

DECYZJE W DUŻYCH GRUPACH

– GRY OCEANICZNE W NAUKACH SPOŁECZNYCH¹

Mikołaj Jasiński*
Uniwersytet Warszawski

Streszczenie: W pracy przedstawiono problematykę gier oceanicznych. Omówione zostały twierdzenia, które pozwalają na zastosowanie indeksu Shapleya-Shubika dla gier z nieskończoną liczbą graczy. Przedstawiono również interpretacje społeczne opisywanego modelu. Omówiono szczegółowo uwarunkowania obserwowanego w rzeczywistości społecznej zjawiska określanego jako bandwagon effect – przepływ do silniejszego. Przedstawione zostały wyniki zastosowania modelu gier oceanicznych do analizy rywalizacji Baracka Obamy i Hillary Clinton podczas prawyborów przed ostatnimi wyborami prezydenckimi w USA.

Słowa kluczowe: gra prosta, ważona gra większości, koalicja wygrywająca, wartość Shapleya, indeks siły Shapleya-Shubika, gra oceaniczna, bandwagon effect, krzywa przepływu, prawyborzy, Clinton, Obama.

DECISIONS IN LARGE GROUPS

– OCEANIC GAMES IN SOCIAL SCIENCES

Abstract: The paper presents issues concerning oceanic games. The theorems, which have been discussed, make it possible to apply Shapley-Shubik index to games with infinite number of players. Social interpretations of the presented model have also been shown. Determinants of bandwagon effect observed in social reality have been described in detail. Results of applying oceanic games model to the analysis of last pre-election competition between Barack Obama and Hillary Clinton have been presented.

Keywords: simple game, weighted voting game, winning coalition, Shapley value, Shapley-Shubik index, oceanic game, bandwagon effect, bandwagon curve, primaries, Clinton, Obama.

* Mikołaj Jasiński, Zakład Statystyki, Demografii i Socjologii Matematycznej w Instytucie Socjologii Uniwersytetu Warszawskiego; e-mail: mikołaj.jasinski@is.uw.edu.pl

¹ Autor dziękuje za cenne uwagi i dyskusje dr. Marcinowi Malawskiemu i dr. Jackowi Hamanowi oraz anonimowym recenzentom. Dziękuję również dr. Markowi Styczniovi i dr. Joannie Koniecznej-Sałamatin za pomoc w przygotowaniu rysunków.

*Jedynie w dość ograniczonym sensie jednostka sama tworzy sposób mówienia i myślenia,
który jej przypisujemy.
Jednostka mówi językiem swojej grupy i myśli w sposób,
w jaki myśli jej grupa.*

Karl Mannheim, *Ideologia i utopia*, 1936

Nie wzbudza w nikim z pewnością oporów stwierdzenie, że racjonalna jednostka podejmująca decyzje w grupie poddana jest jej oddziaływaniu – choćby poprzez całą konstelację relacji z innymi jednostkami tworzącymi tę grupę. Tworzenie porozumień i kontrporozumień, budowanie i burzenie koalicji to zjawiska nieodłącznie towarzyszące naszemu udziałowi w grupach społecznych. Jednostka, przy tych samych preferencjach, podejmie niejednokrotnie inną decyzję, wybierając „w samotności”, inną zaś wybierając w obliczu innych jednostek-graczy (uczestników podziału, głosujących itp.). W odmienny sposób należy jednak opisywać te sytuacje, gdy decydent znajduje się w tzw. małej grupie – gdy jest w stanie „ogarnąć wzrokiem” pozostałych współdecydentów oraz okoliczności podejmowania decyzji, gdy decydent pozostaje w tłumie anonimowych jednostek. Z drugim typem sytuacji spotykamy się niezwykle często w społecznej rzeczywistości – w zgromadzeniach akcjonariuszy, podczas partyjnych prawyborów, referendum, wyborów itp.²

W 10 numerze „Decyzji” z grudnia 2008 r. Marcin Malawski w syntetycznym tekście poświęconym wartości Shapleya naszkicował to, jedno z ważniejszych pojęć wykorzystywanych do opisu decyzji grupowych – w teorii n -osobowych gier kooperacyjnych. W artykule tym autor scharakteryzował podstawowe własności wartości Shapleya, skupiając jednak uwagę na grach o skończonej liczbie graczy. W niniejszym tekście przedstawię zasygnalizowane przez Malawskiego możliwe rozszerzenie wykorzystania wartości Shapleya dla gier o nieskończonym zbiorze graczy – takich, których nie sposób „ogarnąć wzrokiem”. Wprawdzie do precyzyjnego wprowadzenia pojęć omawianych w poniższym tekście Shapley wraz ze swoimi współpracownikami użył aparatu matematycznego znacznie wykraczającego poza kurs matematyki szkoły średniej, postaram się jednak przedstawić tę tematykę pomijając niektóre formalizacje, niekonieczne do zrozumienia przedstawianych problemów – skupię się raczej na interpretacji poszczególnych propozycji. Szerzej o grach kooperacyjnych czytelnik ma możliwość przeczytać w dowolnym podręczniku teorii gier³, czy choćby we wspomnianym artykule Marcina Malawskiego.

² Wątpliwości co do stosowalności modelu gier oceanicznych dla opisu powszechnych wyborów czy narodowych referendum przedstawię w dalszej części tekstu.

³ Na przykład (Straffin, 2001).

1. Gry proste. Indeks Shapleya-Shubika.

W naszych rozważaniach skupimy się na tzw. *grach prostych*. Jest to model odwołujący się do dość intuicyjnych założeń. Podzbiory graczy nazywać będziemy *koalicjami*. Zasadniczym założeniem jest, że rozróżniamy dwa rodzaje koalicji: *koalicje wygrywające* i *koalicje przegrywające*. Ponadto:

- (i) koalicja niezawierająca żadnego gracza (zbiór pusty) jest koalicją przegrywającą;
- (ii) koalicja składająca się ze wszystkich graczy jest koalicją wygrywającą;
- (iii) jeśli pewna koalicja jest koalicją wygrywającą, to wszystkie koalicje ją zawierające też są koalicjami wygrywającymi.

Aby formalnie zapisać powyższe założenia należy uzgodnić kilka oznaczeń. Oznaczenia te będą przydatne w dalszej części rozważań.

Każdą grę kooperacyjną da się zapisać jednoznacznie odwołując się do dwóch pojęć: *zbioru graczy* $N = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ oraz *funkcji charakterystycznej* v , przez którą rozumieć będziemy łączną wypłatę (zysk), którą jest w stanie zapewnić sobie dana koalicja (pojedynczego gracza traktujemy jako jednoosobową koalicję) w rywalizacji z pozostałymi graczami, nienależącymi do niej. W przypadku gier prostych funkcja ta przyjmuje tylko dwie wartości. Jeśli koalicja S jest koalicją wygrywającą, wówczas $v(S) = 1$, w przeciwnym razie $v(S) = 0$.

Powyższe określenie **gry prostej** (N, v) przedstawić można zatem następująco:

- (i) $v(\emptyset) = 0$;
- (ii) $v(N) = 1$;
- (iii) jeżeli $v(S) = 1$ i $S \subseteq T$, to $v(T) = 1$.

Szczególnym podzbiorem gier prostych są *ważone gry większości*, czyli takie, w których każdemu i -temu głosującemu przyporządkowana jest nieujemna liczba rzeczywista, tzw. waga, którą oznaczać będziemy przez w_i . Warunkiem koniecznym i wystarczającym przyjęcia wniosku jest osiągnięcie (lub przekroczenie)⁴ przez koalicję głosujących za nim odpowiedniej liczby wag (głosów) ustalonej przez regułę decyzyjną. Ta graniczna wielkość nazywana bywa kwotą lub progiem. Oznaczać ją będziemy literą c . Jeśli na przykład $c = 1/2$, wówczas powiemy o podejmowaniu decyzji bezwzględną większością głosów, jeśli zaś $c = 3/4$, mamy wówczas do czynienia z jedną spośród tzw. kwalifikowanych większości.

⁴ W różnych tekstach przyjmuje się odmiennie określenia tej własności ważonych gier większości. W istocie przyjęcie jako reguły decyzyjnej „przekroczenia” odpowiedniej sumy wag prowadzi do odmiennych gier, niż w przypadku przyjęcia jako kryterium „osiągnięcia” tej samej sumy. W szczególności przyjęcie tego ostatniego rozwiązania, dla sumy równej 50 proc., może prowadzić do gry z dwoma rozłącznymi koalicjami wygrywającymi (tzw. gry niewłaściwej). W dalszych rozważaniach, dotyczących gier oceanicznych, rozróżnienie to nie będzie znaczące.

Ważoną grę większości z graczami $1, \dots, n$ oraz kwotą c zapisywać będziemy następująco:

$$[c; w_1, \dots, w_n].$$

W rozważaniach będę posługiwał się *wartością Shapleya*, posiadającą w grach oceanicznych własności szczególnie interesujące wśród różnych rozwiązań gier kooperacyjnych. Dla gier prostych – w tym w ważonych grach większości – wartość Shapleya nazywana jest *indeksem Shapleya-Shubika*. Indeks ten otworzył drogę do powstania całej grupy rozwiązań, zwanych indeksami siły. Są traktowane jako miara wpływu gracza (jednostki, koalicji) na decyzje grupowe, jej udziału we władzy⁵. Wartość Shapleya oraz indeks Shapleya-Shubika zostały przedstawione we wspomnianym tekście Malawskiego. Zainteresowany czytelnik może zapoznać się z zastosowaniami i interpretacją indeksów siły w wielu innych tekstach poświęconych tej tematyce⁶.

Wartością Shapleya i -tego gracza w grze (N, v) nazwiemy liczbę daną wyrażeniem:

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \subseteq N} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} [v(S) - v(S - \{i\})],$$

gdzie: s oznacza liczbę graczy koalicji S , zaś n – liczbę wszystkich graczy.

