O PEWNYCH MODELACH DECYZJI FINANSOWYCH

Krzysztof Jajuga
Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

Wprowadzenie – modele teorii finansów

Teoria finansów, zwana również ekonomią finansową, jest jednym z podstawowych działów nauk ekonomicznych. W ostatnich kilkudziesięciu latach można było obserwować znaczny rozwój tej teorii. W ostatnim okresie rozwój ten staje się coraz bardziej dynamiczny, między innymi z powodu wzrostu znaczenia aplikacyjnego metod wypracowanych na gruncie teorii. W tym artykule przedstawimy uwagi dotyczące pewnych modeli wypracowanych w teorii finansów. Modele te mogą być traktowane jako modele decyzyjne, gdyż w bezpośredni sposób odnoszą się do decyzji finansowych, przede wszystkim tych decyzji, które podejmowane są na rynku finansowym. Właściwe rozważania poprzedzimy pewnymi syntetycznymi uwagami dotyczącymi teorii finansów.

Krzysztof Jajuga, Wydział Zarządzania i Informatyki, Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu, ul. Komandorska 118/120, 53-345 Wrocław, krzysztof.jajuga@ae.wroc.pl

Współczesna teoria finansów charakteryzuje się następującymi cechami:

- wysoka precyzja i zaawansowanie tworzonych metod;
- duża zależność narzędzi teoretycznych od rozwoju technologii komputerowych;
- łatwa weryfikacja tworzonych metod na rynku finansowym;
- stymulowanie powstawiania nowych rozwiązań przez wyzwania praktyki.

Bardzo duża część osiągnięć teorii finansów ma u podstaw mniej lub bardziej zaawansowane narzędzia matematyczne. Naszym zdaniem, należy wyróżnić trzy podstawowe obszary teorii finansów, w których kluczową rolę odgrywają narzędzia matematyczne. Obszarami tymi są:

- analiza finansowych szeregów czasowych;
- wycena instrumentów finansowych;
- analiza ryzyka finansowego

Pierwszy obszar jest często nazywany ekonometrią finansową. Rozważane są tutaj jednowymiarowe lub wielowymiarowe finansowe szeregi czasowe, tzn. szeregi zawierające ceny akcji, wartości indeksów giełdowych, stopy procentowe, kursy walutowe. Częściej niż szeregi czasowe cen analizuje się szeregi czasowe stóp zwrotu oraz szeregi czasowe zmienności, przy czym zazwyczaj zmienność mierzona jest poprzez odchylenie standardowe stóp zwrotu. Są dwa główne cele realizowane przez modele ekonometrii finansowej:

- weryfikacja hipotez ekonomii finansowej na podstawie danych empirycznych;
- analiza danych empirycznych w celu identyfikacji pewnych prawidłowości, które mogłyby stanowić podstawę do podejmowania decyzji.

Należy stwierdzić, iż modele zaliczane do tej grupy w zasadzie nie są *stricte* modelami decyzyjnymi. Jednak można je nazwać modelami wspierającymi podejmowanie decyzji, gdyż:

- prognoza ceny wyznaczona na podstawie modelu ceny lub modelu stopy zwrotu dostarcza danych do podjęcia decyzji o zakupie lub sprzedaży instrumentu finansowego;
- oszacowanie miary zmienności na podstawie modelu umożliwia określenie poziomu ryzyka instrumentu finansowego, co ma istotne znaczenie przy podejmowaniu decyzji finansowych dotyczących transferu ryzyka;
- oszacowanie miary zmienności na podstawie modelu umożliwia wycenę instrumentu pochodnego (opcji) stosowanego w celach zabezpieczających.

Przegląd bardziej zaawansowanych modeli analizy finansowych szeregów czasowych znajduje się na przykład w pracach następujących autorów: Mills (1999), Tsay (2002), Chan (2002), Brooks (2002).

Drugi obszar zawiera modele wyceny instrumentów finansowych. Modele te umożliwiają określenie ceny instrumentu finansowego, po której to cenie powinny być zawierane transakcje przez posiadających informacje racjonalnych inwestorów na rynku znajdującym się w równowadze.

Wśród tych modeli wyróżnia się dwa podstawowe podejścia:

- wycena dochodowa (wywodząca się z koncepcji równowagi), w której wartość instrumentu finansowego jest określona jako dzisiejsza wartość (Present Value) przyszłych przepływów pieniężnych związanych z posiadaniem instrumentu finansowego; wycena dochodowa najczęściej stosowana jest poprzez metodę zdyskontowanych przepływów pieniężnych służącą do wyceny instrumentów dłużnych lub akcji;
- wycena arbitrażowa (wywodząca się z koncepcji arbitrażu), w której wartość instrumentu finansowego określona jest w taki sposób, iż nie jest możliwe dokonanie transakcji dającej dochód arbitrażowy (dodatni przychód bez ponoszenia ryzyka i nakładu początkowego); wycena arbitrażowa stosowana jest najczęściej w metodzie wyceny opcji (por. Black, Scholes 1973, Merton 1973).

