentem $t_i$. Również „typ $t_i$" będzie dalej rozumiany jako „typ agenta $i$".

Funkcja max: $T \rightarrow R_{++} \cup \{+\infty\}$ przypisuje maksimum (liczbę dodatnią lub plus nieskończoność) ilości dobra, którą może otrzymać agent danego typu. Kiedy $max(t) = +\infty$, oznacza to, że żadnych ograniczeń *a priori* nie ma. Wyniki niniejszego artykułu pozostają prawdziwe również wtedy, gdy dopuszczalne są roszczenia lub maksima zerowe. Typ agenta przekazuje zobiektywizowaną informację kluczową dla danego problemu racjonowania, tzn. zawiera cechy lub właściwości agenta, które są brane pod uwagę. Zbiorem typów $T$ może być $R$, $R^n$, zbiór liczb naturalnych, rodzina rzeczywistych funkcji użyteczności lub preferencji unimodalnych (*single-peaked*), przestrzeń zawierająca elementy różnych przestrzeni opisanych powyżej, a także dowolna przestrzeń topologiczna. Pojedynczy typ oznaczony jest przez $t$.

Wektor typów $\tau$ indeksowany przez nazwy agentów z $J$ jest elementem $T^J$, gdzie $J \subset \aleph$ jest interpretowane jako niepusty i skończony podzbiór agentów, którzy mogą pojawić się w dowolnym rzeczywistym problemie racjonowania. Jego skład i wielkość mogą być różne. Zbiór wszystkich takich wektorów jest oznaczany poprzez $\Sigma = \bigcup_{J \subset \aleph, 0<|J|<\aleph_0} T^J$. Dalej zbiór $J$ będzie oznaczał zbiór agentów odpowiadających wektorowi $\tau$. Uogólniony problem racjonowania, lub po prostu *problem*, jest parą $(t;g) \in \Sigma \times R_+$ taką, że $g \leq \Sigma_J max(t_i)$ jest ilością dobra dostępną do podziału pomiędzy agentów.

Zbiór wszystkich problemów możliwych do skonstruowania w modelu $(\aleph,T,max)$ jest oznaczany przez $\Pi$. Dowolny podzbiór właściwy modelu nieograniczonego defi-

[1] Przyjmuję następujące oznaczenia: $R^n_+ = \{(x^1,...,x^n) \in R^n : x^i \geq 0\}$; $R^n_{++} = R^n_+ - \{(0,...,0)\}$, $x_J$ jest wektorem ze współrzędnymi indeksowanymi przez elementy ze zbioru $J$.

niuje model *ograniczony*. Naturalne ograniczenia pojawiają się w kontekście modelu nadwyżki (cała ilość dobra przekracza sumę wkładu agentów) lub podziału mandatów (dobra są dostępne jedynie w całych jednostkach). O ile ograniczenie nie zostanie wprowadzone wprost, pod pojęciem „model racjonowania" będziemy rozumieć model nieograniczony.

Obecny model uogólnia podejścia Younga (1994) i Kamińskiego (2000). „Problemy kompensacji" z typami definiowanymi przez „handicapy", podobne do problemów racjonowania rozpatrywanych w niniejszym artykule, studiował Fleurbaey (1994, 1995). Thomson (1995) i Moulin (2001) dokonują przeglądu literatury dotyczącej konkretnych modeli racjonowania.

W najprostszym problemie *roszczeń* każdy agent posiada roszczenie lub wierzytelność reprezentowane przez dodatnią liczbę rzeczywistą, zaś łączna ilość dobra do podziału nie wystarcza do zaspokojenia wszystkich roszczeń (O'Neill, 1982; Aumann i Maschler, 1985; Young, 1987). Interpretacje empiryczne problemu roszczeń obejmują m.in. bankructwo, spadek i podatki (z założeniem, że łączna suma podatków jest stała).

Przykład 1: *Roszczenia:* $T = R_{++}$, $max(t) = t$.

W problemie *podziału nadwyżki* nie ma ograniczeń na ilość dobra, które może otrzymać agent (Moulin, 1985). Celem jest przydział udziałów we wspólnym przedsięwzięciu na bazie wkładu partnerów lub ich utraconych korzyści. W naturalnej wersji tego modelu $g \geq \Sigma_j t_i$ oraz $g \geq t_i$ mogą zostać przyjęte jako ograniczenia reprezentujące założenie, że mamy do czynienia z nadwyżką (zyskiem) i każdy dostaje nie mniej, niż wyniósł jego wkład.

Przykład 2: *Nadwyżka:* $T = R_{++}$, $max(t) = +\infty$.

W rzeczywistych problemach bankructwa charakterystyki prawne wierzycieli są bardziej złożone niż pojedyncze roszczenia i mogą być lepiej reprezentowane przez wektory liczb nieujemnych, z łącznym roszczeniem danego wierzyciela równym sumie współrzędnych wektora roszczeń cząstkowych (Kamiński, 2000). Roszczenia są przypadkiem szczególnym tego modelu.

Przykład 3: *Roszczenia wielowymiarowe:* $T = \mathbb{R}^k_{++}$, *dla* $t = (t^1,\ldots,t^k)$, $\max(t) = \sum_{j=1}^{k} t^j$.

*Likwidacja* firmy uogólnia zarówno problem roszczeń wielowymiarowych, jak podziału nadwyżki. W tym przypadku likwidowane przedsiębiorstwo niekoniecznie jest w upadłości i oprócz wierzycieli w kolejce do podziału czekają akcjonariusze, których roszczenia nie są *a priori* ograniczone.

Przykład 4: *Likwidacja:* $T = \mathbb{R}^{k+1}_{++}$, *dla* $t = (t^1,...,t^k,t^{k+1})$, $\max(t) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{k} t^j & \text{dla } t^{k+1} = 0 \\ +\infty & \text{dla } t^{k+1} > 0 \end{cases}$.

Charakterystyki agentów w modelu racjonowania mogą również zawierać złożoną informację nienumeryczną. W modelu przypisania obowiązków czas pracy jest podzielony pomiędzy pracowników o identycznej produktywności, o potencjalnie różnych preferencjach względem pracy i odpoczynku (Sprumont, 1991). Typem pracownika jest jego unimodalna (*single-peaked*) relacja preferencji $R \subset \mathbb{R}^2_+$, tzn. relacja binarna $R$ taka, że (i) $R$ jest przechodnia i spójna; (ii) istnieje takie $p \in R_+$, że dla dowolnych $x,y \in R_+$ takich że $x < y \leq p$ lub $p \leq y < x$, zachodzi $yRx$ i nie zachodzi $xRy$.

Przykład 5: *Przydział obowiązków z preferencjami unimodalnymi:* $T = \Re = \{R \subset \mathbb{R}^2_+ :\ R$ *jest unimodalna*$\}$, *max(R)* $= +\infty$.

W ostatnim przykładzie typy są interpretowane jako funkcje użyteczności agentów, zaś celem jest alokacja dobra w oparciu o użyteczności agentów (Young, 1994).

Przykład 6: *Racjonowanie utylitarystyczne:* $T^I = \{u: R_+ \rightarrow R$ *takie, że u jest ciągła i ściśle rosnąca*$\}$, *max(u)* $= +\infty$.

Warianty dwóch ostatnich modeli powstają przy rozpatrywaniu preferencji antyunimodalnych (*single-dipped*) (Klaus i in., 1997) oraz przy zawężeniu przestrzeni typów do funkcji użyteczności wklęsłych lub ściśle wklęsłych (Kamiński, 2000).

Przykłady 1-6 dokumentują różnorodność przestrzeni typów, które mogą zawierać informację istotną dla racjonowania. Podczas gdy roszczenia są modelem kanonicznym, rzeczywiste, bardziej skomplikowane problemy racjonowania można często lepiej przedstawić z użyciem innych przestrzeni niż dodatnie liczby rzeczywiste. W problemie podziału mandatów do amerykańskiej Izby Reprezentantów typ stanu jest zdefiniowany przez konstytucję amerykańską jako liczba jego obywateli, będąca liczbą naturalną (Balinski i Young, 1978, 1982; również, w kontekście zaokrąglania cząstkowych alokacji, patrz Balinski i Ramirez, 1999). W problemie podatków „dochód podlegający opodatkowaniu" jest pojedynczą liczbą reprezentującą możliwości płatnicze agenta, ale określenie tej liczby jest samo w sobie istotną decyzją społeczną opartą na skomplikowanej informacji liczbowej i innej dostarczonej przez podatnika. Wreszcie przykładem ograniczeń prostego modelu roszczeń jest prawo upadłościowe z najważniejszymi kategoriami roszczeń obejmującymi roszczenia zabezpieczone, niezabezpieczone, podatki, wydatki syndyka, oraz z leksykograficznym przydziałem priorytetów pomiędzy te kategorie (patrz „Zastosowania").

## Metody racjonowania

Do centralnych zagadnień racjonowania należy znalezienie „najlepszej" metody lub scharakteryzowanie rodziny metod o właściwościach pożądanych przy danej interpretacji empirycznej modelu. Charakterystyki takiej można dokonać na dwa różne, opisane poniżej, sposoby. Aksjomaty mogą reprezentować „pożądane" właściwości metody, zaś funkcja parametryczna dostarcza jej zwięzłej i konstruktywnej definicji.