W grach prostych wprowadzić można pojęcie gracza decydującego albo gracza krytycznego. Jest to taki gracz, którego dołączenie do koalicji, która była koalicją przegrywającą przekształca ją w koalicję wygrywającą. We wzorze na wartość Shapleya tylko w takich sytuacjach różnica $v(S) - v(S - \{i\})$ będzie różna od zera i równa 1.

Wzór na wartość Shapleya dla gier prostych – **indeks Shapleya-Shubika** – przybiera prostszą postać:

$$\varphi_i = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i = \text{dec}(S)}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!},$$

gdzie: zapis $i = \text{dec}(S)$ oznacza, że i -ty gracz jest decydujący dla koalicji S .

Do tych samych wyników prowadzi odwołanie się do różnych uporządkowań graczy. Wówczas indeks Shapleya-Shubika i -tego gracza, to

$$\varphi_i = \frac{\text{liczba uporządkowań zbioru } N, \text{ gdzie gracz } i \text{ jest decydujący}}{\text{liczba wszystkich uporządkowań zbioru } N}.$$

⁵ Nieco lepiej sens i interpretację indeksów siły oddaje ich określenie w języku angielskim – *power indices* – dzięki występującej w tym języku dwuznaczności: *power* – siła, władza.

⁶ Między innymi (Jasiński, 2000, 2003, 2004; Mercik, 1999; Sosnowska, 1999).

W powyższym wyrażeniu i -ty gracz ma być decydujący dla koalicji utworzonych przez graczy poprzedzających go (występujących „przed nim”) w rozważanych uporządkowaniach. Innym sposobem określenia indeksu Shapleya-Shubika jest **probabilistyczna definicja indeksu Shapleya-Shubika**:

Indeks Shapleya-Shubika i -tego gracza jest równy prawdopodobieństwu tego, że rozważając losowe uporządkowania graczy, koalicja zawierająca graczy poprzedzających i -tego gracza wraz z nim samym będzie koalicją wygrywającą, zaś ta sama koalicja bez i -tego gracza będzie koalicją przegrywającą.

Sformułowanie powyższe dla gier ze skończoną liczbą graczy nie wnosi wiele nowego. Przedstawienie indeksu siły jako prawdopodobieństwa pewnego zdarzenia stanowi jednak dogodny punkt wyjścia dla rozważania gier nieskończonych.

2. Od grupy do oceanu

Poniższe przykłady, przedstawione za Straffinem⁷, pozwolą nam lepiej przybliżyć sytuację gry z dużą liczbą małych graczy.

Przykład 1a. – trójka graczy: 1 duży i 2 małych

Nasze rozważania zaczniemy od zaledwie trójki graczy, na przykład klubów parlamentarnych. Największy klub – oznaczymy go jako x – stanowi 40 proc. zgromadzenia, pozostałe (oznaczymy je numerami: 1 i 2) – po 30 proc. Do podjęcia decyzji potrzeba bezwzględnej większości głosów.

Sytuację możemy więc przedstawić jako ważoną grę większości postaci:

$$[50\%; 40\%, 30\%, 30\%].$$

Łatwo pokazać, że każdy z klubów jest równie potrzebny do utworzenia koalicji wygrywającej. Jeśli, idąc za interpretacją Shapleya, rozważylibyśmy wszystkie 6 uporządkowań naszej trójki graczy, wówczas okazałoby się, że każdy jest graczem decydującym w dwóch uporządkowaniach. To oznacza, że każdemu z graczy należy przypisać wartość indeksu Shapleya-Shubika równą $1/3$.

Jeśli na dodatek zwrócić uwagę na identyczność obu mniejszych klubów, wówczas rozróżnimy zaledwie trzy typy uporządkowań, różniących się usytuowaniem dużego klubu:

$$40\%-30\%-30\%$$

$$30\%-40\%-30\%$$

$$30\%-30\%-40\%$$

⁷ Por. (Straffin, 1983).

Tylko w jednym z nich duży klub jest graczem decydującym. Jeśli więc przypiszemy mu siłę równą $1/3$, to pozostałe – w naszej grze posiadające symetryczną pozycję – podzielą się resztą równą $2/3$.

Ze względu na dalsze rozważania zapiszemy nasz wynik następująco:

$$\varphi_x = \frac{1}{3}, \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{2}{3}.$$

Przykład 1b. – 7 graczy: 1 duży i 6 małych

Wyobraźmy sobie, że graczy przybywa – być może w wyniku konfliktów każdy z mniejszych klubów podzielił się na 3 mniejsze, zrzeszające po 10 proc. posłów. Duży klub zrzesza nadal 40 proc. posłów. Analizujemy więc grę:

[50%; 40%, 10%, 10%, 10%, 10%, 10%, 10%].

Teraz docenimy wartość obserwacji symetrii małych graczy: zamiast rozpatrywać 7! uporządkowań wystarczy rozważyć 7 typów uporządkowań, ze względu na pozycję dużego gracza (z każdym z nich wiąże się 6! uporządkowań):

- 1 typ 40%-10%-**10%**-10%-10%-10%-10%
- 2 typ 10%-40%-**10%**-10%-10%-10%-10%
- 3 typ 10%-10%-**40%**-10%-10%-10%-10%
- 4 typ 10%-10%-10%-**40%**-10%-10%-10%
- 5 typ 10%-10%-10%-10%-**40%**-10%-10%
- 6 typ 10%-10%-10%-10%-10%-**40%**-10%
- 7 typ 10%-10%-10%-10%-10%-**10%**-40%

Duży klub jest, jak widać, graczem decydującym (po przekroczeniu przez koalicję 50 proc.) w 4 typach uporządkowań: od sytuacji, gdy zajmuje 3. pozycję do sytuacji z 6. pozycją dużego gracza. W pozostałych przypadkach graczem decydującym jest któryś z małych klubów-graczy (gracze decydujący zostali zaznaczeni pogrubioną czcionką).

Podział siły będzie więc następujący:

$$\varphi_x = \frac{4}{7}, \sum_{i=1}^6 \varphi_i = \frac{3}{7}.$$

Następne przykłady będą pokazywały konsekwencje kolejnych zmian w naszej grze: „podziałów” małych graczy.

Przykład 1c. – 61 graczy: 1 duży i 60 małych

W tej sytuacji każdy z małych graczy dysponuje 1 proc. głosów, zaś duży gracz – nadal 40 proc. Wśród 61 typów uporządkowań duży klub jest graczem decydującym w 40 sytuacjach: od pozycji 12 do 51 w uporządkowaniu.

Uzyskamy teraz następujący podział siły:

$$\varphi_x = \frac{40}{61}, \sum_{i=1}^{60} \varphi_i = \frac{21}{61}.$$

Przykład 1d. – 601 graczy: 1 duży i 600 małych

W sytuacji, gdy mielibyśmy do czynienia z bardzo dużym zgromadzeniem, np. liczącym 1000 osób⁸, w którym duży klub zrzesza 400 osób (40 proc. głosów), zaś 600 pozostałych głosujących występuje niezależnie (dysponują po 0,1 proc. głosów) rozważymy 601 typów uporządkowań. Uważnemu czytelnikowi pozostawiam sprawdzenie, że tym razem podział siły między graczy będzie taki:

$$\varphi_x = \frac{400}{601}, \sum_{i=1}^{600} \varphi_i = \frac{201}{601}.$$

Jak widać, wartość indeksu Shapleya-Shubika dużego gracza dąży do wartości 2/3.

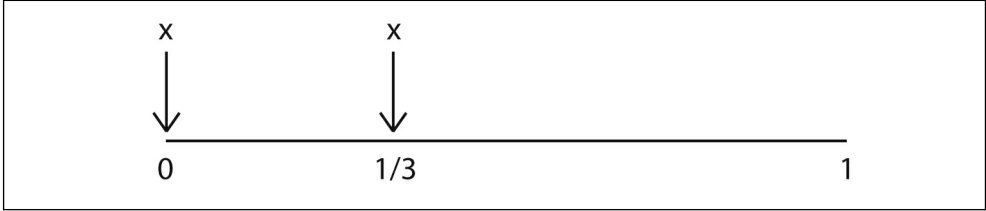
W istocie możemy tu mówić o ciągu gier, w których waga dużego gracza nie zmienia się, zaś wagi małych zmierzają do zera równocześnie z ich liczbą zmierzającą do nieskończonej. Shapley wraz z Shapiro i Milnorem⁹, przedstawił tę problematykę w postaci serii twierdzeń o wartości Shapleya dla *gier oceanicznych*, które w naszych przykładach mają postać *oceanicznych ważonych gier większości*.

Zanim za Shapleyem, Shapiro i Milnorem, wprowadzimy formalizację przedstawionego problemu, zastanowimy się, co stałoby się w naszym przykładzie w razie dalszego, nieograniczonego wzrostu liczby „coraz mniejszych” małych graczy. „Ocean” nieskończenie wielu małych graczy można przedstawić jako odcinek o jednostkowej długości, którego punkty reprezentują małych graczy. Duży gracz posiadający wagę 40 proc. może się dołączyć w różnych punktach odcinka, co odpowiada różnym typom uporządkowań: ustawienie dużego gracza w punkcie 0 odpowiada uporządkowaniu, gdy gracz ten jest na początku uporządkowania. Ustawienie dużego gracza w punkcie równym 1/3 odpowiada sytuacji, gdy poprzedza go 1/3 oceanu małych graczy. Skoro ocean ma wagę 60 proc., to oznacza to uporządkowanie, w którym ma-

⁸ Z podobną sytuacją mamy do czynienia na przykład podczas prawyborów przed wyborami prezydenckimi w USA czy podczas niektórych walnych zgromadzeń akcjonariuszy.

⁹ (Shapiro i Shapley, 1978), (Milnor i Shapley, 1978).