Modele wyceny można traktować jako modele wspierające decyzje zakupu lub sprzedaży instrumentu finansowego. Oprócz tego można je traktować jako modele równowagi ukształtowanej w wyniku podejmowania decyzji przez uczestników rynku. Jest tak, gdyż uczestnicy rynku, dokonujący wyceny poprzez działania wynikające z podjętych decyzji, doprowadzają (według modeli wyceny) do równowagi na rynku danego instrumentu finansowego.

Trzeci obszar zawiera modele stosowane w analizie ryzyka finansowego. Modele te umożliwiają określenie ryzyka instrumentu finansowego bądź ryzyka instytucji. Są to przede wszystkim metody analizy dwóch rodzajów ryzyka. Są nimi:

- ryzyko rynkowe – ryzyko wynikające ze zmian cen na rynkach finansowych (zmian cen akcji, zmian stóp procentowych, zmian kursów walutowych);
- ryzyko kredytowe – ryzyko wynikające z możliwości niedotrzymania warunków przez drugą stronę kontraktu finansowego.

Modele stosowane w analizie ryzyka finansowego są to głównie:

- modele pomiaru ryzyka; nie są to *stricte* modele decyzyjne, ale modele wspierające decyzje dotyczące transferu ryzyka do innego podmiotu finansowego – opis najważniejszych typów modeli pomiaru ryzyka znajduje się w pracy: Crouhy, Galai, Mark (2001);
- modele podejmowania decyzji w warunkach ryzyka, są to typowe modele decyzyjne, w których zastosowanie ma konkretne kryterium podlegające optymalizacji, o tego typu modelach traktuje część poniższych rozważań.

Wynika z tego, że podstawowe modele decyzyjne, występujące w teorii finansów, są to modele podejmowania decyzji w warunkach ryzyka. Jak przy tym wiadomo z teorii podejmowania decyzji, wyróżnia się zasadniczo dwie grupy modeli podejmowania decyzji:

- modele normatywne, w których przedstawia się zasady, którymi POWINIEN SIĘ KIEROWAĆ racjonalny decydent, w tym wypadku podejmujący decyzje na rynku finansowym;
- modele opisowe, w których przedstawia się zasady, którymi w istocie KIERUJE SIĘ decydent, w tym wypadku podejmujący decyzje na rynku finansowym.

Modele normatywne są bardzo rozpowszechnione w teorii finansów. W modelach tych zakłada się, że podmiot podejmujący decyzję kieruje się zasadami racjonalności. Podstawowym narzędziem teoretycznym, wykorzystywanym w normatywnych modelach podejmowania decyzji, jest pojęcie rozkładu zmiennej losowej. Przy tym istnieją różne możliwości określenia zmiennej losowej, której rozkład jest analizowany. W szczególności analizowane mogą być następujące zmienne losowe:

- wartość końcowa inwestycji;
- zmiana wartości inwestycji w stosunku do wartości początkowej;
- odchylenie wartości końcowej inwestycji od wymaganej wartości końcowej inwestycji;
- stopa zwrotu inwestycji;
- względne odchylenie wartości końcowej inwestycji od wymaganej wartości końcowej inwestycji.

Wynika z tego, iż podejmowanie decyzji w zakresie wyboru inwestycji polega na porównaniu rozkładów spotykanych w inwestycjach, np. rozkładów stóp zwrotu inwestycji. Jedną z najbardziej ogólnych, proponowanych w teorii metod wyboru inwestycji, jest metoda stochastycznej dominacji. Metoda ta polega na porównywaniu dystrybuant rozkładów stóp zwrotu inwestycji. Często zamiast porównywania całych rozkładów stóp zwrotu inwestycji porównuje się jedynie parametry rozkładu. Najbardziej znane jest oczywiście podejście zaproponowane przez Markowitza (por. Markowitz 1952), w którym analizowane są:

- oczekiwana stopa zwrotu inwestycji, traktowana jako miara dochodu;
- odchylenie standardowe stopy zwrotu, traktowane jako miara ryzyka.

Jak wiadomo, analiza decyzji finansowych, podejmowanych w praktyce, wskazuje, iż mogą być one różne od decyzji wynikających z modeli normatywnych. Problemem tym zajmują się modele opisowe. Mimo to często przyjmuje się kryterium oczekiwanej użyteczności. W tym podejściu zamiast rozkładu stóp zwrotu inwestycji lub rozkładu wartości końcowej inwestycji analizuje się rozkład użyteczności i stwierdza się, że podmioty starają się maksymalizować oczekiwaną użyteczność, czyli wartość oczekiwaną rozkładu użyteczności.

