

# WSPOMAGANIE DECYZJI W OBSZARZE WYZNACZANIA TRAS POJAZDÓW

Paweł Hanczar\*  
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

**Streszczenie:** *Problem wyznaczania tras pojazdów jest znany już od 1959 roku. Od tego czasu rozważono wiele różnych wersji tego zadania, a także opracowano wiele algorytmów jego rozwiązywania. Wraz z rozwojem nowych koncepcji w zakresie zarządzania przedsiębiorstwem w obszarze planowania tras wciąż pojawiają się nowe wymagania.*

*W pierwszej części artykułu zostały przedstawione klasyczne sformułowania problemu wyznaczania tras pojazdów oraz wybrane metody jego rozwiązywania. Następnie w części drugiej zaprezentowano główne, zdaniem autora, kierunki rozwoju modeli wyznaczania tras pojazdów. W części tej przedstawiono także nowe propozycje metod ich rozwiązywania wraz z oceną ich skuteczności. Jako pierwszy kierunek przedstawiono zagadnienie wyznaczania tras przepływu zapasów określane często jako zarządzanie zapasami sterowane przez dostawcę. Następnie rozważono zagadnienie wyboru dostawcy usług transportowych w warunkach różnych taryf transportowych. Jako ostatnie zaprezentowano zagadnienie wyznaczania tras pojazdów w wielopoziomowych sieciach dystrybucyjnych.*

**Słowa kluczowe:** *problem wyznaczania tras dostaw, problem wyznaczania tras zapasów, uzupełnianie zapasów sterowane przez dostawcę, optymalizacja dyskretna.*

## DECISION SUPPORT MODELS FOR VEHICLE ROUTING PROBLEMS

**Abstract:** *Research in the field of vehicle routing problem started in 1959. For more than 50 years a lot of versions of this problem have been considered and many solution methods have been developed. Unfortunately new management concepts continuously put out the challenge to vehicle routing researchers.*

*Presented paper is divided into two parts. In the first part the classical vehicle routing formulations and their solution methods were presented. In the second*

---

\* Paweł Hanczar, Katedra Logistyki, Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu, ul. Komandorska 118/120, 53-345 Wrocław, e-mail: pawel.hanczar@ue.wroc.pl

*part the three main directions of advance are identified and briefly described. The new solution approaches to finding solution to the new variants of vehicle routing problem are proposed and tested. Firstly we conduct new solution methods to inventory routing problem. Then the common case of the vehicle routing problem in different distribution tariff environment is analyzed. Lastly the vehicle routing problem in multiechelon distribution networks is considered.*

**Keywords:** *vehicle routing problem, inventory routing planning, vendor managed inventory replenishment, optimization.*

## 1. Problem wyznaczania tras pojazdów

Problem wyznaczania tras pojazdów (ang. *vehicle routing problems* – VRP) określa obszerną grupę zagadnień optymalizacji dyskretnej. Stanowi on generalizację powszechnie znanego w teorii optymalizacji problemu komiwojażera (ang. *traveling salesman problem* – TSP) – jednego z najstarszych problemów optymalizacji na sieciach. Sposób wyznaczenia optymalnej trasy komiwojażera przyciąga uwagę badaczy od wielu lat, a sam problem istnienia trasy rozważano już w XIX wieku.

Zadanie komiwojażera polega na odwiedzeniu dokładnie raz każdej z wybranych miejscowości, a następnie na powrocie do miejscowości, w której rozpoczęto podróż. Znane są koszty przejazdu między każdą parą miast. Droga komiwojażera powinna być zaplanowana w taki sposób, aby koszt podróży był jak najmniejszy. Dla danej sieci odwzorowującej obszar, po którym porusza się komiwojażer, oraz przy założeniu, że wagi krawędzi reprezentują koszt przejazdu, problem komiwojażera możemy zdefiniować jako znalezienie w sieci cyklu Hamiltona o najmniejszej wadze. Problem komiwojażera można sprowadzić też do zagadnienia programowania liniowego. Dla sieci  $G = (V, E)$  charakteryzowanej przez macierz wag  $W = [w_{ij}]$  problem komiwojażera zapisać można jako zadanie:

$$\min \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} w_{ij} x_{ij} \quad [1]$$

przy warunkach

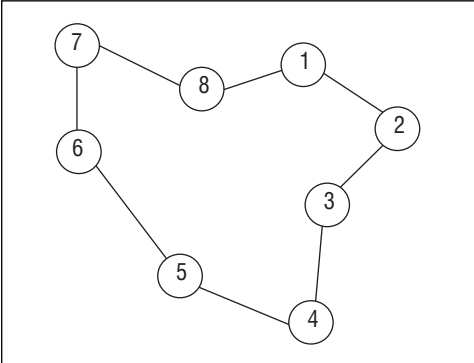
$$\sum_{i \in V} x_{ij} + \sum_{i \in V} x_{ji} = 2 \quad \text{dla każdego } j \in V \quad [2]$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1 \quad \text{dla każdego } S \subset V, S \neq \emptyset \quad [3]$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \text{dla każdego } i, j \in V \quad [4]$$