Rysunek 1



my 20 proc. wagi oceanu, dużego gracza z wagą 40 proc. i na końcu uporządkowania 40 proc. małych graczy.

Gracz x będzie graczem decydującym w uporządkowaniach od $1/6$ (poprzedza go 10 proc. głosów) do $5/6$ (poprzedza go 50 proc. głosów) oceanu małych graczy.

W tej granicznej sytuacji wartość indeksu Shapleya-Shubika dużego gracza będzie równa:

$$\varphi_x = \frac{50\% - 10\%}{60\%} = \frac{2}{3}.$$

3. Twierdzenie graniczne

Shapley z Shapiro rozważyli pewien ciąg ważonych gier większości Γ_l z udziałem $m + n_l$ graczy postaci:

$$\Gamma_l = [c; w_1, \dots, w_m, a_{1,l}, \dots, a_{n_l,l}],$$

gdzie:

c – oznacza kwotę określającą regułę decyzyjną w grze Γ_l ,

w_1, \dots, w_m – oznaczają wagi m -ki graczy określanych w przykładach jako duzi gracze; te wagi dla kolejnych wyrazów ciągu Γ_l pozostaną stałe,

$a_{1,l}, \dots, a_{n_l,l}$ – to wagi n_l graczy, które dla kolejnych wyrazów ciągu Γ_l będą coraz bliższe zeru, zaś wartość n_l będzie rosła nieograniczenie; graczy tych będziemy określali jako małych graczy; własności te opisują poniższe warunki:

$\sum_{j=1}^{n_l} a_{j,l} = \alpha > 0$ – łączna waga małych graczy jest stała, większa od zera,

$\max_j a_{j,l} \equiv a_{\max,l} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0$ – wobec dodatniości sumy wag małych graczy z zapisu tego wynika, że $n_l \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \infty$.

Dalsze oznaczenia potrzebne do sformułowania twierdzenia:

$$M = \{1, \dots, m\} \quad - \text{zbiór dużych graczy}$$

$$M_i = M - \{i\}$$

$$s = |S|$$

$$w(S) = \sum_{i \in S} w_i.$$

Aby umożliwić zapisanie twierdzenia w sposób syntetyczny, uniwersalny dla różnych proporcji między wagami dużych graczy, małych graczy i kwotą, Shapley i Shapero wprowadzili wygodne oznaczenie:

$$\langle w \rangle = \text{mediana}(0, w, 1) = \begin{cases} 0 & \text{dla } w \leq 0 \\ w & \text{dla } 0 \leq w \leq 1. \\ 1 & \text{dla } w \geq 1 \end{cases}$$

Twierdzenie 1

Wartość indeksu Shapleya-Shubika gracza $i \in M$ w grze Γ_l jest zbieżna do granicy równej

$$\varphi_{i,\infty} = \lim_{l \rightarrow \infty} \varphi_{i,l} = \sum_{S \subseteq M_i} \frac{\langle (c-w(S)) / \alpha \rangle}{\langle (c-w(S \cup \{i})) / \alpha \rangle} \int_0^1 t^s (1-t)^{m-s-1} dt.$$

Wyznamy wartość indeksu Shapleya-Shubika gracza x z przykładu 1 dla sytuacji granicznej. Ponieważ jest to jedyny tzw. duży gracz, nasze obliczenia znacznie się uproszczą:

$$M_x = \emptyset \quad \Rightarrow \quad S = \emptyset, \text{ zatem suma będzie miała tylko jeden składnik.}$$

Kwota, waga dużego gracza i łączna waga małych graczy spełniają warunek:

$$w_1 = 0,4 \leq c = 0,5 \leq \alpha = 0,6.$$

Gry o przedstawionej relacji między w_1 , c oraz α tworzą interesującą klasę gier wewnętrznych (ang. *interior games*), szerzej omówioną przez Shapleya i współpracowników.

Grą wewnętrzną nazywamy ważoną grę większości ze skończonym zbiorem M dużych graczy, nieskończonym zbiorem małych graczy o łącznej wadze równej α i kwocie równej c spełniającą następujący warunek:

$$w(M) \leq c \leq \alpha.$$

Można powiedzieć, że zbiór małych graczy stanowi koalicję wygrywającą zaś zbiór dużych graczy przegrywającą. Gry wewnętrzne stanowią ważną część gier nieskończonych. Shapley i Milnor (1978) przedstawili ciekawą charakterystykę wewnętr-

nych gier oceanicznych w zależności od liczby dużych graczy wraz z wnioskami z tej analizy wynikającymi.

Wyznamy granice całkowania:

$$\frac{c - w(S)}{\alpha} = \frac{c}{\alpha} < 1, \quad \text{zatem} \left\langle \frac{c}{\alpha} \right\rangle = \frac{c}{\alpha};$$

$$\frac{c - w(S \cup \{x\})}{\alpha} = \frac{c - w_1}{\alpha} < 1, \quad \text{zatem} \left\langle \frac{c - w_1}{\alpha} \right\rangle = \frac{c - w_1}{\alpha}.$$

Dla każdej gry wewnętrznej w powyższych wyrażeniach po prostu „znikają” nawiasy. Graniczna wartość indeksu Shapleya-Shubika gracza x jest równa:

$$\varphi_{x,\infty} = \int_{(c-w_1)/\alpha}^{c/\alpha} t^0 (1-t)^{1-0-1} dt = \frac{c}{\alpha} - \frac{c - w_1}{\alpha} = \frac{w_1}{\alpha}.$$

Warto zwrócić uwagę na kilka interesujących własności uzyskanego wyniku.

- (i) Przede wszystkim widać, że graniczna wartość indeksu siły Shapleya-Shubika dużego gracza dla gier wewnętrznych **nie zależy od kwoty c** .
- (ii) Poza tym „udział” dużego gracza w wagach jest mniejszy od jego granicznej siły:

$$\frac{w_1}{w_1 + \alpha} < \frac{w_1}{\alpha}.$$

Podstawienie danych z naszego przykładu potwierdza wynik uzyskany wcześniej „ręcznie”:

$$\frac{w_1}{\alpha} = \frac{0,4}{0,6} = \frac{2}{3}.$$

Umiemy już wyznaczyć graniczną wartość indeksu siły. Pozostaje jeszcze kwestia, czy jest to ta sama wielkość, co wartość indeksu siły dla gry granicznej – gry oceanicznej? Innymi słowy, czy wartość indeksów Shapleya-Shubika dużych graczy jest zbliżona do indeksów tych graczy w grze oceanicznej?

4. Gry oceaniczne

Pod koniec przykładu 1 rozważaliśmy wagi dość specyficznych zbiorów, składających się z pojedynczego gracza o wadze 40 proc. i jakiegoś podzbioru punktów odcin-

ka, któremu przypisywaliśmy odpowiednie wagi. Aby móc rozważać wagi takich „mieszanych” zbiorów, należy wprowadzić jakiś sposób „mierzenia” wielkości podzbioru (długości) odcinka.

Shapley i Milnor (1978) posłużyli się odcinkiem o jednostkowej długości $I = [0, 1)$, który ma reprezentować ocean tzw. małych graczy.

Niech $M = \{1, 2, \dots, m\}$ oznacza zbiór m tzw. dużych graczy o nieujemnych wagach, odpowiednio, w_1, w_2, \dots, w_m .

Podobnie jak przy formułowaniu twierdzenia granicznego wagę dowolnego podzbioru S dużych graczy oznaczmy jako $w(S) = \sum_{i \in S} w_i$.

Podzbiory małych graczy są reprezentowane przez mierzalne (w sensie Lebesgue’a) podzbiory zbioru I , które mają określone działania z podzbiarami zbioru M . Przez koalicję R w grze oceanicznej będziemy rozumieć sumę mnogościową pewnego zbioru dużych graczy (podzbioru M) oraz pewnego zbioru małych graczy (podzbioru mierzalnego zbioru I).

Wagę dowolnej koalicji R w grze oceanicznej będzie sumą wag dużych graczy wchodzących w skład koalicji R oraz odpowiedniej proporcji miary Lebesgue’a podzbioru oceanu I – małych graczy wchodzących w skład koalicji R :

$$u(R) = w(R \cap M) + \alpha \lambda(R \cap I),$$

gdzie:

λ – oznacza miarę Lebesgue’a,

$\alpha > 0$ oznacza całkowitą wagę oceanu I .

Ważoną grę większości $[c; u]$ z tak zdefiniowanymi wagami u oraz kwotą c wyznaczającą regułę decyzyjną nazywać będziemy **ważoną oceaniczną grą większości** i oznaczać jako:

$$[c; w_1, w_2, \dots, w_m; \alpha].$$

Mamy więc określoną grę oceaniczną – grę z udziałem m dużych graczy o niezerowych wagach i nieskończenie wielu małych graczy, z których każdy ma zerową wagę, zaś waga wszystkich razem tworzących ocean jest równa α ¹⁰.

Trudno rzecz jasna rozważać wszystkie uporządkowania czy też podzbiory nieskończenie wielu graczy. Ze względu na symetrię małych graczy należy rozważyć wszystkie losowe ustawienia punktów reprezentujących dużych graczy „wstawia-

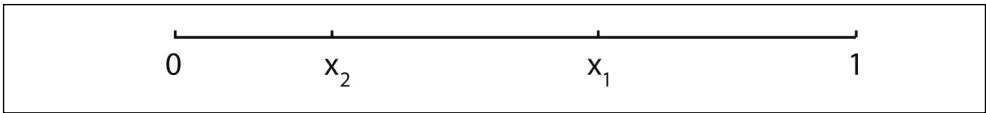
¹⁰ Warto w tym miejscu zauważyć, że dla takiej gry nie ma znaczenia, czy mówimy o „osiągnięciu”, czy też „przekroczeniu” kwoty. Pojedynczy tzw. mały gracz (z oceanu) jest reprezentowany na odcinku I przez punkt, który jest miary zero. Jeśli więc do koalicji, która osiągnęła kwotę, dołączymy jednego małego gracza, wówczas miara poszerzonego zbioru nie zmieni się.

nych” na jednostkowy odcinek reprezentujący ocean niezależnie i zgodnie z jednostajnym rozkładem na tym odcinku.