## Definicje

Wektor $\gamma = (g_i)_J \in \mathbb{R}_+^J$ jest alokacją dla $(\tau;g)$ jeśli $\Sigma_J g_i = g$ oraz $0 \leq g_i \leq max(t_i)$ dla wszystkich $i \in J$.[2] *Metoda* alokacji jest funkcją $F : \Pi \to \bigcup_{J \subset \aleph, 0<|J|<\aleph_0} \mathbb{R}^J$ przypisującą każdemu problemowi $(\tau;g) \in \Pi$ alokację. Zatem wartością $F(\tau;g)$ jest wektor $F(\tau;g)_i)_J$.

Przykłady najbardziej znanych metod roszczeń (tzn. zdefiniowanych dla $T = R_{++}$) są podane poniżej.

Definicja: *Równy podział z ograniczeniem* (*Constrained Equal Award):*

$CEA(\tau;g)_i = min\{t_i,\lambda\}$, *gdzie* $\lambda \in R$ *jest takie, że* $\Sigma_J min\{t_k,\lambda\} = g$.

*Równa strata z ograniczeniem (Constrained Equal Loss):*

$CEL(\tau;g)_i = max\{0,t_i + \lambda\}$, *gdzie* $\lambda \in R$ *jest takie, że* $\Sigma_J max\{0,t_k + \lambda\} = g$.

*Podział proporcjonalny (Proportional Method):*

$$PR(\tau;g)_i = g\frac{t_i}{\sum_J t_k}.$$

[2] Herrero i in. (1999) rozpatrują model, w którym $0 \geq g_i$. Recenzent niniejszego artykułu dla „Games and Economic Behavior" postawił interesujący problem otwarty: w jaki sposób wyniki mogłyby zostać zmodyfikowane przy tak osłabionych założeniach dotyczących alokacji.

*Podział talmudyczny Aumanna-Maschlera (Talmudic Aumann-Maschler's Method):*

$$AM(\tau;g)_i = \begin{cases} CEA(\frac{1}{2}\tau;g)_i & \text{dla } g \le \frac{1}{2}\sum_J t_k \\ CEL(\frac{1}{2}\tau;g-\frac{1}{2}\sum_J t_k)_i + \frac{1}{2}t_i & \text{dla } g > \frac{1}{2}\sum_J t_k \end{cases}.$$

Metoda proporcjonalna została wprowadzona formalnie przez O'Neilla (1982) w kontekście bankructwa i spadku; CEA, CEL i AM zostały wprowadzone przez Aumanna i Maschlera (1985). CEA przypisuje każdemu równą ilość dobra, jednak nie więcej, niż wynosi roszczenie agenta. Jej odbicie zwierciadlane, CEL, dzieli równo straty przy założeniu, że nikt nie traci więcej niż wynosi jego roszczenie. Wreszcie metoda AM, opisana częściowo w Talmudzie, jest identyczna z metodą CEA operującą na wektorze $\frac{1}{2}\tau$ kiedy wartość majątku nie przekracza połowy sumy roszczeń; w przeciwnym przypadku, nadwyżka ponad $\frac{1}{2}\sum_J t_k$ jest dzielona identycznie, jak CEL operująca na wektorze $\frac{1}{2}\tau$. W problemie opodatkowania CEA, CEL i PR reprezentują odpowiednio podatek pogłówny, wyrównujący oraz liniowy (Young, 1987). Oprócz powyższych metod można zdefiniować wiele innych, również intuicyjnych (patrz Herrero i in., 1999; Moreno-Ternero i Villar, 2001). CEA, CEL i AM można łatwo zdefiniować dla dowolnych przestrzeni typów zastępując w ich definicjach $t_i$ i $t_k$ poprzez $max(t_i)$ i $\max(t_k)$. Inne metody wykorzystują informację specyficzną dla przestrzeni typów bardziej złożonych, niż roszczenia.

## Aksjomaty

Dla zilustrowania rozważanych poniżej aksjomatów posłużmy się następującym przykładem. Wydział uniwersytetu dokonuje rozdzielenia dorocznych podwyżek płac pomiędzy wykładowców w taki sposób, że nieważona średnia wszystkich podwyżek jest równa 3%. Możemy przedefiniować tę metodę jako problem alokacji $3n$ procentów pomiędzy $n$ pracowników. Po dostarczeniu typów pracowników do odpowiedniego komitetu – w postaci aktualnych cv i innych dokumentów – to samo pytanie odżywa co roku: Jakie podstawowe własności powinna mieć każda metoda ustalania podwyżek? (Powyższy opis przedstawia rzeczywistą metodę przydzielania podwyżek na poprzednim uniwersytecie autora, w tym również, niestety, trzyprocentowe ograniczenie.)

Aksjomat Symetrii mówi, że agenci tego samego typu powinni otrzymać identyczne podwyżki. Zatem pracownicy o identycznych osiągnięciach powinni otrzymać równe procentowo podwyżki.

*Symetria: Metoda F jest symetryczna, jeśli dla wszystkich problemów* $(\tau;g) \in \Pi$ *z równości* $t_i = t_j$ *dla pewnych* $t_i, t_j \in \tau$ *wynika* $F(\tau;g)_i = F(\tau;g)_j$.

Spójność metody mówi, co się stanie, gdy zmniejszymy wektor agentów (Harsanyi, 1959; Balinski i Young, 1982; Aumann i Maschler, 1985; patrz przeglądy literatury Maschlera, 1990 i Thomsona, 1996)[3]. Załóżmy, że niepusty zbiór agentów $I$, będący podzbiorem $J$, otrzymał łącznie $\Sigma_I F(\tau;g)_i$ dobra. Spójność wymaga, aby po zmniejszeniu podzbioru agentów z $J$ do $I$ i zmniejszeniu ilości dobra do podziału do $\Sigma_I F(\tau;g)_i$ agenci z $I$ podzielili $\Sigma_I F(\tau;g)_i$ pomiędzy siebie dokładnie tak samo, jak uprzednio, kiedy podziału dokonywano w ramach większego podzbioru $J$. W naszym przykładzie spójność implikuje np, że podwyżki ustalone na poziomie uniwersytetu powinny zostać takie same, jak w sytuacji, kiedy identyczna łączna suma całkowitej podwyżki jest dzielona na poziomie wydziału.

*Spójność: Metoda F jest spójna, jeśli dla wszystkich problemów* $(\tau;g) \in \Pi$ *i dla wszystkich* $I \subset J$, $I \neq \varnothing$, $F(\tau;g)_I = F(\tau_I;(\Sigma_I F(\tau;g)_i)$.

*Spójność binarna* to słabsza wersja spójności zakładająca dodatkowo, że $|I| = 2$. Kolejny aksjomat mówi, że jeśli osiągnięcia doktora X zbliżają się do osiągnięć profesora Y, to i poziomy ich podwyżek powinny się do siebie zbliżać.

*Ciągłość: Niech T będzie przestrzenią topologiczną. Metoda F jest ciągła, jeśli dla każdego zbioru agentów J i każdego ciągu problemów* $(\tau^k;g^k)$ *z tymi agentami, jeśli* $\tau^k$ *zbiega do* $\tau$ *w* $T^J$ *zaś* $g^k$ *zbiega do g w R, wówczas* $F(\tau^k;g^k)$ *zbiega do* $F(\tau;g)$ *w topologii produktowej w* $T^J \times R$.

Trzy aksjomaty opisane powyżej pojawiają się również w kontekście innym niż racjonowanie (Lensberg, 1987, 1988). Do stosunkowo niedużej grupy metod, które nie spełniają jednego lub więcej z aksjomatów wymienionych powyżej, należą: niespójne rozwiązanie Kalaia-Smorodinsky'ego (1975), niesymetryczne metody priorytetowe (Moulin, 2000), a także różne metody probabilistyczne (Moulin i Stong, 2000).

## Reprezentacja parametryczna

Aksjomaty reprezentują własności, zazwyczaj pożądane, metod alokacji. Kiedy zbiór aksjomatów zostanie ustalony, stajemy przed problemem znalezienia wszystkich metod, które spełniają te aksjomaty. Jednym ze sposobów rozwiązania tego problemu jest opis metody przy pomocy *parametrów*. Trzy z czterech metod roszczeń opisanych wcześniej – CEA, CEL oraz AM – zostały zdefiniowane przy użyciu parametru $\lambda$. Bez użycia takiego parametru zdefiniowanie metody mogłoby okazać się niezwykle skomplikowane. Ponadto, użycie reprezentacji parametrycznej umożliwia nam łatwe sprawdzenie, czy dana metoda posiada pewne własności (np.

[3] Aumann i Maschler (1985) nazywają tę własność „spójnością wewnętrzną" (*self-consistency*), zaś metodę roszczeń nazywają „spójną", jeśli na parach agentów pokrywa się ona z metodą AM.

spójność), a także badanie wrażliwości danej metody na manipulacje poprzez łączenie lub podział roszczeń (de Frutos, 1999).

Dla dowolnego Π, niech $f(t,\lambda): T \times [\lambda_{min}, \lambda_{max}] \to R \cup \{-\infty,+\infty\}$, gdzie $\lambda_{min} < \lambda_{max}$ oraz $\lambda_{min}, \lambda_{max} \in R \cup \{-\infty,+\infty\}$. W ślad za definicją Younga (1987: 400-401), $f$ nazywamy funkcją parametryczną, jeśli dla każdego $t$,

(a) $f(t,\lambda)$ jest niemalejąca względem λ,

(b) $f(t,\lambda)$ jest ciągła względem λ dla takich wartości λ, dla których $f(t,\lambda) \in R$,

oraz

(c) $f$ spełnia $f(t,\lambda_{min}) = 0$ oraz $f(t,\lambda_{max}) = max(t)$.