W dalszej części artykułu pokażemy, jak w kategoriach oczekiwanej użyteczności można opisać podstawowe decyzje finansowe.

Podstawowe decyzje finansowe

Przedstawimy teraz podstawowe rodzaje decyzji finansowych. Proponowany podział tych decyzji z jednej strony odzwierciedla rzeczywiste sytuacje praktyczne, z drugiej strony pozwala na zastosowanie jednolitej koncepcji teoretycznej w prostym modelu decyzyjnym. Należy zauważyć, iż wszystkie omawiane rodzaje decyzji finansowych realizowane są za pomocą kontraktów finansowych między dwiema stronami, często przyjmujących postać instrumentów finansowych. Przy omawianiu decyzji odrębnie rozpatrzymy rynek pierwotny oraz (jeśli występuje) rynek wtórny. Rynek pierwotny to zawarcie kontraktu finansowego, co oznacza pierwszą transakcję kupna-sprzedaży instrumentu finansowego. Rynek wtórny to obrót instrumentem finansowym, czyli kolejne transakcje kupna-sprzedaży instrumentu finansowego.

Naszym zdaniem, ogół decyzji finansowych można podzielić na dwie grupy:

- decyzje w zakresie transferu kapitału;
- decyzje w zakresie transferu ryzyka.

Transfer kapitału jest to klasyczna transakcja finansowa, często dokonywana na rynku finansowym poprzez operację kupna lub sprzedaży instrumentu finansowego. W tej transakcji występują dwie strony (stosujemy tu standardową terminologię finansową):

- strona długa, udostępniająca kapitał;
- strona krótka, pozyskująca kapitał.

W tej transakcji strona długa podejmuje decyzję inwestowania, zaś strona krótka decyzję finansowania. Narzędziem transferu kapitału jest instrument finansowy, przy czym są dwie grupy instrumentów:

- dłużny instrument finansowy (obligacja, instrument rynku pieniężnego);
- właścicielski instrument finansowy (akcja, udział).

Transfer ryzyka jest to transakcja finansowa, dokonywana na rynku finansowym poprzez operację kupna-sprzedaży opcji (a więc szczególnego instrumentu finansowego), bądź na rynku ubezpieczeniowym poprzez operację kupna/sprzedaży polisy ubezpieczeniowej. W transakcji tej występują dwie strony:

- strona długa, przekazująca ryzyko;
- strona krótka, przejmująca ryzyko.

W transakcji transferu ryzyka strona długa podejmuje decyzję ubezpieczającą (w finansach nazywaną również zabezpieczającą), zaś strona krótka decyzję ubezpieczeniową. Narzędziem transferu ryzyka mogą być:

- opcja, podstawowy pochodny instrument finansowy;
- polisa ubezpieczeniowa.

Należy zwrócić uwagę na to, iż transakcja polegająca na transferze kapitału zawiera w istocie również transfer ryzyka, gdyż strona krótka (finansująca się) przekazuje ryzyko stronie długiej (inwestującej). W przypadku dłużnych instrumentów finansowych jest to ryzyko niedotrzymania warunków (ryzyko kredytowe), choć może do tego dojść również ryzyko stopy procentowej (ryzyko rynkowe). W przypadku właścicielskich instrumentów finansowych jest to ryzyko cen akcji (ryzyko rynkowe). Wynika z tego, iż transakcja transferu kapitału obejmuje dwie części:

- transfer kapitału wolnego od ryzyka;
- transfer ryzyka.

W takiej sytuacji stopa procentowa, odzwierciedlająca cenę kapitału, składa się z dwóch części: stopy wolnej od ryzyka i premii za ryzyko.

Obecnie przedstawimy charakterystykę obu rodzajów decyzji podejmowanych na rynku pierwotnym i rynku wtórnym.

Transfer kapitału – rynek pierwotny

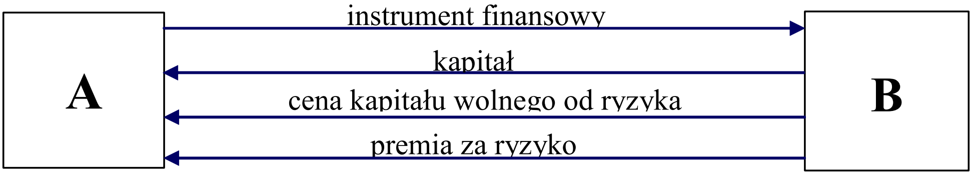
Transakcje transferu kapitału na rynku pierwotnym polegają na zakupie przez stronę inwestującą instrumentów finansowych (dłużnych lub właścicielskich) wyemitowanych przez stronę finansującą się. Ilustracja transakcji przedstawiona jest na rysunku 1.