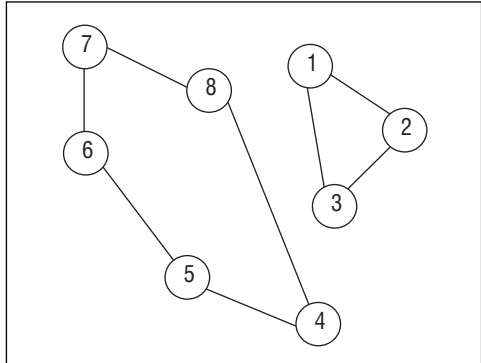
Symbolem  $x_{ij}$  oznaczono zerojedynkową zmienną decyzyjną, która przyjmuje wartość 1 wówczas, gdy krawędź  $(i, j)$  jest w rozwiązaniu, 0 zaś w pozostałych przypadkach. Symbol  $|S|$  oznacza moc zbioru  $S$ . Ograniczenie [2] zapewnia, że każda miejscowość zostanie odwiedzona dokładnie raz. Niestety, warunek ten nie wyklucza przypadków, gdy droga komiwojażera nie jest cyklem Hamiltona (rysunek 1), lecz składa się z kilku niepołączonych ze sobą cykli (rysunek 2).

**Rysunek 1. Spójna (dopuszczalna) trasa komiwojażera**



Źródło: Opracowanie własne.

**Rysunek 2. Niespójna (niedopuszczalna) trasa komiwojażera**



Źródło: Opracowanie własne.

Niezbędne jest więc dodatkowe ograniczenie [3] zapobiegające powstawaniu wielu cykli. Jednym ze zbiorów  $S$  dla przykładu z rysunków 1 i 2 jest zbiór  $S1 = \{1, 2, 3\}$ . Liczba krawędzi łączących wierzchołki tego zbioru wynosi 2 w przypadku rozwiązania poprawnego, natomiast dla rozwiązania niedopuszczalnego jest równa 3. Prawa strona ograniczenia jest dla obu przypadków taka sama i wynosi 2. Tak więc rozwiązanie składające się z kilku cykli zostanie odrzucone, gdyż nie spełnia warunku [3].

Bardzo często spotykaną odmianą problemu komiwojażera jest przypadek, dla którego sieć transportowa jest nieskierowana (macierz wag jest wtedy symetryczna, czyli  $w_{ij} = w_{ji}$  dla każdego  $i, j \in V$ ). Wynika to z faktu, że w wielu zastosowaniach macierz wag reprezentuje odległości, które dla większości przypadków są takie same bez względu na to, w którym kierunku porusza się komiwojażer.

W miarę wzrostu popularności oraz w związku z sukcesami w rozwiązywaniu problemu komiwojażera coraz częściej podejmowano próby zastosowania tej grupy mo-

deli do rozwiązywania zagadnień bardziej skomplikowanych. To, że problem komiwojażera ma wiele zastosowań, jest bezdyskusyjne, jednak w realizacji procesu dystrybucji często korzysta się z więcej niż jednego środka transportu.

Jednym z pierwszych kroków, w tym kierunku, było zdefiniowanie na początku lat 50. problemu  $m$ -komiwojażerów. Problem ten polega na wyznaczeniu tras dla więcej niż jednego komiwojażera. Rozwiązaniem problemu  $m$ -komiwojażerów nie jest cykl Hamiltona, lecz  $m$  cykli, z których każdy rozpoczyna się i kończy w określonym, tym samym dla wszystkich komiwojażerów, mieście. Dodatkowo zakłada się, że komiwojażer nie może odwiedzać miast obsługiwanych przez innych podróżników.

Klasę zadań VRP możemy określić jako zagadnienia optymalizacji polegające na wyznaczeniu rozwiązania problemu  $m$ -komiwojażerów z uwzględnieniem dodatkowych, zależnych od konkretnego zadania warunków. Jako pierwszy zagadnienie z tej klasy pod nazwą problemu rozdziału pojazdów (*ang. truck disptching problem*) sformułowali Dantzig i Ramser (Dantzig, 1959). Kolejna pionierska praca to artykuł Balinskiego i Quandta (Balinski, 1964), w którym autorzy zaproponowali model programowania liniowego dla VRP.

Najprostszą odmianą zadania z klasy VRP jest wyznaczanie tras pojazdów z ograniczeniem pojemności (*ang. capacitated vehicle routing problem* – w skrócie CVRP), gdzie jedynym dodatkowym warunkiem jest ograniczenie zapewniające, że suma zamówień odbiorców dla każdej trasy nie przekroczy zadanej ładowności pojazdu. W CVRP dana jest sieć  $G = \{V, E\}$ , gdzie zbiór wierzchołków  $V$  jest zbiorem odbiorców  $N = \{1, \dots, n\}$  powiększonym o element odpowiadający dostawcy oznaczony jako  $\{0\}$ . Dostawca dysponuje zbiorem  $K = \{1, \dots, k\}$  pojazdów, każdy o ładowności  $C$ . Popyt każdego odbiorcy  $i$  oznaczony przez  $q_i$  musi zostać w pełni zaspokojony przez dokładnie jedną dostawę. W dalszych rozważaniach przyjęto, że  $S^0 \equiv S \cup \{0\}$  oraz  $N^0 \equiv N \cup \{0\}$ . Sieć transportowa  $G$  jest reprezentowana przez macierz wag oznaczoną jako  $W = [w_{ij}]$ , gdzie  $i, j \in (0, \dots, n)$ . Dodatkowo zapis  $r(S)$  oznacza liczbę pojazdów niezbędną do obsługi odbiorców ze zbioru  $S$ .