Postulatem dodatkowym w stosunku do założeń Younga jest przyjęcie, że

(d) jeśli $f(t,\lambda) = +\infty$, to $lim_{x \to \lambda} f(t,x) = +\infty$.

Gdy $T$ jest przestrzenią topologiczną, możemy również mówić o ciągłości względem typów, a także rozważyć podzbiór wszystkich funkcji parametrycznych ciągłych względem obydwu zmiennych. Każdą taką funkcję $f$ nazywamy ciągłą.

Warto zauważyć, że ze względu na (a)-(d), $f$ ma własność Darboux względem $\lambda$ oraz że dla każdego konkretnego $t$ i dla dowolnego $(\tau;g) \in \Pi$ istnieje $\lambda_g$ takie, że $\Sigma_J f(t_i,\lambda_g) = g$. Ponadto, jeśli dla jakiegoś innego $\lambda_h$ zachodzi $\Sigma_J f(t_i,\lambda_h) = g$, wówczas (a) implikuje, że $f(t_i,\lambda_g) = f(t_i,\lambda_h)$ dla wszystkich $i \in J$. Zatem funkcja parametryczna $f$ może posłużyć do zdefiniowania metody $F$ takiej, że dla dowolnego problemu $(\tau;g) \in \Pi$ możemy wybrać $\lambda_g$ takie, że:

$F(\tau;g)_i = f(t_i,\lambda_g)$ dla wszystkich $i \in J$ oraz $\lambda_g$ spełnia $\Sigma_J f(t_i,\lambda_g) = g$.

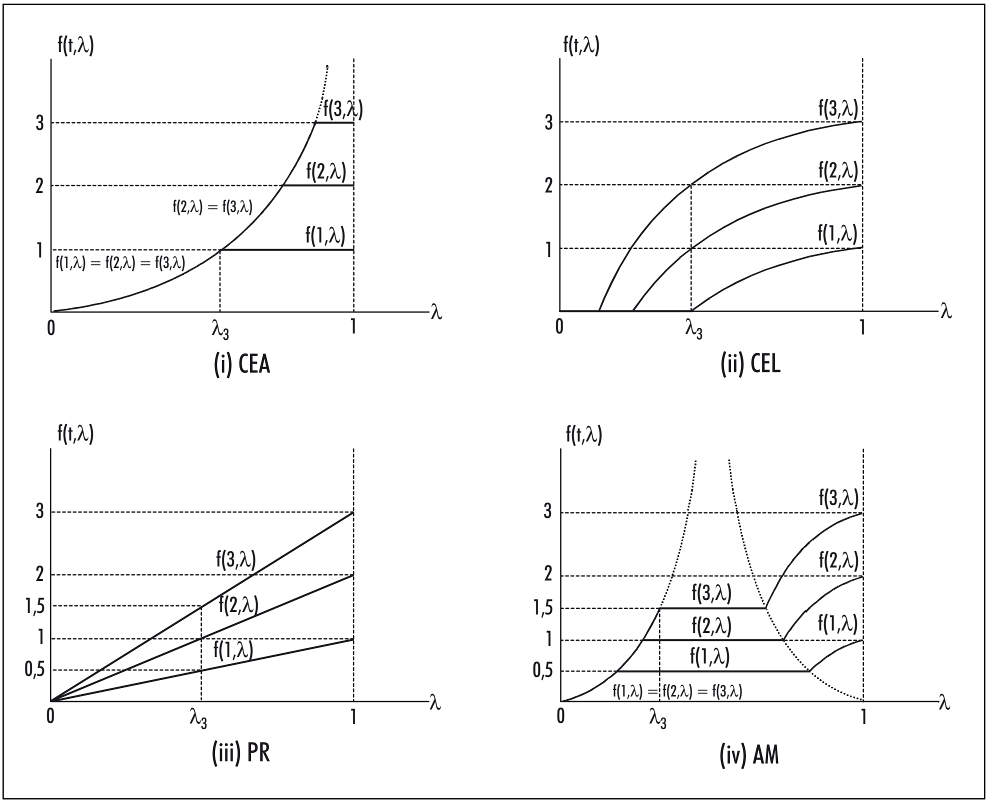
Każda metoda $F$, dla której istnieje reprezentacja parametryczna, nazywana jest metodą *parametryczną*. Metody CEA, CEL oraz AM zostały zdefiniowane według schematu opisanego powyżej, z użyciem różnych funkcji parametrycznych zamiast $f$. Reprezentacje parametryczne wymienionych wyżej metod, a także podziału proporcjonalnego opisanego wcześniej, można prosto przedstawić graficznie (patrz rysunek 1).

Funkcja parametryczna wyznacza dla każdego typu $t$ ilość dobra, którą $t$ otrzymuje na wszystkich poziomach dostępności dobra. Poziom dostępności dla konkretnego problemu zależy zarówno od całkowitej ilości dobra do podziału, jak i od typów agentów.

*Uwaga: każdą reprezentację parametryczną f można wygodnie znormalizować, tzn. znaleźć ściśle rosnącą i ciągłą funkcję Ψ określoną na przedziale [0,1] taką, że* $\Psi: [0,1] \to [\lambda_{min},\lambda_{max}]$ *oraz* $\Psi(0) = \lambda_{min}$, $\Psi(1) = \lambda_{max}$, *a także:*

*Dla wszystkich* $t \in T$ *oraz wszystkich* $\lambda \in [0,1]$, $f^N(t,\lambda) := f(t,\Psi(\lambda))$.

**Rysunek 1. Znormalizowane reprezentacje parametryczne czterech metod alokacji roszczeń.**




Dla uproszczenia oznaczeń przyjmujemy konwencję, że $tg(^1/_2\pi)$ oznacza $+\infty$.

(i) Równy podział z ograniczeniem *(CEA):* $f(t,\lambda) = min\{t, tg\ ^1/_2\lambda\pi\}$;

(ii) Równa strata z ograniczeniem *(CEL):* $f(t,0) = 0$; dla $\lambda \neq 0$, $f(t,\lambda) = max\{0, t + tg\ ^1/_2(\lambda + 1)\pi\}$;

(iii) Podział proporcjonalny *(PR):* $f(t,\lambda) = \lambda t$;

(iv) Podział talmudyczny Aumanna-Maschlera *(AM):* $f(t,\lambda) = min\{^1/_2t, tg\ \lambda\pi\}$ dla $\lambda \in [0, 0,5]$;
$f(t,\lambda) = max\{^1/_2t, t + tg\lambda\pi\}$ *dla* $\lambda \in (0,5, 1]$.

We wszystkich czterech przypadkach, $\lambda_3$ jest dobrane do problemu $(t_1,t_2,t_3;g)$ gdzie $t_i = i$ oraz $g = 3$. Ilość dobra przydzielona agentowi $i$ w takim problemie jest równa $f(i,3)$.

*Na przykład jeśli* $\lambda_{min} = 0$, $\lambda_{max} = +\infty$, *możemy użyć:*

$$\Psi(\lambda) = \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\lambda\pi \text{ dla } \lambda \in [0,1) \text{ i } \Psi(1) = +\infty.$$

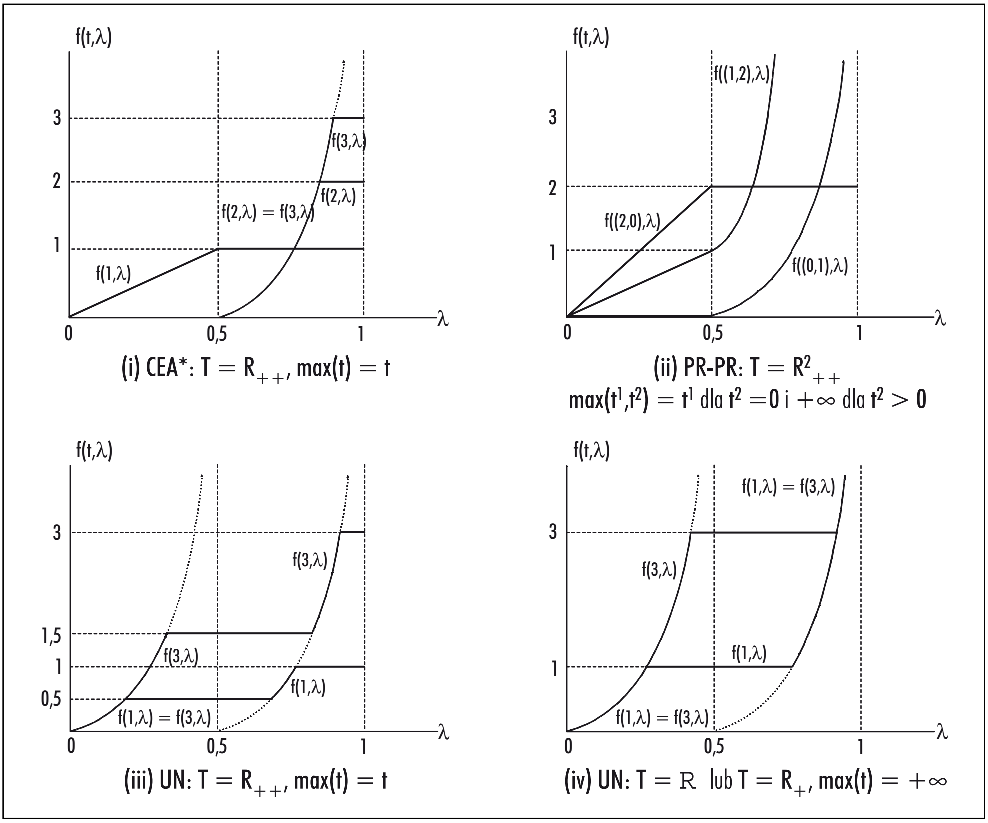
*Każda metoda roszczeń może być zatem reprezentowana przez funkcję parametryczną wtedy i tylko wtedy, gdy może być reprezentowana przez znormalizowaną funkcję parametryczną.*

We wszystkich dowodach będziemy korzystać ze znormalizowanych funkcji parametrycznych.