Rysunek 1

Transfer kapitału na rynku pierwotnym

1A. W momencie emisji instrumentu finansowego

1B. W momencie wykupu (dotyczy instrumentów dłużnych)



Jak widać, w momencie zawarcia transakcji strona A przekazuje kapitał stronie B kupując instrument finansowy, zaś dodatkowo strona B przekazuje stronie A ryzyko (rysunek 1A). Z kolei w momencie wykupu (rysunek 1B) następuje wykup instrumentu finansowego, zaś strona B płaci cenę kapitału wolnego od ryzyka oraz premię za ryzyko. Należy tu dodać dwa istotne fakty:

- rysunek 1B dotyczy jedynie dłużnych instrumentów finansowych; jeśli chodzi o właścicielskie instrumenty finansowe, to nie istnieje moment wykupu, a dla strony inwestującej zakończenie inwestycji może nastąpić jedynie na rynku wtórnym (o czym dalej);
- formalnie cena kapitału wolnego od ryzyka i premia za ryzyko mogą być płacone w postaci wielu przepływów pieniężnych w różnych terminach przed terminem wykupu – dotyczy to instrumentów dłużnych płacących odsetki.

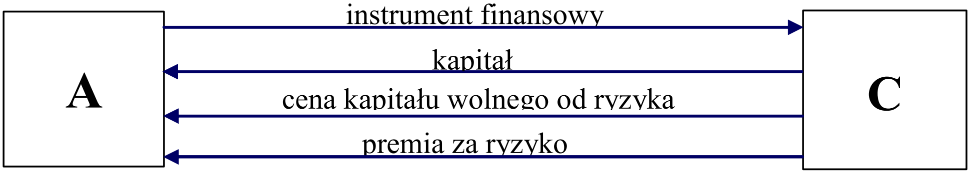
Transfer kapitału – rynek wtórny

Transakcje transferu kapitału na rynku wtórnym polegają na kupnie-sprzedaży instrumentów finansowych, przy czym w przypadku instrumentów dłużnych transakcje te mają miejsce tylko w okresie przed terminem wykupu. Dla strony sprzedającej oznacza to zakończenie inwestycji, zaś dla strony kupującej oznacza to rozpoczęcie inwestycji. W ten sposób strona kupująca staje się stroną długą na rynku pierwotnym – dotyczy to jedynie dłużnych instrumentów finansowych. Ilustracja transakcji przedstawiona jest na rysunku 2.

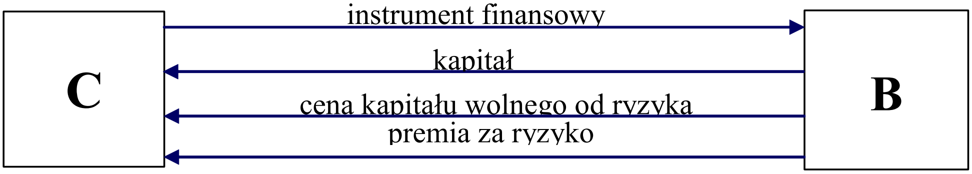
Rysunek 2

Transfer kapitału na rynku wtórnym

2A. W momencie transakcji



2B. W momencie wykupu (dotyczy instrumentów dłużnych)



Jak widać, w momencie zawarcia transakcji strona A przekazuje instrument finansowy stronie C, zaś strona C płaci cenę kapitału wolnego od ryzyka oraz premię za ryzyko (rysunek 2A). Z kolei w momencie wykupu (rysunek 2B) następuje wykup instrumentu finansowego, zaś strona B płaci cenę kapitału wolnego od ryzyka oraz premię za ryzyko stronie C (która zastąpiła w kontrakcie finansowym stronę A).

Przykład

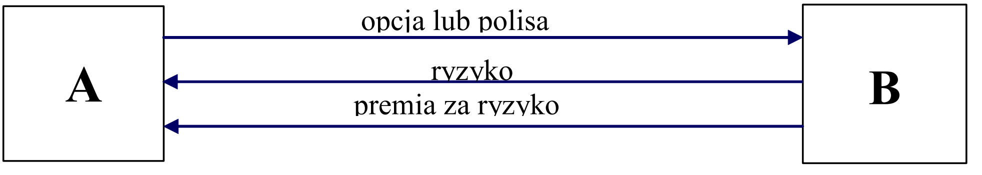
Klasycznym przykładem transferu kapitału są transakcje na rynku obligacji. Na rynku pierwotnym strona krótka emituje obligację, zaś strona długa ją kupuje. W ten sposób strona krótka przekazuje ryzyko stronie długiej, zaś strona długa przekazuje kapitał stronie krótkiej. W terminie wykupu obligacji następuje transakcja odwrotna. Z kolei na rynku wtórnym posiadacz obligacji sprzedaje ją innemu podmiotowi, który w ten sposób staje się stroną długą w stosunku do emitenta obligacji.