Teraz przyda nam się probabilistyczna definicja indeksu Shapleya-Shubika przedstawiona w pierwszym rozdziale.

Niech S_i oznacza zbiór dużych graczy poprzedzających i -tego dużego gracza, zaś punkty x_1, x_2, \dots, x_m na odcinku $\langle 0;1 \rangle$ reprezentują miejsca dołączenia się dużych graczy do oceanu małych graczy. Zbiór małych graczy poprzedzających i -tego gracza reprezentuje odpowiedni przedział odcinka $I: \langle 0; x_i \rangle$. Poniższy rysunek przedstawia jedno z możliwych „dołączeń” dwóch dużych graczy do oceanu.

Rysunek 2



W tym „ustawieniu” dużych graczy wagi dużych graczy poprzedzających każdego z nich są równe:

$$w(S_1) = w_2 \qquad w(S_2) = 0,$$

zaś łączne wagi wszystkich małych graczy poprzedzających każdego z nich odpowiednio:

$$\alpha\lambda(\langle 0; x_1 \rangle) \qquad \alpha\lambda(\langle 0; x_2 \rangle)$$

Zatem **indeks Shapleya-Shubika dużego gracza i w ważonej oceanicznej grze większości** będzie równy prawdopodobieństwu

$$\varphi_i = P[w(S_i) + \alpha\lambda(\langle 0; x_i \rangle) < c < w(S_i) + w_i + \alpha\lambda(\langle 0; x_i \rangle)],$$

zaś wartość indeksu siły Shapleya-Shubika całego oceanu:

$$\Phi = 1 - \sum_{i \in M} \varphi_i.$$

Wartość indeksu Shapleya-Shubika pojedynczego gracza z oceanu jest równa zero.

Pozostaje zasadnicze pytanie: jaki jest związek między wartością indeksu Shapleya-Shubika dla gier oceanicznych i graniczną wartością tego indeksu dla gier Γ_i ?

Shapley z Milnorem udowodnili, że jest to ta sama wartość:

Twierdzenie 2

Niech $(\Gamma_l)_{l=1}^\infty$ będzie ciągiem gier postaci:

$\Gamma_l = [c; w_1, \dots, w_m, a_{1,l}, \dots, a_{n,l}]$ – $m + n_l$ – osobowa gra, opisana na początku rozdziału 3, zaś $\varphi_{i,l}$ – wartość indeksu Shapleya-Shubika gracza i dla gry Γ_l .

Niech $[c; w_1, w_2, \dots, w_m; \alpha]$ będzie grą oceaniczną, zaś φ_i – wartością indeksu Shapleya-Shubika dowolnego dużego gracza i dla tej gry.

Wówczas

$$\varphi_i = \lim_{l \rightarrow \infty} \varphi_{i,l}.$$

Twierdzenie to uprawnia nas do traktowania wyników uzyskanych na mocy wzoru przedstawionego w twierdzeniu granicznym jako wartości indeksu siły Shapleya-Shubika dla gier oceanicznych.

Aby zilustrować powyższe twierdzenie, wyznaczmy wartości indeksu Shapleya-Shubika korzystając z twierdzenia granicznego oraz bezpośrednio odwołując się do modelu gier oceanicznych.

Przykład 2. Dwóch dużych graczy i ocean

Do naszego pojedynczego gracza o wadze 40 proc. dodajmy drugiego o wadze 20 proc. Rozważmy zatem grę oceaniczną:

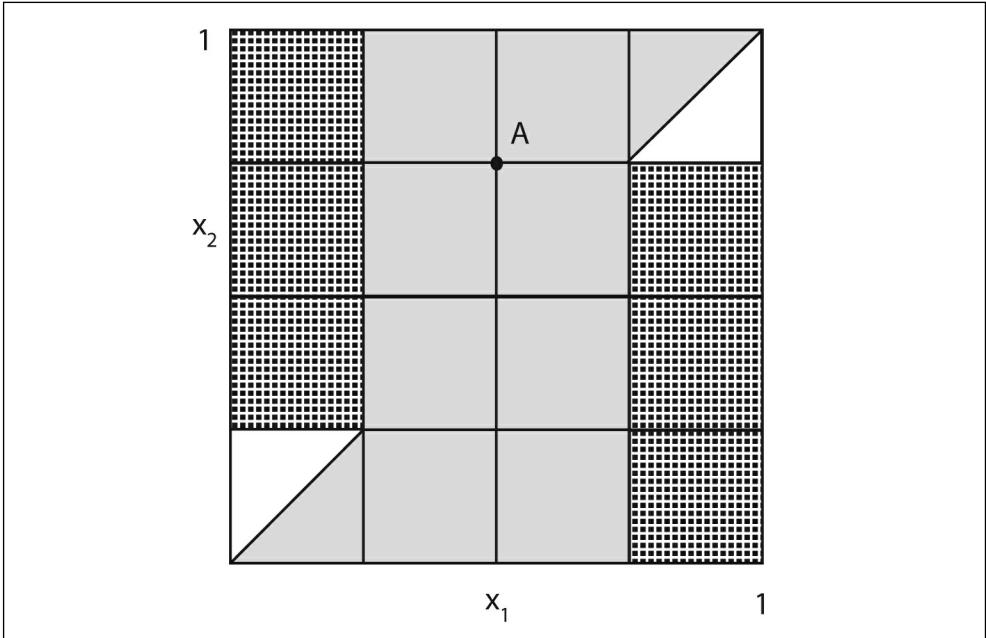
$$[50\%; 40\%, 20\%; 40\%].$$

Shapley i Milnor zaproponowali graficzny sposób poszukiwania rozwiązania gry oceanicznej z m dużymi graczami, reprezentując ją przez jednostkową kostkę I^m , zaś dużych graczy jako punkty umieszczone w tej kostce. Sytuację odpowiadającą naszemu przykładowi przedstawiam na poniższym rysunku.

Oś pozioma zawiera wszystkie możliwe punkty dołączenia się do oceanu gracza nr 1 (x_1), zaś oś pionowa – gracza nr 2 (x_2). Punkty kwadratu o jednostkowym boku (kostka I^2) oznaczają typy uporządkowań wszystkich graczy ze względu na miejsca włączenia się do oceanu graczy 1 i 2. Na przykład punkt A na rysunku 3 oznacza, że najpierw do oceanu dołączył gracz pierwszy i został poprzedzony połową oceanu, zaś po nim, mając „za sobą” 3/4 oceanu, dołączył się drugi gracz. W naszej grze oznacza to, że

- przed dołączeniem się gracza pierwszego koalicja posiadała 20 proc. wag (połowa oceanu),

Rysunek 3



- po dołączeniu gracza pierwszego koalicja przekroczyła kwotę – posiadała już 60 proc. wag,
- dołączenie drugiego gracza do koalicji wygrywającej – w jej skład wchodziło $3/4$ oceanu (30 proc. wag) i gracz pierwszy (40 proc. wag) – nie miało już żadnego znaczenia.

Dlatego punkt A oznacza typ uporządkowania, w którym decydującym graczem jest gracz pierwszy.

Poszczególne wielokąty, zaznaczone na rysunku, odpowiadają zdarzeniom, których prawdopodobieństwa mierzą wartości indeksu Shapleya-Shubika w ważonej grze oceanicznej¹¹. Wartości indeksu siły Shapleya-Shubika obu graczy i oceanu będą równe powierzchniom pól odpowiadającym typom uporządkowań, w których poszczególni gracze (w tym ocean) są graczami decydującymi. Pola te są rzecz jasna rozłączne – z wyjątkiem krawędzi ich styku – te jednak mają zerową powierzchnię¹². Na rysunku 3 zostały zaznaczone różnymi deseniami (czytelnikowi pozostawiam właściwą identyfikację pól z graczami i oceanem).

¹¹ Zob. probabilistyczna definicja indeksu Shapleya-Shubika w ważonej oceanicznej grze większości.

¹² Mówiąc precyzyjnie – są miary zero.

Oto szukane wartości (obliczenia powinno ułatwić podzielenie jednostkowego kwadratu na mniejsze fragmenty):

$$\varphi_1 = \frac{9}{16},$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{16},$$

$$\Phi = \frac{6}{16} \text{ (zresztą równe } 1 - \varphi_1 - \varphi_2\text{)}.$$

Do tego samego wyniku powinniśmy dojść, posługując się twierdzeniem granicznym. Przedstawię sposób obliczenia tylko dla gracza pierwszego, sprawdzenie poprawności całkowania i wykonanie pozostałych obliczeń, pozostawiając dociekliwym czytelnikom. Indeks Shapleya-Shubika gracza nr 1 wyraża się następującym wzorem:

$$\varphi_1 = \sum_{S \subseteq M_i} \frac{\langle (c-w(S)) / \alpha \rangle}{\langle (c-w(S \cup \{i})) / \alpha \rangle} \int t^s (1-t)^{m-s-1} dt.$$

Oto sposób wyznaczania granic całkowania dla gracza nr 1:

$M_1 = \{2\}$, zatem $S = \{2\}$ lub $S = \emptyset$

dla $S = \{2\}$:

$$\left\langle \frac{c-w(S)}{\alpha} \right\rangle = \left\langle \frac{0,5-0,2}{0,4} \right\rangle = \left\langle \frac{3}{4} \right\rangle = \frac{3}{4},$$

$$\left\langle \frac{c-w(S \cup \{1\})}{\alpha} \right\rangle = \left\langle \frac{0,5-0,6}{0,4} \right\rangle = \left\langle -\frac{1}{4} \right\rangle = 0,$$

dla $S = \emptyset$:

$$\left\langle \frac{c-w(S)}{\alpha} \right\rangle = \left\langle \frac{0,5}{0,4} \right\rangle = \left\langle 1 \frac{1}{4} \right\rangle = 1,$$

$$\left\langle \frac{c-w(S \cup \{1\})}{\alpha} \right\rangle = \left\langle \frac{0,5-0,4}{0,4} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{4} \right\rangle = \frac{1}{4}.$$

Zatem szukana wartość indeksu jest taka sama, jak uzyskana bezpośrednio, korzystając z metody graficznej:

$$\varphi_1 = \int_0^{\frac{3}{4}} t dt + \int_{\frac{1}{4}}^1 (1-t) dt = \frac{9}{16}.$$

W tym przypadku łatwiej było wyznaczyć szukane wartości, posługując się graficznym modelem gry oceanicznej. W ogólnym przypadku może to być jednakże bardzo kłopotliwe, a nawet niemożliwe do wykonania – wystarczy, że tzw. dużych graczy będzie więcej i przedstawienie pola w przestrzeni np. pięciowymiarowej okaże się bardziej złożonym zadaniem, niż policzenie kilku nieskomplikowanych całek.