## Twierdzenia Younga o parametryzacji

Young (1987) scharakteryzował metody parametryczne dla problemu roszczeń i nadwyżki, tzn. dla $T = R_{++}$ oraz $max(t) = t$ lub $max(t) = +\infty$, przy ograniczeniu, że $g \geq \Sigma_J t_i$ lub, że $F(\tau;g)_i \geq t_i$.[4] Główne wyniki Younga, Twierdzenie 1 i 3 z jego artykułu, mówią, że

**Rysunek 2. Znormalizowane reprezentacje parametryczne czterech metod racjonowania dla różnych przestrzeni typów**




Dla uproszczenia notacji przyjmujemy konwencję, że $tg(\frac{1}{2}\pi)$ oznacza $+\infty$ zaś $tg(-\frac{1}{2}\pi)$ oznacza $-\infty$.

(i) Nieciągła parametryczna metoda alokacji roszczeń *CEA**: dla $t = 1$, $f(t,\lambda) = min\ \{2\lambda,1\}$; dla $t \neq 1$, $f(t,\lambda) = max\ \{0, tg[(\lambda - \frac{1}{2})\pi]\}$;

(ii) Metoda *PR-PR* dla modelu likwidacji z jednym typem roszczeń oraz podziałem nadwyżki $(k = 1)$: $f((t^1,t^2),0) = 0$; dla $\lambda \neq 0$, $f((t^1,t^2),\lambda) = min\ \{2\lambda t^1,t^1\} + max\ \{0,t^2 \times tg(\lambda - \frac{1}{2})\pi\}$;

(iii) Metoda podziału jednostajnego dla roszczeń *UN*: $f(t,\lambda) = min\{\frac{1}{2}t,\ tg\lambda\pi\}$ dla $\lambda \in [0,\ 0{,}5]$, $f(t,\lambda) = min\{t,\ max\{\frac{1}{2}t,\ tg(\lambda - \frac{1}{2})\pi\}\}$ dla $\lambda \in (0{,}5,\ 1]$;

(iv) Metoda podziału jednostajnego dla przydziału obowiązków z preferencjami unimodalnymi lub modelu podziału nadwyżki *UN*: $f(t,\lambda) = min\{t,\ tg\lambda\pi\}$ dla $\lambda \in [0,\ 0{,}5]$, $f(t,\lambda) = max\{t,\ tg(\lambda - \frac{1}{2})\pi\}$ dla $\lambda \in (0{,}5,\ 1]$, gdzie w modelu przydziału obowiązków $t = NA(R)$ oznacza alternatywę, która jest według R najwyżej preferowana.

[4] Wszystkie wyniki dla ograniczonego modelu roszczeń pozostają prawdziwe dla modelu nieograniczonego. Aby to zobaczyć, wystarczy zastosować proste odwzorowanie problemów i metod. Dla modelu ograniczonego, każdemu $(\tau;g)$ i $F$ możemy przypisać problem nieograniczony $(\tau;g - \Sigma_j t_i)$ oraz metodę $H$ takie, że $H(\tau;g - \Sigma_j t_i) = F(\tau;g) - t_J$, tzn. dokonując przeskalowania wkładów agentów do zera.

ciągła metoda podziału jest symetryczna i binarnie spójna wtedy i tylko wtedy, gdy jest parametryczna z ciągłą reprezentacją $f$.

Łatwo sprawdzić, że pojęcie reprezentacji parametrycznej stosuje się do szerszego zbioru metod niż ciągłe metody roszczeń lub podziału nadwyżek (patrz rysunek 2).

Po pierwsze, istnieją metody parametryczne i nieciągłe. Prostym przykładem jest metoda CEA*, która przyznaje bezwarunkowy priorytet wszystkim agentom z roszczeniem równym 1, a po zaspokojeniu takich uprzywilejowanych roszczeń działa tak jak CEA (patrz rysunek 2 i). Można zapytać: Jakie są konieczne i dostateczne warunki na to, aby dowolna (tzn. niekoniecznie ciągła) metoda była parametryczna? Po drugie, istotniejsze pytanie dotyczy innych przestrzeni typów. Łatwo można znaleźć reprezentacje parametryczne różnych intuicyjnych metod zdefiniowanych dla bardziej skomplikowanych przestrzeni typów, takich, jak metoda jednostajnego przydziału (Sprumont, 1991; Chun i in., 1998; patrz rysunek 2 iii-iv).

Zatem można postawić następujące naturalne pytanie: Czy możemy ogólnie scharakteryzować wszystkie metody parametryczne lub podzbiór takich metod przy użyciu aksjomatów podobnych do aksjomatów Younga dla problemów roszczeń i nadwyżki? Odpowiemy na to pytanie poniżej.

## Wyniki

Wyniki przedstawione poniżej uogólniają różne charakteryzacje otrzymane dla roszczeń i nadwyżek na *ośrodkową* przestrzeń typów. Przestrzeń jest ośrodkowa, jeśli zawiera podzbiór gęsty i przeliczalny. Przykładami przestrzeni ośrodkowych są $R$, $R^n$, a także niektóre przestrzenie funkcji rzeczywistych. Za wyjątkiem przypadków patologicznych, podprzestrzeń przestrzeni ośrodkowej z topologią odziedziczoną jest również ośrodkowa. Przestrzenie wszystkich możliwych charakterystyk wierzycieli, kredytobiorców, podatników, aplikantów czy pacjentów, występujące w sytuacjach empirycznych, są ośrodkowe. Własność ta czyni ośrodkowość fundamentalnym warunkiem informacyjnym dla wszystkich problemów racjonowania.

## Ogólne twierdzenia o parametryzacji

Główny wynik niniejszego artykułu uogólnia twierdzenia Younga na wszystkie ośrodkowe przestrzenie typów[5].

[5] Dowody znajdują się w Dodatku. Dowód Twierdzenia 1 stosuje technikę inną, niż dowód Younga. Young w decydującym kroku stosuje całkowanie po przestrzeni typów $R_{++}$. Operacja ta nie może zostać zastosowana do ogólnych przestrzeni topologicznych. Słabsza wersja części (a) → (b) została zasugerowana w Kamiński (2000).

***Twierdzenie 1**: Dla dowolnej przestrzeni ośrodkowej typów T, dowolnego ograniczenia max i dla dowolnej ciągłej metody racjonowania F, poniższe warunki są równoważne:*

*(a) F jest symetryczna i binarnie spójna;*

*(b) F jest reprezentowalna przez ciągłą funkcję parametryczną.*

Aby zobaczyć, w jaki sposób Twierdzenie 1 wzmacnia wynik Younga, rozważmy amerykańskie prawo upadłościowe (szczegóły znajdują się w części „Zastosowania"). Wierzyciele opisani są poprzez wektory roszczeń z różnych kategorii, zaś roszczenia zabezpieczone posiadają bezwzględny priorytet względem roszczeń niezabezpieczonych. Metoda racjonowania *F* może zatem przydzielić dwóm wierzycielom o identycznych roszczeniach różne wielkości w zależności od priorytetu tych roszczeń. Rezygnacja z aksjomatu symetrii i podział agentów pomiędzy kategorie priorytetu (patrz Moulin, 2000) nie rozwiązuje problemu: jeśli agenci posiadają dwa roszczenia lub więcej z różnych kategorii, ich przydziały mogą zależeć nie tylko od ich nazw i łącznych sum roszczeń, ale również od natury tych roszczeń. Metoda *F* pozostaje jednak symetryczna w bardziej odpowiednim modelu roszczeń wielowymiarowych.

Wcześniej odnotowaliśmy istnienie reprezentacji parametrycznych dla metod nieciągłych. Rysunek 2 iv przedstawia jeszcze bardziej kłopotliwą sytuację. Metoda przydziału jednostajnego dla preferencji unimodalnych posiada reprezentację parametryczną pomimo, że w przestrzeni $\mathfrak{R}$ nie została zdefiniowana żadna topologia. Metoda ta jednak wykorzystuje jedynie informację o położeniu alternatywy najlepszej dla agenta o preferencji *R* (oznaczanej NA(*R*)), podobnie, jak w przypadku metody podziału nadwyżki. Wykorzystując powyższą obserwację możemy zdefiniować następującą topologię ośrodkową w przestrzeni $\mathfrak{R}$: Zbiorem otwartym w $\mathfrak{R}$ jest każdy zbiór $A^{\mathfrak{R}}$ taki, że dla pewnego zbioru otwartego $A \subset R$, $A^{\mathfrak{R}} = \{R \in \mathfrak{R}: NA(R) \in A\}$. Zarówno metoda *U* jak i jej reprezentacja parametryczna są ciągłe w tak zdefiniowanej topologii.