Transfer ryzyka – rynek pierwotny

Transakcje transferu ryzyka na rynku pierwotnym polegają na sprzedaży polisy ubezpieczeniowej bądź na wystawieniu (co jest równoważne ze sprzedażą) opcji. Ilustracja transakcji przedstawiona jest na rysunku 3.

Rysunek 3

Transfer ryzyka na rynku pierwotnym



Jak widać, w momencie zawarcia kontraktu strona A, będąca ubezpieczycielem, sprzedaje instrument finansowy (opcję) bądź polisę ubezpieczeniową stronie B, będącej ubezpieczającym. W zamian za to przejmuje od strony B ryzyko i otrzymuje premię za ryzyko. W takiej sytuacji strona B otrzymuje prawo, zaś strona A podejmuje zobowiązanie. Zauważmy, że transferowane ryzyko może tu mieć bardzo różny charakter, w przypadku opcji jest to z reguły ryzyko rynkowe.

Transfer ryzyka – rynek wtórny

Transakcje transferu ryzyka na rynku wtórnym dotyczą jedynie opcji, gdyż w przypadku polisy ubezpieczeniowej rynek wtórny nie występuje. Transakcje te, to po prostu kupno-sprzedaż opcji. Ilustracja transakcji przedstawiona jest na rysunku 4.

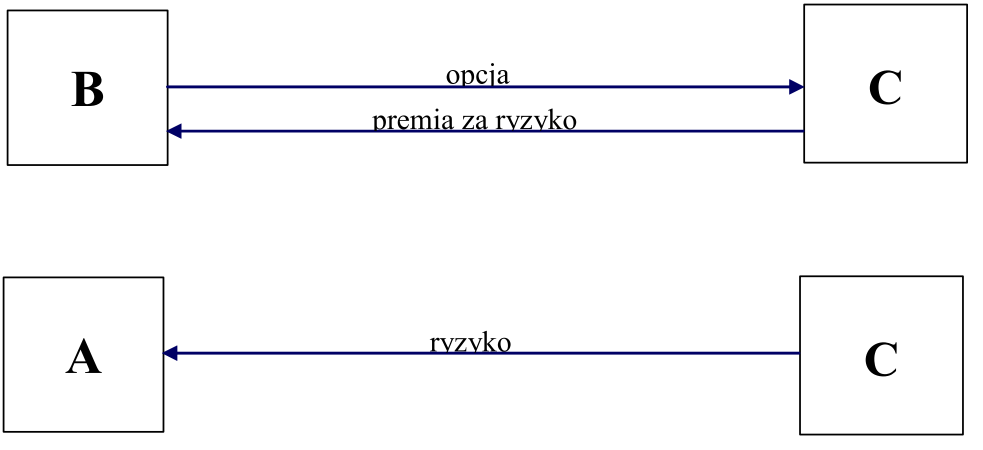
Jak widać, strona B sprzedaje instrument finansowy stronie C, otrzymując w zamian premię za ryzyko. W ten sposób strona C staje się ubezpieczającym, otrzymując prawo. Oczywiście stroną, która podjęła zobowiązanie, jest w dalszym ciągu strona A.

Przykład

Klasycznym przykładem transferu ryzyka są transakcje na rynku opcji. Na rynku pierwotnym strona krótka wystawia opcję, zaś strona długa ją kupuje. W ten sposób strona krótka przejmuje ryzyko od strony długiej. Z kolei na rynku wtórnym posiadacz opcji sprzedaje ją innemu podmiotowi, który w ten sposób staje się stroną długą w stosunku do wystawiającego opcję.

Rysunek 4

Transfer ryzyka na rynku wtórnym



Na zakończenie warto wspomnieć, iż może również występować dwustronny transfer ryzyka, czyli wymiana ryzyka. Tego typu transakcja polega na tym, iż jedna strona przekazuje drugiej stronie jeden rodzaj ryzyka, zaś w zamian przejmuje od niej inny rodzaj ryzyka. Mamy z taką transakcją do czynienia w kontraktach terminowych (*futures, forward*) i kontraktach typu *swap*. Na przykład w walutowym kontrakcie terminowym jedna strona przekazuje drugiej ryzyko wzrostu kursu walutowego, przejmując od tej strony ryzyko spadku kursu walutowego. W dalszym ciągu nie będziemy się zajmować tego typu transakcjami, gdyż można je analizować jako kombinację dwóch kontraktów transferu ryzyka.

Jak wynika z powyższych rozważań, w zasadzie prawie wszystkie transakcje finansowe są transakcjami zawierającymi transfer ryzyka. Oznacza to, iż decyzje finansowe są decyzjami dotyczącymi ryzyka. Dotyczy to zarówno klasycznych decyzji w zakresie transferu ryzyka (decyzja ubezpieczająca lub decyzja ubezpieczeniowa), jak i decyzji w zakresie transferu kapitału (decyzja inwestowania lub decyzja finansowania). W następnym punkcie przedstawimy formalną koncepcję analizy tych decyzji w kategoriach funkcji użyteczności.