Jak widać, siła oceanu okazała się mniejsza od siły gracza nr 1, mimo takiej samej wagi. Gdybyśmy rozpatrywali tylko z pozoru podobną grę z udziałem trzech graczy:

$$[50\%; 40\%, 20\%, 40\%],$$

wówczas okazałoby się, że siła każdego z nich jest identyczna i równa 1/3.

Shapley i Milnor przedstawili w swojej pracy wiele bardzo interesujących twierdzeń i obserwacji charakteryzujących własności indeksu Shapleya-Shubika w grach oceanicznych. Między innymi scharakteryzowali zmiany wartości tego indeksu w zależności od reguły decyzyjnej, określanej przez kwotę: od wartości zerowej do maksymalnej sensownie interpretowalnej wartości, równej sumie łącznej wagi dużych graczy i wagi oceanu: $w(M) + \alpha$. Udowodnili między innymi:

Twierdzenie 3

Niech Γ_c oznacza grę oceaniczną z ustalonymi wagami dużych graczy oraz daną wielkością oceanu określoną ze względu na kwotę c .

Średnia wartość indeksu Shapleya-Shubika danego gracza (lub oceanu) po wszystkich kwotach z przedziału $\langle 0; w(M) + \alpha \rangle$ jest równa udziałowi wagi gracza w sumie wag występujących w grze:

$$E(\varphi_i(\Gamma_c)) = \frac{w_i}{w(M) + \alpha},$$

$$E(\Phi(\Gamma_c)) = \frac{\alpha}{w(M) + \alpha}.$$

Twierdzenie to ma poważne konsekwencje. Przedstawię w skrócie jedną z nich.

Rozważmy przypadek skrajny. Jeśli $c = w(M) + \alpha$, wówczas mamy do czynienia z grą jedynomyślności, w której siła każdego z graczy – a w grze oceanicznej jest ich nieskończenie wielu – jest równa. Zatem siła każdego z nich, w tym również siła każdego z dużych graczy, jest zerowa¹³. Uwzględnienie dodatkowo ciągłości $\varphi_i(\Gamma_c)$ ze względu na c pozwala na następujące stwierdzenie: skoro średnia wartość siły danego gracza jest równa frakcji jego wagi w sumie wszystkich wag, to w każdej grze istnieją takie reguły decyzyjne, dla których siła gracza jest większa od udziału jego wagi w sumie wag. Przykład 2 był zresztą ilustracją takiej gry. Nie ma możliwości, by w tym skromnym artykule pozwolić sobie na szczegółową prezentację tego zagadnienia. Tę kwestię, jak również wiele innych bardzo ciekawych aspektów gier oceanicznych – w tym m.in. gry z kilkoma oceanami, która jest wariantem gry z jednym, ale niejednorodnym oceanem – analizowali Shapley z Milnorem w swojej pracy. Niewątpliwie warto poświęcić tym twierdzeniom i ich interpretacji osobną publikację.

5. Gry oceaniczne w naukach społecznych. Bandwagon effect.

Tylko pozornie zastosowanie w naukach społecznych modelu gier oceanicznych jest łatwe i bezproblemowe. Nie wystarczy bowiem rozszerzyć krąg zainteresowań na sytuacje z udziałem bardzo wielu uczestników procesu decyzyjnego. Oczekujemy bowiem, że w naszej zbiorowości decydenci nie tylko „nie mogą ogarnąć wzrokiem” ogółu – muszą w swoim postępowaniu kierować się konsekwentnie ustalonymi kryteriami – być racjonalnymi graczami – oraz muszą mieć wiedzę o możliwych konsekwencjach różnych działań. Są to założenia nieodłączne analizie zagadnień związanych z teorią gier. Dlatego podając przykłady miejsc, w których prezentowany model może mieć zastosowanie, wspominałem o wątpliwościach co do pełnej stosowalności modelu w niektórych z nich. Można się spodziewać, że akcjonariusze są osobami, które zajmują się obrotem akcjami, by maksymalizować zyski – wygrywać, zaś elektorzy uczestniczący w prawyborach intensywnie badają rzeczywistość, kierują się w znacznej mierze interesem politycznym – lepiej być przecież w koalicji ze zwycięzcą niż z przegranym. Można więc od członków tych zbiorowości oczekiwać racjonalności. Nie da się tego jednak tak łatwo powiedzieć na przykład o sytuacji głosującego w ogólnonarodowym referendum, w którym wyborca często nie śledzi aktualnego układu sił, nie ma sprecyzowanych interesów politycznych – model zakładający jego racjonalność może dawać słabe przewidywania zachowań. Te ograniczenia należy mieć na uwadze, rozważając prezentowane zastosowania.

¹³ Uważny czytelnik zauważył z pewnością, że wynika z tego, iż w tej sytuacji siła oceanu jest równa 1.

Poniżej przedstawię zastosowanie modelu gier oceanicznych do analizy uwarunkowań jednego z bardziej interesujących zjawisk zachodzących w sytuacji wyborów grupowych, znanego jako *bandwagon effect*, albo „przepływu do silniejszego”. Można postawić pytanie: czy istnieje jakaś granica, po której następuje owa ucieczka – na przykład przepływ wyborców niezdecydowanych do elektoratu najsilniejszego kandydata itp.? Kiedy zacznie się przepływ? W jakich warunkach niezdecydowani wyborcy nie przyłączą się do żadnego z konkurentów? Zagadnienie to podjął Straffin (1977, 1983), ilustrując danymi z prawyborów przed wyborami prezydenckimi w USA. Przedstawię tę propozycję, ilustrując aktualnymi danymi.

5.1. Bandwagon effect – zjawisko „wozu z orkiestrą”¹⁴

Aby zilustrować zjawisko znane w naukach politycznych pod tą nazwą rozważymy następujący przykład.

Przykład 3. Warunki przepływu do silniejszego w grze skończonej

Wyobraźmy sobie sytuację, gdy w jedenastoosobowym gronie o głosy szóstki niezdecydowanych wyborców zabiega dwóch rywali chcących zdobyć większość: pierwszy z nich zebrał już poparcie trzech osób, drugi – dwóch. Naszą sytuację można przedstawić jako ważoną grę większości:

$$G = [6; 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1].$$

Ze względu na rywalizację obu „dużych” graczy można przyjąć, że nie wejdą wspólnie do jednej koalicji. Sytuacja taka nazywana bywa stanem „kłótni” między tymi graczami. To jednak nie wszystkie ograniczenia. W istocie rozważaniom podlegać powinny wyłącznie te koalicje wygrywające, które zawierają dokładnie jednego (!) „dużego” gracza – a więc nie tylko wykluczamy możliwość wejścia obu „dużych” do jednej koalicji, ale również utworzenie koalicji wygrywającej przez samych „małych” – jest bowiem tylko dwóch kandydatów, na których można oddać głos. Uważny czytelnik z pewnością zauważył, że nie mówilibyśmy o drugim ograniczeniu, gdyby łączna waga dużych graczy była co najmniej równa kwocie¹⁵. Grę z „kłótnią wyłącznych konkurentów” określimy jako grę typu KWK.

Widać też, że przyłączenie się pojedynczego małego gracza nie sprawi, że znajdzie się on w koalicji wygrywającej. W jakich sytuacjach mały gracz może zdecydować się

¹⁴ Nazwa omawianego zjawiska pochodzi od idiomatycznego wyrażenia *climb on the bandwagon*. Wyrażenie to nawiązuje do starego amerykańskiego zwyczaju wspinania się wyborców chcących wyrazić poparcie dla polityka na platformę ozdobnego wozu, gdzie grała orkiestra reklamująca go.

¹⁵ Albo – co równoważne – łączna waga oceanu była mniejsza od kwoty.

przyłączyć do jednego z dużych? Można się spodziewać, że nie stanie się to w sytuacji, gdyby jego znaczenie miało okazać się mniejsze po fuzji – mały gracz „nie zaprzeda duszy” za darmo.

Można się więc spodziewać, że będzie kalkulował następująco: „przyłączę się do dużego gracza, tylko jeśli wzrost jego znaczenia, który nastąpi na skutek mojego przyłączenia się do niego, będzie większy niż moje znaczenie w sytuacji, gdy występuję niezależnie.”

Mały gracz powinien więc – poza grą przedstawioną powyżej – rozważyć następujące gry:

$$G_1 = [6; 3+1, 2, 1, 1, 1, 1, 1] \quad \text{oraz} \quad G_2 = [6; 3, 2+1, 1, 1, 1, 1, 1].$$

W pierwszej sprawdzi, na ile może wpłynąć na wzrost znaczenia gracza nr 1, w drugiej – na wzrost znaczenia gracza nr 2.