Celem zagadnienia CVRP jest wyznaczenie zbioru  $k$  niepustych tras o minimalnej łącznej długości przy warunku: suma zapotrzebowań odbiorców na żadnej z tras nie może przekroczyć ładowności pojazdu  $C$ .

Sformułowania liniowe zadań z klasy VRP można podzielić na dwie podstawowe grupy. Są to: modele przepływu pojazdów (*ang. vehicle flow models*) oraz modele podziału zbioru klientów (*ang. set partitioning models*).

W modelach z pierwszej grupy zerojedynkowa zmienna decyzyjna określa, czy krawędź określona na wierzchołkach  $i$  oraz  $j$  została użyta w rozwiązaniu. Są one najczęściej stosowane w przypadku klasycznych zadań VRP, gdzie koszt rozwiązania wyznacza się jako sumę wag odcinków użytych w rozwiązaniu. Liczba zmiennych decyzyj-

nych w tego typu modelach wynosi nie więcej niż  $n^2$ , natomiast liczba ograniczeń rośnie wykładniczo wraz ze wzrostem  $n$  (gdzie  $n$  oznacza liczbę miast w zadaniu).

W modelach podziału zbioru klientów zerojedynkowa zmienna decyzyjna odpowiada trasie dopuszczalnej i określa, czy użyto ją w rozwiązaniu. W przeciwieństwie do metod przepływu pojazdów modele te zawierają  $n$  ograniczeń, ale liczba zmiennych decyzyjnych rośnie wykładniczo wraz ze wzrostem  $n$ .

W dalszej części, w celu prezentacji podstawowych cech poszczególnych grup modeli, opisano tylko wybrane, uznane za najbardziej reprezentatywne, sformułowania. Szczegółową prezentację modeli VRP zawierają m.in. prace (Golden, 1988) oraz (Laporte, 1987).

### 1.1. Modele przepływu pojazdów

Podstawowym modelem zaliczanym do grupy modeli przepływu pojazdów jest tzw. model trójindeksowy (Golden, 1988). Model przedstawiony wzorami [5]-[10] został opracowany na podstawie propozycji Goldena. Zmienną decyzyjną oznaczono jako  $x_{ij}^k$ . Przyjmuje ona wartości 0 lub 1. Wartość 1 oznacza, że odcinek  $(i, j)$  należy do trasy pojazdu  $k$ , w przeciwnym wypadku zmienna  $x_{ij}^k$  przyjmuje wartość 0.

$$\min \sum_{i \in N^0} \sum_{j \in N^0} w_{ij} \sum_{k \in K} x_{ij}^k \quad [5]$$

przy założeniach

$$\sum_{i \in N^0} \sum_{k \in K} x_{ij}^k + \sum_{i \in N^0} \sum_{k \in K} x_{ji}^k = 2 \quad \text{dla każdego } j \in N \quad [6]$$

$$\sum_{i \in N^0} x_{im}^k + \sum_{j \in N^0} x_{mj}^k = 2 \quad \text{dla każdego } \begin{matrix} k \in K \\ m \in N \end{matrix} \quad [7]$$

$$\sum_{i \in N} x_{i0}^k + \sum_{j \in N} x_{0j}^k = 2 \quad \text{dla każdego } k \in K \quad [8]$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} \sum_{k \in K} x_{ij}^k \geq r(S) \quad \text{dla każdego } S \subseteq N, S \neq \emptyset \quad [9]$$

$$x_{ij}^k \in \{0,1\} \quad \text{dla każdego } i \in N^0, j \in N^0, k \in K \quad [10]$$

Ograniczenie [6] zapewnia, że każdy odbiorca zostanie odwiedzony dokładnie raz. Ciągłość trasy dla każdego pojazdu została zapewniona dzięki ograniczeniu [7]. Jeśli pojazd dojeżdża do danego odbiorcy, to musi go opuścić. W przypadku wierzchołka dostawcy liczba krawędzi zarówno wchodzących, jak i wychodzących dla każdego pojazdu musi wynosić 1. Zapewnia to ograniczenie [8] dla krawędzi wchodzących do wierzchołka dostawcy oraz wychodzących z wierzchołka dostawcy.

Ograniczenie [7] zapewnia, że dla każdego pojazdu krawędzie wybrane do rozwiązania tworzą cykle. Nie wyklucza jednak przypadków, gdy trasa dla jednego pojazdu nie jest jednym cyklem, lecz składa się z kilku niepołączonych ze sobą (niespójnych) tras. Analogicznie jak w przypadku TSP, niezbędne jest więc dodatkowe ograniczenie [9], zapewniające spójność tras w rozwiązaniu oraz nienaruszenie warunku ładowności pojazdu. Jest ono określane jako ograniczenie ładowności i odcięć (ang. *capacity-cut constraints* – CCCs).