Decyzje finansowe a teoria użyteczności

Przedstawione powyżej podstawowe decyzje finansowe mogą być analizowane w kategoriach funkcji użyteczności. Jak już wskazywaliśmy, teoria użyteczności jest często stosowaną koncepcją teorii podejmowania decyzji. Przedstawimy teraz sposób analizowania omówionych decyzji finansowych w kontekście oczekiwanej użyteczności.

Rozpatrywać będziemy dwa rodzaje decyzji, które umownie nazywamy inwestycją i ubezpieczeniem. W inwestycji występują dwie strony: kupujący inwestycję (inwestujący) i sprzedający inwestycję (na rynku pierwotnym jest to strona finansująca się). W ubezpieczeniu zaś stronami są: ubezpieczający (kupujący opcję lub polisę ubezpieczeniową) i ubezpieczyciel (wystawiający opcję lub sprzedający polisę ubezpieczeniową).

W naszych rozważaniach ryzyko formalnie opisywane będzie, tak jak to zwykle czyni się, za pomocą zmiennej losowej, której wartość oczekiwana jest skończona (dodatnia lub ujemna). Czasem tę zmienną losową przedstawia się za pomocą loterii, mówiąc, że kupno lub sprzedaż ryzyka jest to kupno lub sprzedaż loterii. Przedstawimy teraz pewne podstawowe pojęcia związane z transferem ryzyka.

Przy tym w poniższych rozważaniach wprowadzone są następujące oznaczenia:

U – funkcja użyteczności, przyporządkowująca wartości kapitału wartość użyteczności danego podmiotu;

w_0 – wielkość kapitału w wypadku niepodejmowania ryzyka;

X – zmienna losowa, odzwierciedlająca podejmowanie ryzyka, czyli loterię.

Pierwszym pojęciem jest **równoważnik pewności** (*certainty equivalent*). Definiuje się go za pomocą następującej zależności:

$$U(w^*) = E(U(w_0 + X)) \qquad (1)$$

Przy tym:

w^* – równoważnik pewności.

Ze wzoru (1) wynika, że równoważnik pewności jest to taka wartość kapitału osiągnięta bez ponoszenia ryzyka, której użyteczność jest taka sama, jak oczekiwana użyteczność wartości kapitału w sytuacji ponoszenia ryzyka, tzn. posiadania loterii.

Równoważnik pewności można wyrazić w sposób bezpośredni następującym wzorem:

$$w^* = U^{-1}(E(U(w_0 + X))) \qquad (2)$$

Następnym rozpatrywanym pojęciem jest tzw. **cena sprzedaży loterii** (*asking price*), dana następującym wzorem:

$$U_a(w_{0a} + p_a) = E(U_a(w_{0a} + X)) \qquad (3)$$

Lub w sposób bezpośredni:

$$p_a = w^* - w_{0a} \qquad (4)$$

Gdzie:

U_a – funkcja użyteczności sprzedającego loterię;

– w_{0a} wielkość kapitału sprzedającego loterię;

p_a – cena sprzedaży loterii.

Cena sprzedaży loterii jest to minimalna cena, po jakiej podmiot posiadający tę loterię jest ją skłonny sprzedać. Warto rozpatrzyć dwie szczegółowe interpretacje tego pojęcia.

Cena sprzedaży loterii w inwestycji. Wartość oczekiwana loterii jest tutaj dodatnia, a zatem loteria przynosi dochód (oczekiwany). Cena sprzedaży loterii jest to liczba dodatnia. Jest to minimalna cena, po jakiej sprzedający inwestycję (inaczej: sprzedający loterię) jest ją skłonny sprzedać kupującemu inwestycję (inaczej: kupującemu loterię).

Cena sprzedaży loterii w ubezpieczeniu. Wartość oczekiwana loterii jest tutaj ujemna, a zatem loteria przynosi stratę (oczekiwaną). Cena sprzedaży loterii jest to liczba ujemna. Formalnie jest to minimalna cena, po jakiej sprzedający loterię (ubezpieczający się) jest ją skłonny sprzedać kupującemu loterię (ubezpieczycielowi). Z uwagi na to, że jest to liczba ujemna, sensowna jest następująca interpretacja w odniesieniu do wartości bezwzględnej tej liczby: jest to maksymalna cena, jaką ubezpieczający się (inaczej: sprzedający loterię) jest skłonny zapłacić ubezpieczycielowi (inaczej: kupującemu loterię) za pozbycie się loterii.