Twierdzenie 2 ogólnie rozstrzyga naszkicowane powyżej zagadnienie. Ośrodkowość przestrzeni typów pojawia się w sposób naturalny wśród warunków, których koniunkcja jest równoważna parametryzowalności.

***Twierdzenie 2**: Dla dowolnej przestrzeni typów T, dowolnego ograniczenia max i dla dowolnej ciągłej metody racjonowania F, poniższe warunki są równoważne:*

*(a) F jest symetryczna, binarnie spójna oraz istnieje topologia ośrodkowa na T taka, że F jest ciągła w tej topologii;*

*(b) F jest parametryczna.*

Aksjomaty występujące w charakterystyce wszystkich metod parametrycznych są niezależne. Asymetryczne metody priorytetowe spełniają wszystkie aksjomaty oprócz symetrii (Moulin, 2000). Opuszczenie binarnej spójności dopuszcza np. niespójną metodę, która jest równa PR dla par agentów oraz CEA dla trzech i więcej agentów. Wreszcie metoda leksykograficzna z $T = R_+$, przyznająca bezwarunkowy priorytet mniejszym roszczeniom, spełnia dwa pierwsze aksjomaty. Wszystkie wymienione metody są nieparametryczne. Pierwsze dwie z nich ilustrują również niezależność aksjomatów występujących w Twierdzeniu 1.

Niektóre przestrzenie typów są przeliczalne. Można też twierdzić, że np. każde roszczenie czy dochód wyraża się liczbą całkowitą (dolarów lub centów). Ponieważ każda przeliczalna przestrzeń z topologią dyskretną jest ośrodkowa, zaś każda metoda jest ciągła w takiej topologii, Twierdzenie 2 implikuje następujący wynik:

***Wniosek**: Dla dowolnej przeliczalnej przestrzeni typów T, dowolnego ograniczenia max i dla dowolnej ciągłej metody racjonowania F, poniższe warunki są równoważne:*

*(a) F jest symetryczna i binarnie spójna;*

*(b) F jest parametryczna.*

**Spójne rozszerzenia metod binarnych**

Wiele metod racjonowania – w tym ustawy o bankructwie – wyznacza rozwiązania rozmaitych problemów racjonowania dotyczących wyłącznie par agentów. Powstaje zatem problem spójnego rozszerzenia, postawiony najwcześniej przez Aumanna i Maschlera (1985): Scharakteryzować warunki, przy których metoda binarna daje się spójnie rozszerzyć do metody dla wielu agentów. Aumann i Maschler udowodnili, że binarna metoda AM, wymieniana wielokrotnie w Talmudzie w kontekście różnych rozwiązań do problemów bankructwa i spadku, posiada jednoznaczne rozszerzenie. Dagan i Volij (1997) skonstruowali ogólne kryterium rozstrzygające, czy dowolna anonimowa i monotoniczna metoda roszczeń posiada spójne rozszerzenie. Kamiński (2000) zaproponował alternatywne kryterium dla dowolnej przestrzeni typów i pokazał, że kryterium Dagana-Volija pozostaje ważne również i dla tej sytuacji. Obydwa kryteria wykorzystują przechodniość lub quasi-przechodniość pewnych relacji binarnych zdefiniowanych przez *F*. Poniżej sformułowane zostało kryterium, które wykorzystuje fakt posiadania przez metodę reprezentacji parametrycznej.

Zdefiniujmy $\Pi^2$ jako zbiór wszystkich problemów dla dwóch agentów: $\Pi^2 = \{(\tau;g) \in \Pi: |J| = 2\}$. *Metoda binarna* $H: \Pi^2 \to \mathbb{R}^2_+$ przypisuje każdemu problemowi binarnemu $(t_i,t_j;g) \in \Pi^2$ pewną alokację. Metoda $F$ jest *spójnym rozszerzeniem* metody $H$ jeśli $F$ jest spójna oraz jeśli $F \mid \Pi^2 \equiv H$. $H$ jest *parametryczna* jeśli istnieje parametryczna funkcja $f$ taka, że $H(t_i,t_j;g) = f(t_i,\lambda)$ przy założeniu, że $f(t_i,\lambda) + f(t_j,\lambda) = g$ dla wszystkich $(t_i,t_j;g) \in \Pi^2$.

***Uwaga**: Dla dowolnej przestrzeni typów T i dowolnego ograniczenia max każda binarna metoda parametryczna H posiada dokładnie jedno spójne rozszerzenie F.*

**Dowód**: Reprezentacja parametryczna metody $H$ definiuje parametryczną metodę $F$. Twierdzenie 2 implikuje, że $F$ jest spójna. Sprawdzenie, że $F$ jest rozszerzeniem $H$ i że $F$ jest jednoznaczne jest proste.

Powyższą uwagę można zastosować do analizy binarnej metody talmudycznej Aumanna-Maschlera. Ponieważ jest ona parametryczna (patrz rysunek 1 iv), posiada jednoznaczne rozszerzenie. Stwierdzenie to stanowi treść Twierdzenia A oraz Corollary 3.1 w artykule Aumanna i Maschlera (1985).

Uwaga ta dostarcza także niezwykle prostego kryterium do rozwiązania zagadnienia istnienia spójnego rozszerzenia danej metody. Aby udowodnić, że $H$ posiada jednoznaczne rozszerzenie spójne, wystarczy znaleźć jej reprezentację parametryczną. Kryterium to można zastosować do praktycznie wszystkich metod racjonowania rozważanych przez teoretyków i praktyków. Kryteria binarne wymienione wcześniej wymagają bardziej skomplikowanych kalkulacji.

Wadą kryterium parametrycznego jest to, że nie mówi nam ono nic o metodach nieparametrycznych. Jeśli metoda binarna nie jest parametryczna, musimy użyć innego kryterium do rozstrzygnięcia, czy posiada ona spójne rozszerzenie.

## Zastosowanie: Prawo upadłościowe

Prawo upadłościowe jest zazwyczaj prezentowane poprzez zdefiniowane parami względne priorytety różnych typów roszczeń. Ponadto, typy roszczeń podzielone są na różne kategorie. Priorytety pomiędzy różnymi kategoriami są zazwyczaj leksykograficzne, natomiast alokacja wewnątrz danej kategorii roszczeń – proporcjonalna. Gdy przedstawimy różne kategorie roszczeń jako różne współrzędne wektora oznaczającego typ wierzyciela, mamy $T = \mathbb{R}^k_{++}$. Aksjomaty symetrii, spójności i ciągłości postulują bardzo naturalne wymagania pod adresem metody alokacji stosowanej przy bankructwie. Zakładając, że wiele metod alokacji w bankructwie ma powyższe własności, możemy sformułować następującą hipotezę empiryczną:

*Typowe prawo upadłościowe definiuje metodę alokacji z pewną przestrzenią typów* $T = \mathbb{R}^{k}_{++}$*, która spełnia aksjomaty symetrii, spójności i ciągłości.*

Jeśli rzeczywiście dane prawo upadłościowe można przedstawić z dobrym przybliżeniem jako model racjonowania i jeśli spełnia ono powyżej sformułowaną hipotezę empiryczną, to z Twierdzenia 1 wynika, że można je sparametryzować. Najważniejsze cechy takiego prawa mogą zostać wówczas przedstawione bardzo prosto.

Rozpatrzmy uproszczoną wersję amerykańskiego prawa upadłościowego, $F^{AB}$. Wylicza ono wszystkie rodzaje roszczeń, które powinny być traktowane identycznie jako różne „kategorie" i przydziela im odpowiednie miejsce w porządku leksykograficznym. W naszym uproszczonym modelu mamy cztery główne kategorie roszczeń, tzn. roszczenia zabezpieczone, wydatki syndyka masy upadłościowej, podatki federalne oraz roszczenia niezabezpieczone. Typ każdego agenta możemy reprezentować jako wektor z czterema nieujemnymi współrzędnymi, z których każda opisuje inną kategorię roszczeń. Przestrzenią typów jest zatem $\mathbb{R}^{4}_{++}$. Maksimum, które może otrzymać dany typ, jest równe jego łącznemu roszczeniu, tzn. sumie jego współrzędnych.

Przy tak zdefiniowanej przestrzeni typów oraz ograniczeniu można sobie wyobrazić wiele różnych metod. Na przykład informacja zawarta w przypisaniu różnych roszczeń do różnych kategorii może zostać całkowicie pominięta i podział może zostać dokonany w oparciu o łączną wielkość roszczenia, dając w wyniku jedną z metod stosowanych w klasycznym problemie roszczeń. Inną klasą metod są metody leksykograficzne: najpierw spełniane są roszczenia z kategorii o najwyższym priorytecie, a następnie roszczenia z kolejnych kategorii. Istnieje $4! = 24$ typów takich metod. Ponadto każda z tych metod musi określić sposób podziału wewnątrz każdej kategorii.