## 1.2. Modele podziału zbioru odbiorców

Pierwszym sformułowaniem z grupy podziału zbioru odbiorców jest wspomniana już wcześniej propozycja Balinskiego i Quandta (Balinski, 1964). Niech  $H = \{Z_1, \dots, Z_m\}$  oznacza zbiór wszystkich możliwych tras spełniających warunki zadania,  $w_j^*$  określa wagę trasy  $Z_j$ . Niech  $a_{ij}$  oznacza współczynnik określający przynależność odbiorcy  $i$  do trasy  $j$ . Przyjmuje on wartość 1, jeśli odbiorca  $i$  jest obsługiwany w trasie  $j$  lub 0 w przeciwnym przypadku. Zmienna decyzyjna  $x_j$  przyjmuje wartość 1 wtedy i tylko wtedy, gdy trasa  $j$  należy do rozwiązania. Propozycję w postaci modelu programowania liniowego prezentują wzory [11]-[14].

$$\min \sum_{j=1}^m w_j^* x_j \quad [11]$$

przy warunkach

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j = 1 \quad \text{dla każdego } i \in N \quad [12]$$

$$\sum_{j=1}^m x_j = k \quad [13]$$

$$x_j \in \{0,1\} \quad \text{dla każdego } j = 1, \dots, m \quad [14]$$

Ograniczenie [12] zapewnia, że każdy odbiorca będzie uwzględniony w rozwiązaniu dokładnie raz. Natomiast warunek [13] zapewnia, że w rozwiązaniu użytych będzie dokładnie  $k$  tras.

W przypadku tego sformułowania liczba zmiennych rośnie wykładniczo wraz ze wzrostem  $n$ , co przy dużych wartościach  $n$  znacznie utrudnia jego rozwiązanie. Również przygotowanie takiego modelu nie jest proste, ponieważ wyznaczenie wagi  $w_j^*$  dla każdej trasy wymaga rozwiązania problemu komiwojażera. Z drugiej strony model ten jest bardzo elastyczny. Umożliwia już na etapie budowy modelu (generowania tras) uwzględnianie wielu dodatkowych ograniczeń i odrzucanie tras niedopuszczalnych.

Przy opracowywaniu metod rozwiązywania VRP, a także przy ich analizie i testowaniu, wykorzystuje się pewną grupę zadań nazywanych zadaniami testowymi (ang. *test instances*). Podstawowym celem ich użycia jest umożliwienie porównywania wyników generowanych przez różne algorytmy. Dodatkowo rozwiązania zadania testowego można użyć do oceny jakości relaksacji problemu generowanej przez wybrany algorytm. W przypadku zadań kombinatorycznych porównanie algorytmów przez sprawdzenie ich na zadaniach testowych zastępuje teoretyczne dowody ich efektywności. W tym celu tworzy się zbiory zadań testowych, które mają często swe źródło w praktyce lub zostały zaproponowane przez ekspertów.

### 1.3. Zastosowania

Mimo że punktem wyjścia w modelowaniu VRP (jak sama nazwa wskazuje) jest samochodowa dystrybucja towarów, liczne zastosowania nie ograniczają się tylko do pojazdów i dystrybucji towarów. W tabeli 1 przedstawiono wybrane zastosowania VRP w praktyce. Wyboru dokonano w taki sposób, aby pokazać zarówno najczęściej spotykane (główne) zastosowania VRP, jak i pojedyncze pomysły wykorzystania opisywanych modeli, świadczące o ich szerokich możliwościach aplikacyjnych.

**Tabela 1. Wybrane zastosowania VRP**

Lp.	Źródło	Zastosowanie	Środek transportu	Uwagi
1	Gourley 1998	dystrybucja produktów firmy Pepsi-Cola, Kanada	pojazdy	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 11 000 odbiorców</li> <li>• skrócenie czasu dostawy</li> </ul>
2	Sfiligoy 1997	dystrybucja produktów spożywczych firmy Anheuser-Busch, USA	pojazdy	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 1500 odbiorców (dostawa w zadanym przedziale czasowym)</li> <li>• 100 pojazdów 10 typów</li> <li>• redukcja tras o około 5-7% (48 000 mil rocznie)</li> <li>• skrócenie czasu wyznaczania tras</li> </ul>
3	Greczyn 1997	odbiór śmieci z terenu miasta Philadelphia	pojazdy	<ul style="list-style-type: none"> <li>• redukcja liczby pojazdów o 20%</li> <li>• dostosowanie pojazdów do ulic</li> <li>• wyrównanie tras</li> </ul>