Jeśli założymy, że funkcja użyteczności jest wklęsła (co odpowiada awersji do ryzyka), wówczas zachodzi (z nierówności Jensena):

$$E(U_a(w_{0a}+X)) \leq U_a(E(w_{0a}+X)) = U_a(w_{0a}+E(X))$$

Z tego wynika, że:

$$U_a(w_{0a}+p_a) \leq U_a(w_{0a}+E(X))$$

Ponieważ zazwyczaj zakłada się, że funkcja użyteczności jest rosnąca, otrzymujemy:

$$w_{0a}+p_a \leq w_{0a}+E(X)$$

Z czego wynika, że:

$$p_a \leq E(X) \qquad (5)$$

Przykład

Rozpatrzymy logarytmiczną funkcję użyteczności, daną następującym wzorem:

$$U(w) = \ln w$$

Pod uwagę weźmiemy dwie loterie, odzwierciedlające inwestycję i ubezpieczenie.

Loteria w inwestycji

Podmiot dysponuje kapitałem w wysokości 100. Ryzyko (loteria) odzwierciedlane jest przez zmienną losową, która może przyjąć dwie wartości, –20 i 80, obie z prawdopodobieństwem 0,5. Wynika z tego, że wartość końcowa kapitału może przyjąć dwie wartości: 80 i 180, obie z prawdopodobieństwem 0,5. Po podstawieniu do wzoru (1) otrzymujemy:

$$\ln w^* = 0{,}5\ln(80) + 0{,}5\ln(180) = 4{,}787$$

$$w^* = 120$$

Wartość oczekiwana loterii wynosi 30. Równoważnik pewności wynosi 120. Po podstawieniu do wzoru (4) otrzymujemy:

$$p_a = 120 - 100 = 20$$

Wynika z tego, że minimalna cena, po jakiej sprzedający inwestycję jest skłonny sprzedać kupującemu inwestycję wynosi 20. Jest to mniej niż oczekiwana wartość loterii wynosząca 30.

Loteria w ubezpieczeniu

Podmiot dysponuje kapitałem w wysokości 100. Ryzyko (loteria) odzwierciedlane jest przez zmienną losową, która może przyjąć dwie wartości, –40 i 0, obie z prawdopodobieństwem 0,5. Wynika z tego, że wartość końcowa kapitału może przyjąć dwie wartości: 60 i 100, obie z prawdopodobieństwem 0,5. Po podstawieniu do wzoru (4) otrzymujemy:

$$\ln w^* = 0{,}5\ln(60) + 0{,}5\ln(100) = 4{,}350$$

$$w^* = 77{,}46$$

Wartość oczekiwana loterii wynosi –20. Równoważnik pewności wynosi 77,46. Po podstawieniu do wzoru (4) otrzymujemy:

$$p_a = 77{,}46 - 100 = -22{,}54$$

Wynika z tego, że maksymalna cena, po jakiej ubezpieczający jest skłonny pozbyć się ryzyka, wynosi 22,54. Widać, że –22,54 jest to mniej niż oczekiwana wartość loterii wynosząca –20.

Następnym rozpatrywanym pojęciem jest tzw. **cena kupna loterii** (*bid price*), dana następującym wzorem:

$$U_b(w_{0b}) = E(U_b(w_{0b} + X - p_b)) \qquad (6)$$

Gdzie:

U_b – funkcja użyteczności kupującego loterię;

w_{0b} – wielkość kapitału kupującego loterię;

p_b – cena kupna loterii.

Cena kupna loterii jest to maksymalna cena, po jakiej podmiot chcący posiadać loterię jest ją skłonny kupić. Warto tu rozpatrzyć dwie szczegółowe interpretacje tego pojęcia.

Cena kupna loterii w inwestycji. Wartość oczekiwana loterii jest tutaj dodatnia, a zatem loteria przynosi dochód (oczekiwany). Cena kupna loterii jest to liczba dodatnia. Jest to maksymalna cena, po jakiej kupujący inwestycję (inaczej: kupujący loterię) jest ją skłonny kupić od sprzedającego inwestycję (inaczej: sprzedającego loterię).

Cena kupna loterii w ubezpieczeniu. Wartość oczekiwana loterii jest tutaj ujemna, a zatem loteria przynosi stratę (oczekiwaną). Cena kupna loterii jest to liczba ujemna. Formalnie jest to maksymalna cena, po jakiej kupujący loterię (ubezpieczyciel) jest ją skłonny kupić od sprzedającego loterię (ubezpieczającego się). Z uwagi na to, że jest to liczba ujemna, sensowna jest następująca interpretacja w odniesieniu do wartości bezwzględnej tej liczby: jest to minimalna cena, jaką ubezpieczyciel (inaczej: kupujący loterię) jest skłonny zaakceptować od ubezpieczającego się (inaczej: sprzedającego loterię) za przyjęcie loterii.