Aby wyznaczyć wartości indeksu Shapleya-Shubika dla danej gry KWK trzeba wykluczyć te uporządkowania, w których do gracza decydującego włącznie znajdują się „pokłóceni” gracze oraz te, dla których koalicja wygrywająca składa się z samych „małych”. Oto wektory indeksu Shapleya-Shubika graczy w poszczególnych grach przy założeniu stanu „kłótni i wyłączności” konkurencyjnych graczy nr1 i nr 2 (KWK)¹⁶.

$$\text{W grze } G: f(G) = \left[\frac{9}{38}, \frac{5}{38}, \frac{4}{38}, \frac{4}{38}, \frac{4}{38}, \frac{4}{38}, \frac{4}{38}, \frac{4}{38} \right].$$

$$\text{W grze } G_1: f(G_1) = \left[\frac{10}{29}, \frac{3}{29}, \frac{16}{145}, \frac{16}{145}, \frac{16}{145}, \frac{16}{145}, \frac{16}{145} \right]^{17}.$$

$$\text{W grze } G_2: f(G_2) = \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{25}, \frac{3}{25}, \frac{3}{25}, \frac{3}{25}, \frac{3}{25} \right].$$

Przyrost siły gracza nr 1 w wyniku fuzji z małym graczem (gra G_1) wynosi

$$f_1(G_1) - f_1(G) = \frac{119}{1102} > \frac{4}{38}.$$

Przyrost siły gracza nr 2 w wyniku fuzji z małym graczem (gra G_2) wynosi

$$f_2(G_2) - f_2(G) = \frac{13}{190} < \frac{3}{38}.$$

¹⁶ Aby podkreślić, że wartość indeksu siły Shapleya-Shubika zostanie wyznaczona dla gier o ograniczonych zbiorach dopuszczalnych koalicji (tu: gry typu KWK), zamiast oryginalnego „ φ ” posługiwać się będę „ f ”.

¹⁷ Warto zwrócić uwagę na paradoksalne konsekwencje wprowadzenia ograniczenia KWK w grze G_1 . Obserwujemy w niej naruszenie monotoniczności indeksu Shapleya-Shubika. Mimo większej wagi gracza nr 2 niż wagi małych graczy, zachodzi $f_2(G_1) < f_3(G_1)$. W grach bez ograniczeń zbioru dopuszczalnych koalicji indeks Shapleya-Shubika jest monotoniczny.

Mały gracz ma więc mocny argument za przejściem do większego z dużych graczy. Czytelnik może sam sprawdzić, że po przyłączeniu się pierwszego z małych graczy do gracza nr 1 kolejny mały gracz będzie miał jeszcze poważniejsze powody przyłączenia się do największego.

Czy jednak zawsze opłaca się mniejszym graczom przyłączać do większych? Doświadczenie uczy, że nie jest to zjawisko powszechne – inaczej wynik rywalizacji byłby przesądzony zawsze na samym początku – w momencie gdy wiadomo by było, kto ma większe poparcie. Czy istnieje jakaś granica, za którą uruchamia się ów owczy pęd – *bandwagon effect*? Czy wreszcie da się to zjawisko wyjaśnić za pomocą modelu gier kooperacyjnych?

Straffin (1983) zaproponował sposób wykorzystania modelu gier oceanicznych do przedstawienia tego zjawiska dla dużej liczby graczy. Jest to sytuacja w istocie najbardziej interesująca – ustalić, kiedy rozpocznie się proces masowej ucieczki do większego.

Rozważamy pewną ważoną oceaniczną grę większości z dwoma dużymi graczami o wagach x i y oraz oceanem o wadze $\alpha = 1 - x - y$:

$$[c; x, y; \alpha].$$

Zapiszmy warunek konieczny do rozpoczęcia przepływu graczy z oceanu do jednego z dużych graczy – bez naruszania ogólności rozważań przyjmijmy – do gracza x . Aby nastąpił odpływ pewnej „grupki” Δx małych graczy do gracza x , spowodowany tym przyrost siły¹⁸ x : $f_x(x + \Delta x, y) - f_x(x, y)$ musi być większy od siły „grupki” Δx występującej niezależnie w oceanie. Jak określić siłę takiej „kropki” oceanu? Ze względu na symetrię wszystkich małych graczy siła pewnej frakcji oceanu Δx będzie równa temu samemu udziałowi w całkowitej sile oceanu: $\frac{\Delta x}{\alpha} F$. Zatem możemy zapisać nasz warunek:

$$f_x(x + \Delta x, y) - f_x(x, y) > \frac{\Delta x}{\alpha} F,$$

który po przekształceniu możemy zapisać następująco:

$$\frac{f_x(x + \Delta x, y) - f_x(x, y)}{\Delta x} > \frac{F}{\alpha}.$$

Nas jednak interesuje sytuacja graniczna – uwarunkowania przepływu do gracza x bardzo małej części oceanu $\Delta x \rightarrow 0$. Nasz warunek możemy zatem zapisać jako nierówność z pochodną cząstkową po x :

$$\frac{\partial f_x}{\partial x} > \frac{F}{\alpha}.$$

¹⁸ Pamiętajmy, że jest to indeks siły Shapleya-Shubika przy „kłótni i wyłączości” x i y . Stąd nadal oznaczam go literą f .

Warunek konieczny przepływu do gracza y , ze względu na symetrię problemu, jest analogiczny:

$$\frac{\partial f_y}{\partial y} > \frac{F}{\alpha}$$

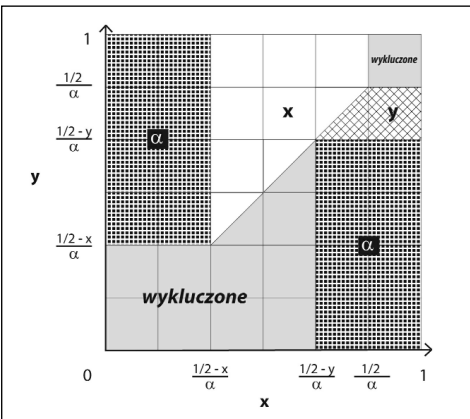
Warunki przedstawione powyżej są sformułowane w postaci ogólnej, dla dowolnej reguły decyzyjnej. Przykłady, którymi będę ilustrował zastosowania tego podejścia, odwołują się do sytuacji, w których decyzje podejmowane są według zasady większości bezwzględnej, a więc z kwotą $c = 1/2$. Podobnie jak w grze o skończonej liczbie graczy do wyznaczenia wartości indeksu Shapleya-Shubika wykorzystamy tylko te uporządkowania, które zakładają występowanie tylko jednego z „pokłóconych” graczy w jednej koalicji.

Podobnie, jak w przypadku gier skończonych, należy rozważyć osobno dwa przypadki:

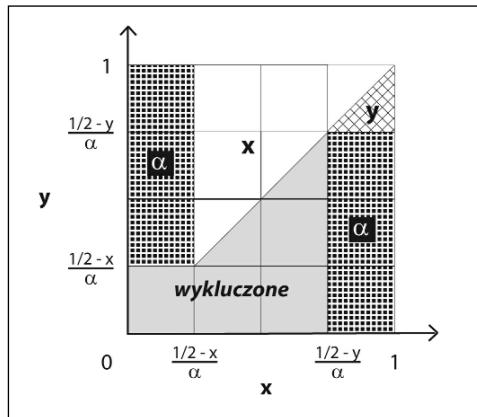
- (i) gdy łączna waga dużych graczy jest nie większa od kwoty – w naszym przykładzie $x + y \leq 1/2$,
- (ii) gdy łączna waga dużych graczy jest nie mniejsza od kwoty – w naszym przykładzie $x + y \geq 1/2$.

Przypadki należy odróżnić przede wszystkim ze względu na inne typy wykluczonych koalicji. W pierwszym bowiem, jak w przykładzie 3, nie mają racji bytu koalicje wygrywające bez udziału któregośkolwiek z graczy x , y oraz koalicje z udziałem obu. Natomiast w drugim przypadku ocean nie ma możliwości stworzyć koalicji wygrywającej – dlatego do wykluczenia pozostają wyłącznie koalicje wygrywające z udziałem obu dużych graczy. Poniższe rysunki przedstawiają przykładowe proporcje dla przypadku (i) oraz (ii). Na szaro (jednolity deseń) zaznaczyłem pola reprezentujące te typy uporządkowań (koalicje), które wykluczają przyjęcie założenia KWK.

Rysunek 4. Ilustracja przypadku (i) $x + y \leq 1/2$, np. dla gry [50%; 30%,10%;60%]



Rysunek 5. Ilustracja przypadku (ii) $x + y \geq 1/2$, np. dla gry [50%; 40%,20%;40%]



Porównując rysunek 5 z rysunkiem 3, widać na przykład, że dla przypadku (ii) siła graczy x i y będzie inna niż w sytuacji klasycznej. Z jednej strony pola reprezentujące uporządkowania, dla których x (analogicznie – y) jest graczem decydującym, zmniejszyło się o połowę – wyklucziliśmy „duży trójkąt” pod przekątną (oraz „mały trójkąt” nad przekątną). Zmniejszyło się jednak również łączne pole – wykluczaliśmy przecież część uporządkowań. Analogiczne rozważania można przeprowadzić dla przypadku (i) – rysunek 4.