**Tabela 1. Wybrane zastosowania VRP**

Lp.	Źródło	Zastosowanie	Środek transportu	Uwagi
4	Bletrami 1974	odbiór śmieci z terenu miasta Nowy Jork	pojazdy	<ul style="list-style-type: none"> <li>• dziennie około 25 000 ton</li> <li>• różne częstotliwości wizyt</li> </ul>
5	Adenso-Diaz 1998	dystrybucja produktów mleczarskich, północna Hiszpania	pojazdy	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 19 dystrybutorów (każdy około 5–10 dostawców)</li> <li>• 1 dostawca obsługuje około 1500 klientów</li> <li>• skrócono trasę każdego z odbiorców o około 10%</li> </ul>
6	Mans 1997	dystrybucja produktów Mayfield Dairy Farms, Ateny	pojazdy	<ul style="list-style-type: none"> <li>• obsługa 14 000 odbiorców w 19 centrach dystrybucyjnych</li> <li>• zachowano długości tras przy zwiększeniu liczby obsługiwanych odbiorców</li> </ul>
7	Golden 1977	dystrybucja The Morning Courier, USA	pojazdy, trasy piesze	<ul style="list-style-type: none"> <li>• wymagania czasowe (dystrybucja od 4.30; musi się zakończyć o 6.30 rano)</li> <li>• dzienna optymalizacja tras</li> <li>• wykorzystanie GIS</li> </ul>
8	Golden 2002	Euro Press, Europa	pojazdy, trasy piesze	<ul style="list-style-type: none"> <li>• obsługa skrzynek na ulicach (podwójny przejazd)</li> <li>• dokładne modelowanie tras pieszych</li> </ul>
9	Cline 1992	rozmieszczenie boi ochronnych na morzu	statki	
10	Fiala 1992	obsługa platform wiertniczych, Nigeria	helikoptery	
11	Larson 1988	transport odpadków komunalnych	barki	
12	Rich 1999	planowanie tras pielęgniarek	pojazdy, trasy piesze	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 900 pacjentów, 294 pielęgniarki</li> <li>• zmienny czas obsługi pacjenta</li> </ul>

Źródło: Opracowanie własne na podstawie literatury.

## 2. Metody rozwiązywania problemów wyznaczania tras pojazdów

Metody rozwiązywania VRP podzielić można na 3 grupy. Pierwszą grupę stanowią metody polegające na zastosowaniu klasycznej metody podziału i ograniczeń (ang. *branch and bound*) – stosowanej z sukcesami w przypadku TSP. Druga grupa to metody polegające na bezpośrednim rozwiązywaniu sformułowań programowania liniowego VRP. Podstawowe metody z tej grupy to metoda podziału i cięć (ang. *branch and cut*) dla modeli przepływu pojazdów oraz metoda generowania kolumn (ang. *column generation*) dla modeli podziału zbioru odbiorców. Ostatnia grupa to bardzo liczna grupa metod konstrukcyjnych, których działanie polega na konstruowaniu rozwiązań według pewnych przesłanek, których przestrzeganie w akceptowalnym czasie pozwoli uzyskać poprawne rozwiązania.

### 2.1. Metody podziału i ograniczeń

Rozwiązywanie problemu metodą podziału i ograniczeń jest procesem przeszukiwania drzewa, w którym główny węzeł (tzw. korzeń) odpowiada rozwiązywanemu



problemowi, a pozostałe węzły to podproblemy zbudowane przez dodanie jednego lub kilku ograniczeń do problemu oryginalnego. Drzewo to będziemy nazywać drzewem poszukiwania. Generowanie kolejnych poziomów drzewa poszukiwania odpowiada kolejnym podziałom zbioru rozwiązań.

Analiza drzewa poszukiwania realizowana jest w sposób dynamiczny, tzn. dla wszystkich podproblemów odpowiadających dodawanym do drzewa węzłom obliczane jest dolne ograniczenie, a do dalszego przeglądu wybierane są węzły, dla których wartość dolnego ograniczenia jest najniższa.

Pierwszym algorytmem z tej grupy jest propozycja Christofidesa i Eliona z 1969 roku (Christofides, 1969). W istocie jest to modyfikacja metody podziału i ograniczeń rozwiązywania TSP, która opracowana została przez Little'a i innych (Little, 1963).

W początkowym etapie tego algorytmu VRP jest przekształcany do TSP. W tym celu do problemu pierwotnego dodawanych jest  $k - 1$  wierzchołków, tzw. sztucznych dostawców. Modyfikacji wymaga macierz wag. Niech  $N = \{1, \dots, n\}$  oznacza zbiór węzłów odbiorców w problemie wyjściowym, a  $N_K = \{n + 1, \dots, n + k - 1\}$  niech oznacza zbiór węzłów odpowiadających sztucznym dostawcom. Wagi istniejących krawędzi pozostają bez zmian. Wagi krawędzi łączących nowe węzły z węzłami odbiorców są równe wagom krawędzi łączących węzeł dostawcy problemu wyjściowego z tymże węzłem odbiorcy. Wagi krawędzi łączących dodane węzły dostawców z węzłem dostawcy problemu wyjściowego wynoszą  $+\infty$ . Ma to zapewniać niekorzystanie z bezpośrednich połączeń pomiędzy dostawcami. Rozwiązanie tak postawionego TSP, przy założeniu, że każdy węzeł sztucznego dostawcy jest końcem jednej trasy, a początkiem następczej, jest również rozwiązaniem VRP.