Amerykańskie prawo upadłościowe definiuje odpowiednią metodę leksykograficznie, przyznając najwyższy priorytet roszczeniom zabezpieczonym, a dalej kolejno wydatkom syndyka, podatkom federalnym i roszczeniom niezabezpieczonym. Wewnątrz każdej kategorii podział jest proporcjonalny. Taki zbiór reguł prowadzi do konstrukcji następującej reprezentacji parametrycznej:

(a) do każdej kategorii o priorytecie $i$, gdzie $i = 1,...,4$, przydzielona jest częściowa funkcja parametryczna $f_i$ zdefiniowana na przedziale [0,4];

(b) funkcja $f_i$ jest początkowo równa zeru, następnie jest liniowa wewnątrz przedziału [$i$-1, $i$] ze współczynnikiem nachylenia równym wielkości roszczenia z tej kategorii, po czym znów jest stała;

(c) funkcja parametryczna dla danego typu jest sumą częściowych funkcji parametrycznych przypisanych jej wszystkim czterem współrzędnym (patrz tabela 1).

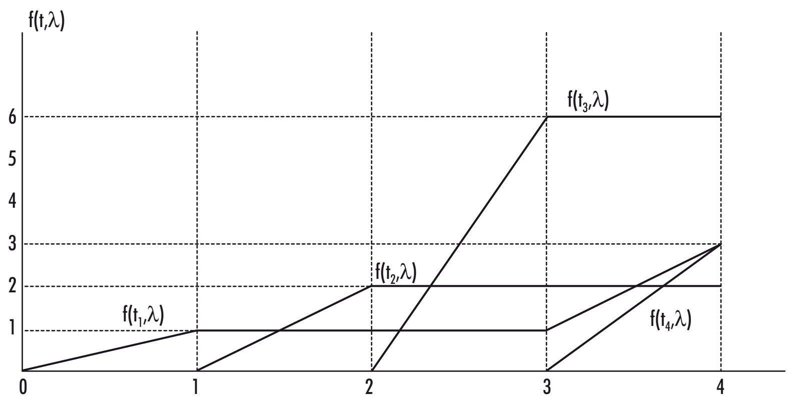
**Tabela 1. Reprezentacja parametryczna uproszczonej wersji amerykańskiego prawa upadłościowego $F^{AB}$**

| | |
|---|---|
| Model: | $T = R^4_{++} = \{t = (t^1,t^2,t^3,t^4) \in R^4\!: t^j \geq 0$ dla $j = 1,2,3,4$ oraz $t^j > 0$ dla pewnego $j\}$<br>max $(t_i) = \Sigma_j t^j$ |
| Kategorie roszczeń: | $t^1$ – roszczenia zabezpieczone<br>$t^2$ – wydatki syndyka<br>$t^3$ – podatki federalne<br>$t^4$ – roszczenia niezabezpieczone |
| Funkcja parametryczna: | $[\lambda_{min}, \lambda_{max}] = [0,4]$<br>$f(t,\lambda) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + f_4(t)$, gdzie $f_i(t) = max\ \{0, min\ \{(\lambda - i + 1)t^i, t^i\}\}$. |

Bardziej precyzyjna rekonstrukcja prawa upadłościowego wymagałaby wielu modyfikacji. Po pierwsze, wszystkich kategorii roszczeń jest kilkadziesiąt. Po drugie, prawo pośrednio narzuca pewne ograniczenia na wektor roszczeń. Na przykład może być tylko jeden syndyk, który nie może posiadać roszczeń innych kategorii. Tak więc wektor roszczeń musi zawierać dokładnie jednego agenta z dodatnią współrzędną reprezentującą wydatki syndyka i wszystkie inne współrzędne tego agenta muszą być równe zeru. Z kolei może istnieć wielu agentów posiadających zarówno dodatnie roszczenia zabezpieczone, jak i niezabezpieczone.

Modyfikacje naszkicowane poniżej nie mają wpływu na reprezentację parametryczną problemu, który zawiera wyłącznie typy należące do jednej z czterech kategorii. Rysunek 3 przedstawia reprezentację parametryczną metody upadłościowej $F^{AB}$

**Rysunek 3. Reprezentacja parametryczna FAB dla czterech różnych typów: $t_1 = (1,0,0,2)$, $t_2 = (0,2,0,0)$, $t_3 = (0,0,6,0)$, $t_4 = (0,0,0,3)$**




$F^{AB}$: $[\lambda_{min}, \lambda_{max}] = [0,4]$;

$T = R^4_{++}$, $max(t_i) = t_i^1 + t_i^2 + t_i^3 + t_i^4$

dla przykładowego problemu z czterem agentami. Wierzyciele 2-4 posiadają roszczenia należące do dokładnie jednej kategorii, podczas gdy wierzyciel 1 posiada roszczenia zarówno zabezpieczone, jak i niezabezpieczone.

Prawa upadłościowe zawierają skomplikowane i często nieprecyzyjne zapisy priorytetów. Wiele kategorii roszczeń jest tam wprowadzanych *ad hoc*, a metody alokacji są definiowane jedynie częściowo, dla niektórych par typów lub kategorii. Powyższe rozważania sugerują, że kilkaset praw upadłościowych funkcjonujących we współczesnym świecie można by przedstawić zwięźlej w postaci rozbudowanej Tabeli 1, o ile dane prawo jest rzeczywiście parametryczne. Prosta sugestia dla ustawodawcy, poprawiająca klarowność jego produktu, brzmiałaby następująco:

(1) Wylicz wszystkie kategorie roszczeń i zdefiniuj odpowiednie przestrzenie typów;

(2) Zdefiniuj funkcję parametryczną reprezentującą twoją metodę.

Prawa likwidacyjne, prawo spadkowe, prywatyzacja lub restytucja mienia również mogłyby, co do zasady, zostać sformalizowane i uproszczone w podobny sposób.

**Podsumowanie**

Centralnym problemem racjonowania jest alokacja pewnej ilości dobra pomiędzy agentów o danych typach. Problem ten jest analizowany w niniejszym artykule poprzez scharakteryzowanie rodziny metod racjonowania posiadających szczególnie interesujące własności.

Trzy podstawowe aksjomaty to symetria, spójność i ciągłość. Symetria mówi, że agenci tego samego typu otrzymują jednakowe wielkości. Spójność wymaga, aby agenci otrzymujący pewną porcję dobra wewnątrz większego zbioru otrzymywali dokładnie tę samą porcję, kiedy dokonują przydziału pomiędzy siebie. Ciągłość oznacza, że kiedy parametry danego problemu zbliżają się do parametrów pewnego problemu, porcje agentów również zbliżają się do porcji otrzymanych w tym problemie.

Z drugiej strony, wiele metod występujących w praktyce jest zdefiniowanych przy pomocy pośrednich parametrów, takich, jak schematy podatkowe, które definiują porcję każdego na wszystkich możliwych poziomach dostępności dobra.

Metody racjonowania, które spełniają trzy podstawowe aksjomaty, w tym ciągłość względem pewnej ośrodkowej topologii w przestrzeni typów, to dokładnie te same metody, które można przedstawić przy pomocy funkcji parametrycznych. Ponieważ zdecydowana większość metod rozpatrywanych przez teoretyków lub stosowanych przez praktyków spełnia zasady symetrii, spójności i ciągłości, funkcje parametryczne stanowią uniwersalne i wygodne narzędzie do prostego i konstruktywnego przedstawienia takich metod.

**Dodatek: Dowody**

We wszystkich poniższych dowodach $(\tau;g) \in \Pi$ oznacza dowolny problem racjonowania, zaś dla wszystkich $i \in J$, $g_i$ oznacza $F(\tau;g)_i$.

Dowód Twierdzenia 1: Niech $f$ będzie ciągłą reprezentacją parametryczną $F$ i niech $I \subset J$, $I \neq \varnothing$. Z definicji metody parametrycznej możemy znaleźć $\lambda_g \in [0,1]$ takie, że:

(1) $$\Sigma_J f(t_i,\lambda_g) = g \text{ oraz dla wszystkich } i \in J,\ f(t_i,\lambda_g) = g_i.$$

Najpierw udowodnimy, że $F$ jest spójna. Niech $I$ będzie niepustym zbiorem agentów. Zdefiniujmy $h = \Sigma_I g_i$; z (1) wynika, że $\Sigma_I f(t_i,\lambda_g) = \Sigma_I g_i = h$. Tak więc suma wartości funkcji parametrycznej na poziomie $\lambda_g$ jest równa $h$, zatem dla problemu $(\tau_I;h)$ definicja metody parametrycznej implikuje, że dla wszystkich $i \in I$, $F(\tau_I;h)_i = f(t_i,\lambda_g) = g_i$.

Po drugie, udowodnimy symetrię. Jeśli $t_i = t_j$ dla pewnych $i,j \in J$, wówczas $f(t_i,\lambda) = f(t_j,\lambda)$ dla wszystkich $\lambda \in [0,1]$. Zatem dla $\lambda = \lambda_g$ mamy $g_i = f(t_i,\lambda_g) = f(t_j,\lambda_g) = g_j$.

Następujące lematy zostaną wykorzystane w części dowodu (a) $\rightarrow$ (b).

***Lemat 1**: Dla dowolnej ośrodkowej topologicznej przestrzeni typów T i dla dowolnej symetrycznej, binarnie spójnej i ciągłej metody F, jeśli f jest reprezentacją parametryczną F, to f jest ciągła.*

Dowód: Niech $(t,\lambda) \in T \times [0,1]$ i niech $(t_n,\lambda_n)$ zbiega do $(t,\lambda)$: $(t_n,\lambda_n) \rightarrow (t,\lambda)$.