Najprościej wyznaczyć wartości indeksu siły Shapleya-Shubika dla gry typu *KWK*, korzystając z zaproponowanej przez Shapleya metody graficznej. Oto wartości poszczególnych indeksów siły¹⁹:

(i) dla $x + y \leq 1/2$:

$$f_x = \frac{x(1-x-2y)}{1-x-y-x^2-y^2} \qquad F = \frac{(1-2x)(1-2y)}{1-x-y-x^2-y^2},$$

(ii) dla $x + y \geq 1/2$:

$$f_x = \frac{(\frac{1}{2}-y)^2}{(1-x-y)^2 + 2(\frac{1}{2}-x)(\frac{1}{2}-y)} \qquad F = \frac{(1-2x)(1-2y)}{(1-x-y)^2 + 2(\frac{1}{2}-x)(\frac{1}{2}-y)}.$$

Wyznaczenie wartości indeksu siły dla gracza y nie przedstawia teraz żadnych trudności – korzystając z symetrii problemu, należy zastąpić w odpowiednich wyrażeniach oznaczenie „ x ” przez „ y ” i odwrotnie.

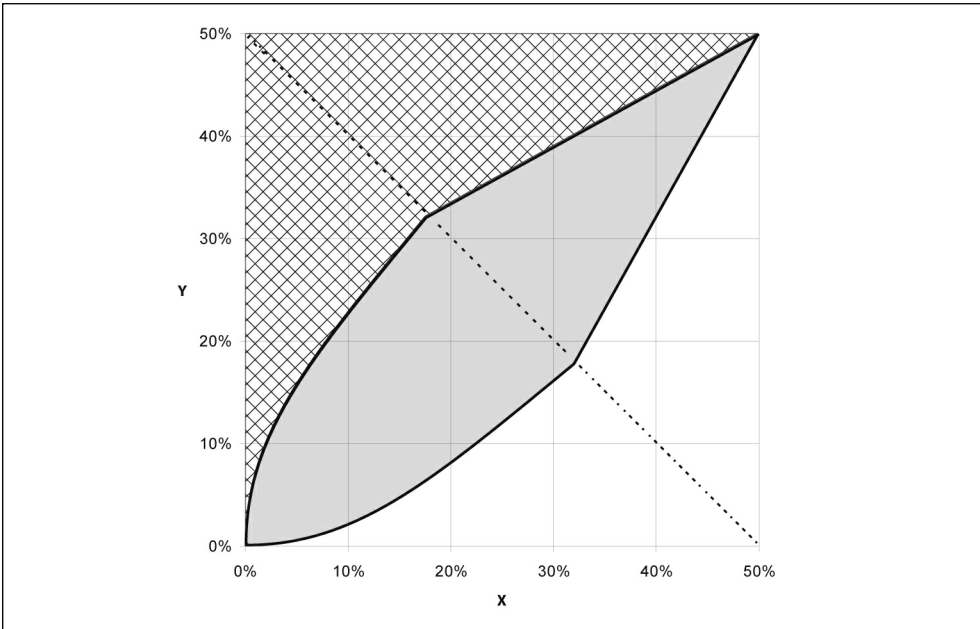
Wyznaczenie odpowiednich pochodnych cząstkowych i rozwiązanie nierówności dla przypadków (i) oraz (ii) prowadzi do wyznaczenia warunków dla wag graczy x i y , dla których spodziewamy się, że racjonalni mali gracze uznają, że warto się do jednego z „dużych” przyłączyć – rozpocznie się „przepływ” oceanu. Ilustracją tych warunków są odpowiednie obszary na poniższym rysunku.

Poszczególne osie rysunku 6 przedstawiają wagi (udziały) poszczególnych dużych graczy wyrażone w procentach. Poszczególne punkty układu współrzędnych reprezentują więc różne sytuacje, w zależności od wag graczy x i y . Figura zaznaczona na rysunku na szaro (jednolity deseń) ograniczona jest przez krzywą wyznaczoną na podstawie omówionych warunków, krzywą przepływu²⁰. Obszar ten reprezentuje te wagi dużych graczy, dla których nie jest spełniony warunek odpływu oceanu „w owczym pędzie za silniejszym”. Wzorkiem „w drobną kratkę” zazaczyłem obszar, w którym można się spodziewać odpływu do gracza y , zaś obszar bez zaznaczenia

¹⁹ Por. (Straffin, 1983: 285).

²⁰ Ang. *bandwagon curve*.

Rysunek 6. Obszary przepływu i obszar stabilności oceanu



przedstawia te sytuacje, w których spodziewać się powinniśmy zasilenia przez ocean gracza x . Uważniejsze przyjrzenie się krzywej przepływu skłania do interesujących i niebanalnych wniosków:

- przepływ jest możliwy również dla przypadku, gdy wagi dużych graczy stanowią niewielką część wszystkich wag,
- wymaga to jednak większej przewagi jednego nad drugim niż w przypadku, gdy suma wag dużych graczy przekroczy kwotę (tu: połowę wszystkich wag),
- dla $x + y \geq 1/2$ krzywa przepływu przyjmuje postać prostej. Oto łatwa do interpretacji postać warunku przepływu do gracza x :

$$\frac{\frac{1}{2} - y}{\frac{1}{2} - x} > \frac{3 + \sqrt{17}}{4} \approx 1.781^{21}.$$

Warunek ten oznacza, że gracz x może spodziewać się napływu nowych zwolenników, gdy do większości (osiągnięcia kwoty) brakuje mu prawie dwukrotnie mniej niż jego konkurentowi, graczowi y .

²¹ Przetworzoną relację można stosunkowo łatwo wyznaczyć analitycznie (por. Straffin, 1977, 1983). Krzywa przepływu dla $x + y \leq 1/2$ jest krzywą czwartego stopnia, na dodatek w postaci uwikłanej. Z tego względu nie podaję jej postaci analitycznej. Natomiast punkty tej krzywej dla $x + y \leq 1/2$ zostały wyznaczone metodami numerycznymi za pomocą programu przygotowanego przez dr. Marka Stycznia.

Obserwacje te potwierdzają postulat przedstawiony przy okazji przykładu 3 – aby uruchomić zjawisko doczepiania się przepływu do większego, potrzeba odpowiedniej, ustalonej przewagi.

5.2. Prawyborcy w USA

Straffin (1977, 1983) przedstawił zastosowanie zaprezentowanego modelu do interpretacji wyników prawyborów w Stanach Zjednoczonych. Zachęcony jego obserwacjami zarejestrowałem ostatni etap pasjonującego wyścigu po prezydencką nominację Partii Demokratycznej, który rozegrał się przed ostatnimi wyborami prezydenckimi w USA. O nominację ubiegała się doświadczona senator stanu Nowy Jork, Hillary Clinton, żona byłego prezydenta USA, i znacznie od niej młodszy, błyskotliwy, czarnoskóry senator stanu Illinois, Barack Obama. Faworytką w tym wyścigu od początku była Clinton. Zdecydowane zwycięstwo odniósł jednak 47-letni wówczas senator Obama. W ostatnim okresie prawyborów była pierwszą damą Ameryki zaczęli opuszczać nawet jej zdeklarowani zwolennicy.

Aby lepiej zrozumieć koleje losów obojga kandydatów, warto przyjrzeć się pokrótce praktyce prawyborów w USA. Wprawdzie o miejsce w Białym Domu mogą się ubiegać zarówno kandydaci niezależni, jak i wystawieni przez którąś z wiodących partii Stanów Zjednoczonych, jednakże, z wyjątkiem bezpartyjnego George'a Washingtona, nie zdarzyło się w historii tego kraju, by jego prezydentem został kandydat nie wystawiony przez jedną z dwóch głównych partii. Od przeszło 140 lat Stanami Zjednoczonymi kierują wyłącznie politycy rekrutujący się z Partii Republikańskiej lub Partii Demokratycznej. Okres przedwyborczy dzieli się na dwa etapy: prawyborcy, podczas których politycy ubiegają się o nominację swojej partii na kandydata w wyborach prezydenckich, i właściwą kampanię wyborczą, w której Partia Demokratyczna i Partia Republikańska wystawiają po jednym kandydacie.

Prawyborcy mają charakter wyborów pośrednich. Politycy zabiegają o poparcie delegatów partyjnych przypisanych poszczególnym stanom. Wielkość poparcia delegatów decyduje na konwencji wyborczej o tym, kogo partia wystawi w wyborach. Prawyborcy odbywają się we wszystkich stanach USA według dwóch rodzajów procedur różniących się stopniem otwartości na ogół mieszkańców stanu: wstępnych wyborów, zwanych *primaries* oraz zamkniętych zebrań działaczy partyjnych, tzw. *caucuses*. Procedury prawyborów stosowane przez obie partie nieco się różnią. Ze względu na charakter prezentowanych danych skupię się na zasadach przyjętych w Partii Demokratycznej. W prawyborach czynne prawo wyborcze mają przede wszystkim zarejestrowani członkowie danej partii, choć w niektórych *primaries* mogą uczestniczyć również osoby bezpartyjne. Wynik prawyborów w danym stanie ma wpływ na to ilu delegatów danego stanu poprze