Propozycja Christofidesa i Eliona polega nie tylko na innym sposobie przedstawienia VRP, ale również na rozbudowaniu oryginalnego algorytmu o procedury sprawdzania dopuszczalności rozwiązania oraz o procedury redukcji drzewa poszukiwania wykorzystujące założenia VRP. Eksploracja wybranego węzła nie jest kontynuowana, gdy zachodzi jeden z poniższych warunków:

- łączne zapotrzebowanie na jednej trasie przekracza całkowitą ładowność pojazdu, gdy zbiór krawędzi wybranych do rozwiązania tworzył jedną lub więcej tras,
- łączne zapotrzebowanie nienależących do rozwiązania odbiorców przekracza ładowność pojazdów nieprzydzielonych do tras.

Metodę rozwiązywania VRP wykorzystującą podział wg krawędzi zaproponował także Miller (Miller, 1995). Do wyznaczania krawędzi ograniczającej zbiór rozwiązań na kolejnych poziomach drzewa poszukiwania korzysta on z grafu rozwiązania relaksacji  $b$ -skojarzenia. Jeśli bieżące rozwiązanie zawiera ścieżkę nienależącą do żadnej

trasy i kończy się ona przykładowo węzłem  $v$ , to do podziału zbioru rozwiązań wybierana jest krawędź incydentna z wierzchołkiem  $v$  w grafie rozwiązania relaksacji  $b$ -skojarzenia. W pozostałych przypadkach (gdy rozpoczynano budowę drzewa poszukiwania lub gdy rozwiązanie zawierało jedną lub kilka tras) do podziału zbioru rozwiązań wybierano krawędź łączącą wierzchołek dostawcy z wierzchołkiem odbiorcy nienależącym do rozwiązania częściowego o największym zapotrzebowaniu. Dodatkowo, oprócz dwóch standardowych węzłów drzewa poszukiwania (tzn. jednego odpowiadającego rozwiązaniom zawierającym wybraną krawędź oraz drugiego odpowiadającego rozwiązaniom niezawierającym wybranej krawędzi), w drzewie tworzony jest dodatkowo trzeci węzeł odpowiadający trasie zawierającej jednego odbiorcę (czyli dwukrotnie zawierający wybraną krawędź).

Kolejna propozycja z tej grupy to algorytm Fishera (Fisher, 1988). Sposób podziału zbioru odbiorców zależy (analogicznie jak w przypadku metody Millera) od tego, czy w rozwiązaniu częściowym istnieje ścieżka nienależąca do żadnej trasy. W przypadku, gdy rozwiązanie częściowe nie zawiera takiej ścieżki, to wykorzystuje się klasyczny podział według krawędzi. Do podziału wybierana jest krawędź łącząca wierzchołek odpowiadający nieobsługiwanemu odbiorcy o największym zapotrzebowaniu z jego najbliższym i nieobsługiwanym sąsiadem.

W sytuacjach, gdy w rozwiązaniu częściowym istnieje ścieżka nienależąca do żadnej z tras dla jednego z dwóch końcowych wierzchołków, przyjmijmy  $j$ , wybierany jest pewien  $p$ -elementowy zbiór  $P$  wierzchołków odpowiadających nieobsługiwanym odbiorcom powiększonym o wierzchołek dostawcy. Drzewo poszukiwania rozbudowuje się przez dodanie  $p + 1$  węzłów. Pierwszych  $p$  węzłów odpowiada rozwiązaniom zawierającym kolejno krawędź  $(j, h)$ , gdzie  $h \in P$ . Ostatni dodany węzeł odpowiada rozwiązaniom, które nie zawierają żadnej z krawędzi  $(j, h)$ , gdzie  $h \in P$ .

## 2.2. Metody rozwiązywania sformułowań programowania matematycznego

W tej części zostaną przedstawione główne aspekty stosowania metody podziału i cięć (ang. *branch and cut*) służącej do rozwiązywania modeli przepływu pojazdów. Szczegółową jej prezentację zawierają m.in. prace Blasum, 2000; Carrara, 1997; Padberg, 1991 oraz Thienel, 1995.

Klasyczny algorytm podziału i ograniczeń, służący do rozwiązywania zadań programowania całkowitoliczbowego (w skrócie *IP*), realizuje proces optymalizacji w dwóch powtarzanych fazach. W pierwszej z nich jest rozwiązywane zadanie programowania liniowego (w skrócie *LP*), utworzone na podstawie zadania *IP* przez usunięcie ograniczeń całkowitości zmiennych. Jeśli wartości zmiennych w rozwiązaniu

zadania  $LP$  są całkowite, to są one również rozwiązaniem zadania  $IP$ . Jeśli jednak dowolna zmienna decyzyjna, przykładowo  $x_e$ , przyjmuje wartość rzeczywistą  $w$ , to na podstawie zadania  $LP$  tworzone są dwa inne zadania. Pierwsze z nich powstaje przez rozszerzanie zadania  $LP$  o górne ograniczenie zmiennej  $x_e$  (tj.  $x_e \leq \lfloor w \rfloor$ ), w drugim natomiast dodawane jest dolne ograniczenie zmiennej  $x_e$  (tj.  $x_e \geq \lceil w \rceil$ ). (zapisy  $\lfloor w \rfloor$  oraz  $\lceil w \rceil$  oznaczają odpowiednio największą liczbę całkowitą nie większą niż  $w$  oraz najmniejszą liczbę całkowitą nie mniejszą niż  $w$ ). Zadania te są następnie rozwiązywane. Proces optymalizacji powtarzany jest tak długo, aż w rozwiązaniu  $LP$  wartości wszystkich zmiennych decyzyjnych będą całkowite.