Jeśli założymy, że funkcja użyteczności jest wklęsła (co odpowiada awersji do ryzyka), wówczas zachodzi (z nierówności Jensena):

$$E(U_b(w_{0b} + X - p_b)) \le U_b(E(w_{0b} + X - p_b)) = U_b(w_{0b} - p_b + E(X))$$

Z tego wynika, że:

$$U_b(w_{0b}) \le U_b(w_{0b} - p_b + E(X))$$

Ponieważ zazwyczaj zakłada się, że funkcja użyteczności jest rosnąca, otrzymujemy:

$$w_{0b} \le w_{0b} - p_b + E(X)$$

Z czego wynika, że:

$$p_b \le E(X) \qquad (7)$$

Przykład

Rozpatrzymy (podobnie jak w poprzednim przykładzie) logarytmiczną funkcję użyteczności. Pod uwagę weźmiemy dwie loterie, te same co w poprzednim przykładzie, odzwierciedlające inwestycję i ubezpieczenie.

Loteria w inwestycji

Podmiot dysponuje kapitałem w wysokości 100. Wartość oczekiwana loterii wynosi 30. Po podstawieniu do wzoru (6) otrzymujemy:

$$\ln(100) = 0{,}5\ln(80 - p_b) + 0{,}5\ln(180 - p_b)$$

Rozwiązując powyższe równanie otrzymujemy:

$$p_b = 18{,}19$$

Wynika z tego, że maksymalna cena, jaką kupujący inwestycję jest skłonny zapłacić za inwestycję, wynosi 18,19. Jest to mniej niż oczekiwana wartość loterii wynosząca 30.

Loteria w ubezpieczeniu

Podmiot dysponuje kapitałem w wysokości 100. Wartość oczekiwana loterii wynosi –20. Po podstawieniu do wzoru (6) otrzymujemy:

$$\ln(100) = 0{,}5\ln(100 - p_b) + 0{,}5\ln(60 - p_b)$$

Rozwiązując powyższe równanie otrzymujemy:

$$p_b = -21{,}98$$

Wynika z tego, że minimalna cena, po jakiej ubezpieczyciel jest skłonny przejąć ryzyko, wynosi 21,98. Widać, że –21,98 jest to mniej niż oczekiwana wartość loterii wynosząca –20.

Nierówności dane wzorami (5) i (7) wskazują, że cena sprzedaży loterii i cena kupna loterii są nie większe niż wartość oczekiwana loterii. Warto się jeszcze zastanowić, czy istnieje zależność między ceną kupna loterii i ceną sprzedaży loterii.

Loteria w inwestycji

Cena sprzedaży loterii w inwestycji jest to minimalna cena, po jakiej sprzedający przedmiot inwestycji jest go skłonny sprzedać kupującemu inwestycję. Cena kupna loterii w inwestycji jest to maksymalna cena, po jakiej kupujący przedmiot inwestycji jest go skłonny kupić od sprzedającego inwestycję. Sensowne jest przyjęcie założenia, że cena sprzedaży loterii w inwestycji nie przekracza ceny kupna loterii w inwestycji (w przeciwnym przypadku nie doszłoby do transakcji).

Loteria w ubezpieczeniu

Cena sprzedaży loterii w ubezpieczeniu jest to maksymalna cena, jaką ubezpieczający się jest skłonny zapłacić ubezpieczycielowi za ubezpieczenie. Cena kupna loterii w ubezpieczeniu jest to minimalna cena, jaką ubezpieczyciel jest skłonny zaakceptować od ubezpieczającego za przyjęcie ryzyka. Sensowne jest przyjęcie założenia, że cena sprzedaży loterii w ubezpieczeniu nie przekracza ceny kupna loterii w ubezpieczeniu (w przeciwnym przypadku nie doszłoby do transakcji).

Biorąc pod uwagę te wnioski oraz zależności (5) i (7) otrzymujemy:

$$p_a \le p_b \le E(X) \qquad (8)$$

Trzeba jednak zauważyć, że w zależności (8) cena kupna loterii i cena sprzedaży loterii wyznaczane są (zazwyczaj) na podstawie różnych funkcji użyteczności.

Bibliografia

Black F., Scholes M. 1973. *The pricing of options and corporate liabilities*, „Journal of Political Economy", 81, 637-654.

Brooks C. 2002. *Introductory econometrics for finance*, Cambridge University Press, Cambridge.

Chan N.H. 2002. *Time series. Applications to finance*, Wiley, New York.

Crouhy M., Galai D., Mark R. 2001. *Risk management*, McGraw Hill, New York.

Mills T. 1999. *The econometric modeling of financial time series*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge.

Tsay R.S. 2002. *Analysis of financial time series*, Wiley, New York.

Markowitz H.M. 1952. *Portfolio selection*, „Journal of Finance", 7, 77-91.

Merton R.C. 1973. *Theory of rational option pricing*, „Bell Journal of Economics and Management Science", 4, 141-183.