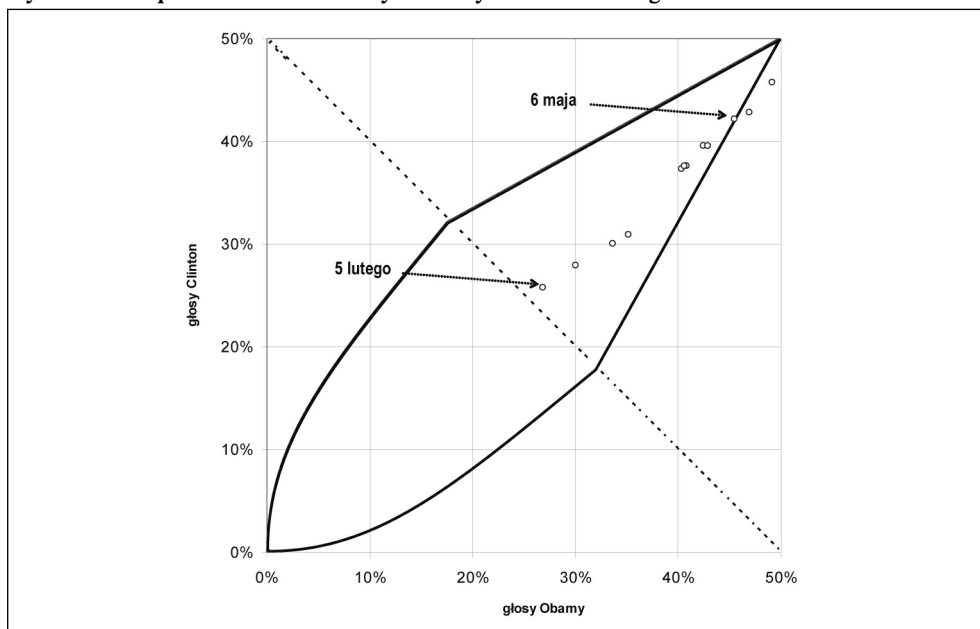
polityka. Część delegatów ma zasadniczo głosy zależne od poparcia uzyskanego przez polityka w prawyborach w danym stanie. Są to tzw. *przypisani delegaci*²². Demokraci przyjęli zasadę, że kandydaci otrzymują głosy tych delegatów proporcjonalnie do poparcia uzyskanego w prawyborach. Osobną kategorię stanowią członkowie partyjnego establishmentu danego stanu (kongresmani, gubernatorzy, byli prezydenci itp.), zwani *superdelegatami*²³. Ci mają głosy niezwiązane, zależne od własnych sympatii. Oni też są najbardziej podatni na „powiew koniunktury” i skłonni do kalkulacji.

W ostatnich prawyborach Partii Demokratycznej uczestniczyło 4234 delegatów, jednakże przez znaczną część ostatniego okresu prawyborczego, w związku z kontrowersjami co do ważności prawyborów w kilku stanach, liczba delegatów wynosiła 4048. Zatem większość potrzebna do uzyskania nominacji była równa 2025.

Poniższy rysunek przedstawia zebrane przeze mnie na bieżąco wyniki obojga kandydatów²⁴.

Kropki na rysunku przedstawiają procenty poparcia delegatów dla obojga polityków w ciągu ostatnich pięciu miesięcy prawyborów. Jak widać, w lutym szanse oboj-

Rysunek 7. Poparcie Baracka Obamy i Hillary Clinton od lutego do czerwca 2008 r.



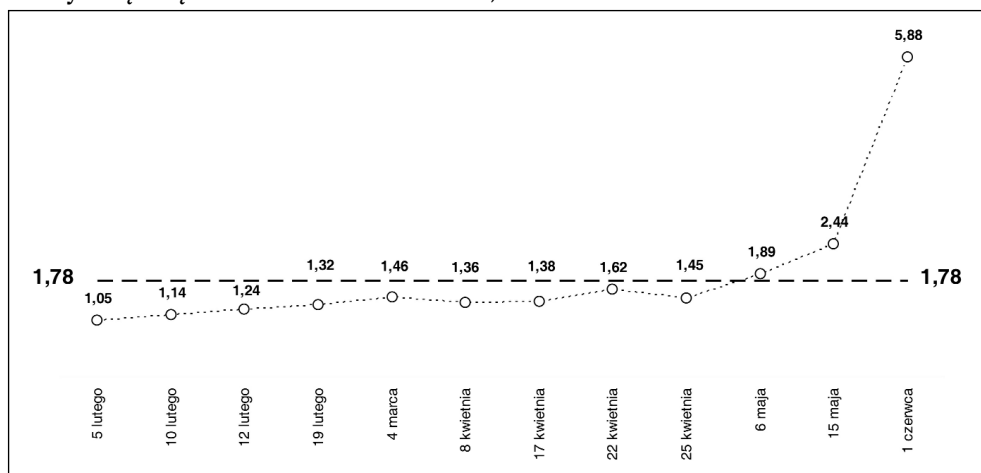
²² Ang. *pledged delegates*.

²³ Ang. *unpledged delegates*.

²⁴ Wyniki przedstawione na stronach CNN różnią się nieco od zebranych przeze mnie. Uwzględniają bowiem na przykład ostateczne decyzje superdelegatów, podczas gdy moje zestawienia pozwalają odtworzyć zmiany ich decyzji w trakcie prawyborów.

ga były wyrównane, choć w istocie Clinton miała już okres triumfu za sobą. Barack Obama systematycznie zwiększał swoją przewagę nad rywalką. Oboje zyskiwali zarówno głosy delegatów przypisanych, jak i głosy superdelegatów w proporcjach bliskich wynikom uzyskiwanym w głosowaniach. Sytuacja zmieniła się drastycznie w maju. Od tego czasu Obama nie tylko zyskiwał głosy delegatów w stanach, w których właśnie wygrywał głosowania. Zaczęli do niego przenosić swoje głosy niektórzy superdelegaci, którzy wcześniej popierali Clinton. Z przeszło 1926 liczba popierających ją delegatów spadła ostatecznie do 1896. Warto podkreślić w tym miejscu, że w trakcie akcji wyborczej niezwykle rzadko zdarza się, by delegat (a już w żadnym razie tzw. delegat przypisany) przeniósł swoje poparcie na innego kandydata, jeśli wcześniej już kogoś poparł. Wyjątek stanowią sytuacje po przekroczeniu odpowiedniej frakcji poparcia, dobrze przybliżonej przez zaprezentowany model. W tym przypadku mamy do czynienia właśnie z taką sytuacją. Warto podkreślić, że przedstawione zjawisko nastąpiło, mimo że Obama nie osiągnął jeszcze wówczas wymaganej kwoty. Jak widać na rysunku 7, przewaga Obamy nad Clinton nie była ogromna. Iloraz frakcji głosów brakujących Clinton do 50 proc. do frakcji brakującej do połowy Obamie, 6 maja osiągnął wartość 1,89, czyli większą niż wyznaczona w modelu wartość 1,78. Zmiany wartości tego ilorazu dla obojga kandydatów ilustruje poniższy rysunek.

Rysunek 8. Wartości ilorazów $(1/2 - y)/(1/2 - x)$ charakteryzujących przewagę poparcia Baracka Obamy (x) nad poparciem Hillary Clinton (y) w okresie od lutego do czerwca 2008 r. Przerywaną linią zaznaczona została wartość 1,78.



Jak widać, po tej dacie kolejne wartości ilorazu coraz szybciej „oddalają się” od 1,78. Do końca czerwca Obama przekroczył wymagane 50 proc. poparcia, zaś na sierpniowej konwencji wyborczej został oficjalnie nominowany przez Partię Demokratyczną do wyścigu prezydenckiego.

Wydaje się, że obserwacje powyższe staną się bardziej zrozumiałe, gdy zauważyć, że punkt reprezentujący pierwsze majowe notowania jest pierwszym punktem, który „przekracza” krzywą przepływu na rysunku 7, oznaczonym datą 6 maja 2008 r. Być może zaobserwowane masowe przyłączenie się do senatora z Illinois delegatów niezdecydowanych jest przykładem przedstawionego przeze mnie zjawiska przepływu do silniejszego – *bandwagon effect* – ucieczką racjonalnego oceanu do dużego gracza? Na uwagę zasługuje jednak fakt ucieczki do Obamy również niedawnych zwolenników jego rywalki. Tu, jak się okazuje²⁵, gry oceaniczne również mogą być przydatnym narzędziem do modelowania zjawisk decyzyjnych. Wybór optymalnego bloku (np. grona delegatów popierających któregoś z kandydatów ubiegających się o nominację) i uwarunkowania przepływów wyborców między blokami to bez wątpienia ciekawy temat osobnej publikacji poświęconej zastosowaniom tych interesujących koncepcji.

Bibliografia

Dane z prawyborów 2008 dostępne na stronach CNN:

<http://edition.cnn.com/ELECTION/2008/primaries/results/scorecard/>

Jasiński, Mikołaj. 2000. *Czy zawsze większy jest silniejszy, czyli jak zmierzyć siłę uczestników zgromadzeń decyzyjnych?* „Studia Socjologiczne” 1 (2): 49-77.

Jasiński, Mikołaj. 2003. *Stanowisko ideologiczne a znaczenie uczestnika zgromadzenia decyzyjnego.* „Studia Socjologiczne” 1: 139-174.

Jasiński, Mikołaj. 2004. *Nicea, Konstytucja, kompromis... – w znaczeniu procedur w zgromadzeniach decyzyjnych.* „Decyzje” 1: 81-118.

Malawski, Marcin. 2008. *Wartość Shapleya.* „Decyzje” 10: 27-58.

Mercik, Jacek W. 1999. *Siła i oczekiwania. Decyzje grupowe.* Warszawa – Wrocław: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Milnor, J.W., L.S. Shapley. 1978. *Values of Large Games II: Oceanic Games.* „Mathematics of Operations Research” 3 (4): 290-307.

Shapiro, N.Z., L.S. Shapley. 1978. *Values of Large Games I: A Limit Theorem.* „Mathematics of Operations Research” 3 (1): 1-9.

Shapley, Lloyd S. 1953. *A Value for n-Person Games.* W: *Contributions to the Theory of Games.* t. 2. Princeton: Princeton University Press, s. 69-79.

Sosnowska, Honorata. 1999. *Indeksy siły.* W: *Grupowe podejmowanie decyzji.* H. Sosnowska (red.) Warszawa: Wydawnictwo Naukowe „Scholar”, s. 103-122.

Straffin, Philip D. 1977. *The Bandwagon Curve.* „American Journal of Political Science” 21 (4): 695-709.

Straffin, Philip D. 1983. *Power Indices in Politics.* W: *Political and related models,* S.J. Brams, W. Lucas i P.D. Straffin (red.) New York: Springer Verlag, s. 256-321.

Straffin, Philip D. 2001. *Teoria Gier.* Warszawa: WN Scholar.

²⁵ Por. m.in. (Straffin, 1983).