Metoda ta nie może być zastosowana do rozwiązywania sformułowania przepływu pojazdów ze względu na bardzo dużą liczbę ograniczeń zapewniających spójność tras rozwiązania. Realizacja metody podziału i cięć rozwiązywania VRP wykorzystuje spostrzeżenie, że nie wszystkie ograniczenia w rozwiązaniu optymalnym są aktywne. Zakłada ona modyfikację polegającą na usunięciu z modelu przepływu pojazdów (w skrócie  $IP^{VRP1}$ ) zarówno ograniczeń całkowitości zmiennych, jak i całej grupy ograniczeń gwarantujących spójność rozwiązania. Otrzymany model okreśmy w skrócie jako  $LP^{VRP1}$ . Jeśli wartości zmiennych decyzyjnych w rozwiązaniu zadania  $LP^{VRP1}$  uzyskanego przez zastosowanie klasycznego algorytmu podziału i ograniczeń będą całkowite, to wymagane jest dodatkowo sprawdzenie, czy trasy rozwiązania są spójne. To zadanie realizują tzw. algorytmy separacji (ang. *separation algorithms*). Gdy trasy rozwiązania nie są spójne, wówczas procedura wskazuje naruszone ograniczenie. Naruszone ograniczenie jest uwzględniane w zadaniu  $LP^{VRP1}$ , a całe zadanie rozwiązywane ponownie. W pozostałych sytuacjach realizacja metody jest zakończona. Proces ograniczania powtarzany jest tak długo, aż rozwiązanie  $LP^{VRP1}$  nie będzie naruszało ograniczeń zarówno całkowitości zmiennych, jak i spójności tras.

Sformułowania VRP w postaci liniowego modelu podziału zbioru odbiorców charakteryzują się rosnącą wykładniczo w miarę wzrostu wielkości problemu liczbą zmiennych decyzyjnych. Z tego powodu zastosowanie klasycznych metod rozwiązywania zadań programowania liniowego nie jest możliwe już dla sieci transportowych składających się z 30 odbiorców.

Podstawą algorytmów z tej grupy jest odpowiednia technika rozwiązywania liniowej relaksacji modelu podziału zbioru odbiorców VRP (w skrócie  $LP^{VRP2}$ ). Modele te charakteryzują się bardzo dużą liczbą zmiennych, tak więc w pierwszym kroku rozwiązywania  $LP^{VRP2}$  uwzględniany jest tylko wybrany podzbiór zbioru wszystkich tras. Model uwzględniający tylko pewne trasy oznaczono jako  $RP^{VRP2}$ . Następnie w celu sprawdzenia, czy uzyskane rozwiązanie  $RP^{VRP2}$  jest rozwiązaniem optymalnym również dla  $LP^{VRP2}$ , wykorzystuje się technikę generowania kolumn. Na podstawie anali-

zy wartości zmiennych dualnych wyznaczone są trasy, których uwzględnienie w  $RP^{VRP2}$  spowoduje zmniejszenie wartości funkcji celu. Jeśli taka trasa istnieje, dodawana jest do  $RP^{VRP2}$ , a zadanie rozwiązuje się ponownie. Całe postępowanie kończy się, gdy nie istnieje trasa, której uwzględnienie w  $RP^{VRP2}$  zmniejszy wartość funkcji celu.

Najbardziej skomplikowane w tego rodzaju algorytmach jest wyznaczenia trasy, której dodanie do rozwiązania pozwoli na zmniejszenie jego długości i jest określany jako problem generowania kolumn (ang. *column generation problem*). Zagadnienie to jest trudne do rozwiązania, gdyż należy do grupy NP-trudnych. Propozycje algorytmów rozwiązywania tego problemu w modelach VRP zawierają m.in. prace Agarwal, 1989; De Backer, 2000; Desrochers, 1992 i Hadjiconstantinou, 1995.

### 2.3. Konstrukcyjne metody rozwiązywania

Najbardziej rozpowszechnioną metodą rozwiązywania VRP w opisywanej grupie jest niewątpliwie podejście Clarka i Wrighta (Clark, 1964) – często nazywana algorytmem oszczędzania (ang. *savings algortihm*). Podejście to także doczekało się największej liczby modyfikacji i rozszerzeń. Na początku procedury przyjmowane jest rozwiązanie składające się z pojedynczych tras do wszystkich odbiorców. W kolejnych iteracjach zmniejszana jest długość rozwiązania przez łączenie wybranych tras. W tym celu wprowadza się połączenie bezpośrednio pomiędzy końcowym lub początkowym odbiorcą jednej trasy a końcowym lub początkowym odbiorcą drugiej. W każdym kroku rozważane są wszystkie możliwe łączenia. Do rozwiązania jest wprowadzane połączenie, którego użycie gwarantuje uzyskanie największego skrócenia rozwiązania.