Załóżmy, że $f(t_n,\lambda_n) \nrightarrow f(t,\lambda) = h^*$. Możemy wówczas znaleźć $(t_{n_k},\lambda_{n_k})$, czyli podciąg $(t_n,\lambda_n)$, taki, że $f(t_{n_k},\lambda_{n_k}) \rightarrow h \neq h^*$. Załóżmy przykładowo, że $h < f(t,\lambda)$. Oznaczmy $h^* - h = 5\varepsilon$ zaś $f(t_{n_k},\lambda_{n_k}) = h_k$.

Ponieważ $h_k \rightarrow h = h^* - 5\varepsilon$, dla odpowiednio dużego $N_1$ i dla każdego k > $N_1$ zachodzi $h_k < h^* - 4\varepsilon$. Nierówność ta implikuje:

(2) $$0 < \tfrac{1}{2}(h^* - h_k) - 2\varepsilon$$

Oznaczmy teraz $F(t,t_{n_k};h^*+h_k)=(g_1^k,g_2^k)$. Ponieważ $t_{n_k}\to t$, $h_k\to h$ oraz F jest ciągła we wszystkich zmiennych, $(g_1^k,g_2^k)\to F(t,t;h^*+h)$. Ze względu na symetrię *F*, $F(t,t;h^*+h)=(\frac{1}{2}(h^*+h),\frac{1}{2}(h^*+h))$. Oznacza to, że dla odpowiednio dużego $N_2$, dla dowolnego $k > N_2$, zachodzą następujące nierówności:

(3) $$g_1^k<\tfrac{1}{2}(h^*+h_k)+\varepsilon$$

(4) $$g_2^k>\tfrac{1}{2}(h^*+h_k)-\varepsilon$$

Nierówności powyższe w połączeniu z nierównością (2) są spełnione jednocześnie dla dowolnego $k > max\{N_1,N_2\}$. Dodając stronami nierówność (2) do (3) i odejmując (2) od (4) otrzymujemy:

(5) $$g_1^k<h^*-\varepsilon$$

(6) $$g_2^k>h_k+\varepsilon$$

Ponieważ *f* jest reprezentacją parametryczną *F*, możemy znaleźć $\lambda^*$ takie, że $f(t,\lambda^*)=g_1^k$ oraz $f(t_{n_k},\lambda^*)=g_2^k$. Możemy zatem przepisać (5) i (6) w następujący sposób:

(7) $$f(t,\lambda^*)<f(t,\lambda)-\varepsilon$$

(8) $$f(t_{n_k},\lambda^*)>f(t_{n_k},\lambda_{n_k})+\varepsilon$$

Ponieważ *f* jest niemalejąca względem $\lambda$ dla wszystkich typów, nierówności (7) i (8) implikują, że $\lambda_{n_k}<\lambda^*<\lambda$ dla każdego $k > max\{N_1,N_2\}$, a w konsekwencji, że $\lambda_{n_k}\not\to\lambda$, co prowadzi do sprzeczności z naszym założeniem.

Oznaczmy teraz dla dowolnego $t \in T$ przez *dom(t)* przedział wszystkich ilości dobra, które *t* może otrzymać, tzn. *dom(t) = [0,max(t)]* jeśli *max(t)* $< +\infty$ i *dom(t)* $= R_+$ jeśli *max(t)* $= +\infty$. Niech $Y=\cup_{t_i\in T}\{t_i\}\times dom(t_i)$ oznacza zbiór zawierający wszystkie pary, które można utworzyć z różnych typów oraz wszystkich ilości dobra, które dany typ może otrzymać.

***Lemat 2**: Dla dowolnej ośrodkowej przestrzeni typów T i dla dowolnej symetrycznej, binarnie spójnej i ciągłej metody racjonowania F, istnieje funkcja r: $Y\to R$ taka, że:*

*(a) Funkcja $r(t,x)$ jest ściśle rosnąca w $x$;*

*(b) Dla wszystkich $(\tau;g) \in \Pi$, dla wszystkich $i,j \in J$, dla wszystkich $\varepsilon$ takich, że $0 < \varepsilon < F(\tau;g)_j$, $r(t_i,F(\tau;g)_i) > r(t_j,F(\tau;g)_j - \varepsilon)$.*

Dowód: Lemat 2 jest nieznacznie zmodyfikowaną wersją Twierdzenia 2 z pracy Kamińskiego (2000). Funkcja $r$ jest wariantem standardu porównawczego (*standard of comparison*) Younga (1994).

Dowód Twierdzenia 1, część *(a)* $\rightarrow$ *(b)*: Funkcja $r$ z Lematu 2 zostanie wykorzystana do konstrukcji reprezentacji parametrycznej $f$ dla $F$. Lemat 1 gwarantuje, że $f$ jest ciągła.

Zdefiniujmy $\lambda_{min} = inf\{r(t_i,x): t_i \in T$ i $x \in dom(t_i)\}$, $\lambda_{max} = sup\{r(t_i,x): t_i \in T$ i $x \in dom(t_i)\}$. Wówczas:

(9) $$f(t,\lambda) = \sup\{x:\ x = 0 \text{ lub } x \in dom(t) \text{ i } r(t,x) \le \lambda\}$$

Funkcja $f$ jest zdefiniowana w przedziale $[\lambda_{min},\lambda_{max}]$ i jest oczywiste, że $\lambda_{min} < \lambda_{max}$. Sprawdzimy teraz, że $f$ posiada wszystkie własności funkcji parametrycznej.

Ad. (a): Niech $\lambda_1,\lambda_2 \in [\lambda_{min},\lambda_{max}]$ i niech $\lambda_1 < \lambda_2$. Ponieważ $\{x: x = 0$ lub $x \in dom(t)$ i $r(t,x) \le \lambda_1\} \subset \{x: x = 0$ lub $x \in dom(t)$ i $r(t,x) \le \lambda_2\}$, $sup\{x: x = 0$ lub $x \in dom(t)$ i $r(t,x) \le \lambda_1\} \le sup\{x: x = 0$ lub $x \in dom(t)$ i $r(t,x) \le \lambda_2\}$, co ze względu na (9), definicję $f$, oznacza, że $f(t,\lambda_1) \le f(t,\lambda_2)$.

Ad. (b): Ustalmy $t \in T$. Załóżmy, że dla pewnego $\lambda_0$, $g_1 = f(t,\lambda_0)$ i $f(t,\lambda)$ nie jest ciągła w punkcie $\lambda_0$. Ponieważ ze względu na (a) $f$ jest niemalejąca względem zmiennej $\lambda$, musi mieć w $\lambda_0$ skok, tzn. $\lim_{\lambda\to\lambda_0^-} f(t,\lambda) = g_2 < g_1$ lub $g_1 < g_3 = \lim_{\lambda\to\lambda_0^+} f(t,\lambda)$. Obydwa przypadki są podobne; załóżmy, że zachodzi pierwszy z nich.

Jeśli $g_1 = +\infty$, to $f(t,\lambda_0) = +\infty = sup\ \{x: x = 0$ lub $x \in dom(t)$ i $r(t,x) \le \lambda_0$ oraz musi zachodzić $max(t) = +\infty$. Ponieważ $f$ jest niemalejąca, $f$ nie może przyjmować wartości z $(g_2,+\infty)$, w tym $g_2 + 1$. Rozpatrzmy $f(t,r(t,g_2 + 1))$. Z (9) wynika, że $f(t,r(t,g_2 + 1)) = sup\ \{x: x = 0$ lub $x \in dom(t)$ i $r(t,x) \le r(t,g_2 + 1)\} = g_2 + 1$; ponieważ $g_2 + 1 \in (g_2,+\infty)$, otrzymaliśmy sprzeczność.

Jeśli $g_1 < +\infty$, to (ponieważ $f$ jest niemalejąca) $f$ nie może przyjmować wartości z $(g_2,g_1)$, w tym $½(g_1 + g_2)$. Rozważmy $f(t,r(t,½(g_1 + g_2)))$. Z definicji, $f(t,r(t,½(g_1 + g_2))) =$

$sup\{x: x = 0$ lub $x \in dom(t)$ oraz $r(t,x) \le r(t,½(g_1 + g_2)\} = ½(g_1 + g_2)$; ponieważ $½(g_1 + g_2) \in (g_2,g_1)$, otrzymujemy sprzeczność.

Ad. (c): Z definicji, $f(t,\lambda_{min}) = sup\{x: x = 0$ lub $x \in dom(t)$ i $r(t,x) \le \lambda_{min}\} \ge 0$. Z drugiej strony, $\lambda_{min} = inf\{r( t_i,x): t_i \in T$ i $x \in dom(t_i)\} \le inf\{r(t,x): x \in dom(t)\} = r(t,0)$. Ponieważ na mocy (a) $f$ jest niemalejąca w $\lambda$, $f(t,\lambda_{min}) \le f(t,r(t,0)) = 0$. Zatem $f(t,\lambda_{min}) = 0$. Podobnie, $f(t,\lambda_{max}) = max(t)$.

Ad. (d): Jeśli $f(t,\lambda_0) = +\infty$ dla pewnego $\lambda_0$, wówczas musi zachodzić $max(t) = +\infty$ (patrz (b)). Musimy zatem udowodnić, że jeśli $\lambda_0 = min\{\lambda: f(t,\lambda) = +\infty$, to $\lim_{\lambda\to\lambda_0} f(t,\lambda) = +\infty$. W przypadku przeciwnym $f(t,\lambda)$ byłaby stała w pewnym lewostronnym otoczeniu $\lambda_0$ i równa $+\infty$; zatem byłaby trywialnie ciągła.

Ponieważ z definicji $f(t,\lambda_0) = sup\{x: x = 0$ lub $x \in dom(t)$ i $r(t,x) \le \lambda_0\} = +\infty$, dla dowolnego $M > 0$ musi istnieć $\lambda_1 < \lambda_0$ taka, że $r(t,\lambda_1) > M$. Ponieważ $r(t,x)$ jest rosnący względem $x$, $f(t,x) > M$ dla wszystkich $\lambda \ge \lambda_1$ oraz, w konsekwencji, $\lim_{x\to\lambda_0} f(t,x) = +\infty$.

Pozostaje sprawdzenie, czy $f$ jest reprezentacją parametryczną $F$, tzn. czy dla dowolnego $(\tau;g) \in \Pi$ istnieje $\lambda^*$ takie, że $f(t_i,\lambda^*) = F(\tau;g)_i = g_i$.

Niech $j = ArgMin_{i \in J} \{r(t_i,g_i)\}$ i niech $\lambda^* = r(t_j,g_j)$. Zatem, dla wszystkich $i \in J$, $g_i \ge sup\{x: x = 0$ lub $x \in dom(t_i)$ i $r(t_i,x) \le r(t_j,g_j)\} = f(t_i,\lambda^*)$.

Z drugiej strony, Lemat 2 implikuje, że dla dowolnego $i \in J$ i dowolnego $\varepsilon$ takiego, że $0 < \varepsilon < g_i$, $r(t_i,g_i - \varepsilon) < r(t_j,g_j)$. Zauważmy, że $g_i = 0$ implikuje, że $g_i = f(t_i,\lambda^*)$. Tak więc $g_i - \varepsilon \le sup\{x: x = 0$ lub $x \in dom(t_i)$ i $\mathrm{r}(t_i,x) \le r(t_j,g_j)\} = f(t_i,\lambda^*)$ i stąd $g_i \le f(t_i,\lambda^*)$.

Dowód Twierdzenia 2, *(a) → (b)*: Bezpośrednio z Twierdzenia 1, *(a) → (b)*.

Dowód Twierdzenia 2, *(b) → (a)*: Niech $f$ będzie znormalizowaną parametryczną reprezentacją $F$. $F$ jest symetryczna i binarnie spójna ze względu na argumenty użyte w dowodzie Twierdzenia 1, *(b) → (a)*. Wprowadzimy ośrodkową topologię na $T$ z funkcją przypisującą $f(t,\lambda)$ każdemu $t$ oraz wykażemy, że $F$ jest ciągła w tej topologii. Rodzina otoczeń $t$ jest określona poprzez pseudometrykę w przestrzeni funkcji $\Phi = \{f(t,\lambda): t \in T\}$.

(10) Definicja: *Dla dowolnego $t \in T$ oraz dowolnego $\varepsilon > 0$, $\varepsilon$ – otoczenie punktu $t$ w $T$ to zbiór wszystkich $t_i \in T$ takich, że $|f(t,\lambda) - f(t_i,\lambda)| < \varepsilon$ dla wszystkich $\lambda \in [0,1]$.*

Pokażemy najpierw, że istnieje przeliczalny i gęsty podzbiór $T_0 \subset T$.

Szkic argumentu: Dla dowolnej liczby naturalnej $n$ rozważmy rodzinę funkcji parametrycznych $\Phi_n$ takich, że każda $f^* \in \Phi_n$ jest przedziałami liniowa wewnątrz następujących przedziałów: $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ dla $k = 0,\ldots,n-1$ i posiada wartości ograniczone do zbioru $\{\frac{m}{n}: m$ jest liczbą całkowitą nieujemną$\}$. Wówczas $U_n \Phi_n$ jest przeliczalnym i gęstym podzbiorem $\Phi$ z topologią $|\cdot|$. Przypiszmy do każdego $f^* \in \Phi_n$ i do każdej liczby naturalnej $l$ dowolne $t = t(n,f^*,l) \in T$ takie, że $|f(t,\lambda) - f^*(\lambda)| < \frac{1}{l}$ dla wszystkich $\lambda \in [0,1]$; lub zbiór pusty, jeśli nie istnieje $t$ o pożądanych własnościach. Zbiór $U_{n,f^*,l}$ $t(n,f^*,l)$ jest przeliczalny i gęsty w topologii zdefiniowanej w (10).

Ciągłość $F$ wynika z faktu, że $f$ jest ciągła w $\lambda$ oraz z tego, że jeśli $|t_i - t_j| < \varepsilon$, to na mocy (10) porcje przypisane $t_i$ i $t_j$ nie mogą różnić się o więcej, niż $\varepsilon$, tzn. $|g_i - g_j| < \varepsilon$.

## Bibliografia


Aumann, R.J., Maschler, M., 1985. *Game Theoretic Analysis of a Bankruptcy Problem from the Talmud*. Journal of Economic Theory 36, 195-213.

Balinski, M., Ramirez, V., 1999. *Parametric methods of apportionment, rounding and production*. Mathematical Social Sciences 37, 107-122.

Balinski, M.L., Young, H.P., 1978. *Stability, Coalitions, and Schizms in Proportional Representation Systems*. American Political Science Review 72, 848-858.

Balinski, M.L., Young, H.P., 1982. *Fair Representation: Meeting the Ideal of One Man, One Vote*. Yale University Press, New Haven, Conn.

Chun, Y., Schummer, J., Thomson, W., 1998. *Constrained Egalitarianism: A New Solution For Claims Problems*. Mimeo.

Dagan, N., Volij, O., 1997. *Bilateral Comparisons and Consistent Fair Division Rules in the Context of Bankruptcy Problems*. International Journal of Game Theory11-25.

de Frutos, M.A., 1999. *Coalitional Manipulations in a Bankruptcy Problem*. Review of Economic Design 4, 255-272.

Fleurbaey, M., 1994. *On Fair Compensation*. Theory and Decision 36, 277-307.

Fleurbaey, M., 1995. *Three Solutions for the Compensation Problem*. Journal of Economic Theory 65, 505-521.

Harsanyi, J.C., 1959. *A Bargaining Model for the Cooperative n-Person Game*, [w:] Tucker, A.W., Luce, R.D. (wyd.), *Contributions to the Theory of Games IV*, Princeton University Press, Princeton, pp. 325-355.

Herrero, C., Maschler, M., Villar, A., 1999. *Individual rights and collective responsibility: the rights--egalitarian solution*. Mathematical Social Sciences 37, 59-77.

Kalai, E., Smorodinsky, M., 1975. *Other Solutions to Nash's Bargaining Problem*. Econometrica 43, 510-518.

Kaminski, M.M., 2000. *'Hydraulic' Rationing*. Mathematical Social Sciences 40, 131-155. Polski przekład: *Racjonowanie „hydrauliczne"*. Studia Socjologiczne, 2000, Nr 1-2, 211-231.

Klaus, B., Peters, H., Storcken, T., 1997. *Strategy-Proof Division of Private Good when Preferences are Single-Dipped*. Economics Letters 55, 339-346.

Lensberg, T., 1987. *Stability and Collective Rationality*. Econometrica 55, 935-961.

Lensberg, T., 1988. *Stability and the Nash Solution*. Journal of Economic Theory 45, 330-341.

Maschler, M., 1990. *Consistency*, [w:] *Ichiishi, T., Neyman, A., Tauman, Y.* (wyd.), *Game Theory and Applications*. Academic Press.

Moreno-Ternero, J.D., Villar, A., 2001. *The TAL-family of rules for the bankruptcy problems*. Working paper, series „A Discusion", University of Alicante.

Moulin, H., 1985. *The Separability Axiom and Equal-Sharing Methods*. Journal of Economic Theory 36, 120-148.

Moulin, H., 2000. *Priority Rules and other Asymmetric Rationing Methods*. Econometrica 68, 643-684.

Moulin, H., 2001. *Axiomatic Cost and Surplus-Sharing*, [w:] *Arrow, K., Sen, A., Suzumura, K.* (wyd.), Handbook of Social Choice and Welfare, Chapter 17.

Moulin, H., Stong, R., 2000. *Fair Queuing and other Probabilistic Allocation Methods*. Mimeo, Rice University.

O'Neill, B., 1982. *A Problem of Rights Arbitration from the Talmud*. Mathematical Social Sciences 2, 345-371.

Sprumont, Y., 1991. *The division problem with single-peaked preferences: A characterization of the uniform allocation rule*. Econometrica 59, 506-519.

Thomson, W., 1995. *Axiomatic Analyses of Bankruptcy and Taxation Problems: A Survey*. Rochester Center for Economic Research Working Paper No. 413.

Thomson, W., 1996. *Consistent Allocation Rules*. Rochester Center for Economic Research Working Paper No. 418.

Young, H.P., 1987. *On Dividing an Amount According to Individual Claims or Liabilities*. Mathematics of Operations Research 12, 398-414.

Young, H.P., 1994. *Equity in Theory and Practice*. Princeton University Press, Princeton. Polski przekład: *Sprawiedliwy podział*, Scholar, Warszawa 2003.