Do metody tej wprowadzono wiele modyfikacji. Gaskell (Gaskell, 1967) analizował różne sposoby mierzenia spadku kosztu w wyniku połączenia dwóch tras. Badał on poziomice miar oszczędzania, gdyż ich kształt jest zależny od przyjętego sposobu pomiaru. W wyniku tych analiz zaproponował nowe przesłanki wyboru łączonych tras.

Także Yellow (Yellow, 1970) zaproponował modyfikację tego podejścia przez zdefiniowanie tzw. ogólnej wartości spadku kosztu. W podejściu tym wykorzystuje się parametr kształtu poziomicy. Jeśli parametr ten przyjmie wartość 1, to wzór Yellowa przyjmuje postać klasycznego wzoru Clarka i Wrighta, dla wartości 2 jest równoznaczny z jedną z propozycji Gaskella. Wzrost wartości tego parametru powoduje, że przy wyborze łączonych tras większy wpływ będzie miała bezpośrednia odległość miast, pomiędzy którymi zostanie wprowadzone połączenie bezpośrednio. Teoretycznie parametr kształtu może przyjmować dowolne wartości. Yellow dobierał jego wartość w czasie licznych prób i pokazał, że przez dobranie odpowiedniej jego wartości można uzyskać poprawę rozwiązań generowanych przez klasyczne algorytmy oszczędzania.

Kolejna zmiana sposobu łączenia tras to propozycja Paessensa (Paessens, 1988), który zdefiniował tzw. parametryczną funkcję oszczędzania (ang. *parametrical savings function*). Jako kolejną wartość uwzględnianą w łączeniu tras Paessens proponuje użycie wartości bezwzględnej różnicy pomiędzy odległościami analizowanych punktów od centrum dystrybucji. Przykładowo – jeśli jedno z miast jest oddalone od centrum zapotrzebowania, drugie natomiast leży blisko centrum, to wprowadzenie bezpośredniego połączenia między takimi miastami może być dobrą operacją, mimo że wartość klasycznej miary będzie mała. Paessens powtarzał działanie algorytmu wiele razy. Za każdym razem stosował różne wartości parametrów  $\gamma$  z przedziału  $0 \leq \gamma \leq 3$  oraz  $\eta$  z przedziału  $0 \leq \eta \leq 1$ . Zmiany te powodowały, że otrzymywane rozwiązania były różne.

Altinkemer i Gavish (Altinkemer, 1991) zaprezentowali modyfikację algorytmu oszczędzania łączącą w jednej iteracji kilka tras. Pierwszym rozwiązaniem jest zbiór tras do pojedynczych klientów. Następnie w każdej iteracji algorytmu bieżące rozwiązanie częściowe jest przedstawiane jako graf, w którym węzły reprezentują istniejące trasy. Krawędzie grafu łączą węzły odpowiadające możliwym do połączenia trasom. Wadze krawędzi grafu nadaje się wartość miary oszczędzania uzyskanej w przypadku połączenia tras, którym odpowiadają połączone tą krawędzią węzły. Dla tak skonstruowanego grafu wyznacza się skojarzenie o maksymalnej wadze. Zbiór krawędzi wyznaczonego skojarzenia określa, które trasy powinny zostać połączone w rozwiązaniu. Niestety, dużym mankamentem tego algorytmu jest jego zachowanie się w sytuacji, gdy łączna ilość towarów przewożonych na każdej trasie osiągnie wartość większą niż  $C/2$  (połowa ładowności pojazdu). W tym przypadku żadne z tras nie zostaną połączone, a rozwiązanie będzie dalekie od optymalnego. Wyeliminowanie tego problemu autorzy uzyskują przez wprowadzenie dodatkowych węzłów (tzw. sztucznych tras) do pomocniczego grafu, dla którego wyznaczane jest skojarzenie o maksymalnej wadze. Powoduje to, że podczas pojedynczej iteracji liczba łączonych tras spada.

Ostatnią prezentowaną modyfikacją algorytmu oszczędzania jest propozycja Warka i Holta (Wark, 1994). Podobnie jak w poprzedniej metodzie, do wyznaczenia zbioru łączonych tras wykorzystano skojarzenie o maksymalnej wadze. Procedura rozpoczyna się również od rozwiązania składającego się z pojedynczych tras do wszystkich odbiorców. Podstawowa różnica w działaniu tego algorytmu w stosunku do propozycji Altinkemera i Gavisha polega na dopuszczeniu przypadków, w których po połączeniu dwóch tras otrzymujemy nie jedną, lecz dwie (inne niż wyjściowe) trasy.

Kolejne bardzo rozpowszechnione podejście konstrukcyjne rozwiązywania VRP to tzw. algorytm sweep. Metoda ta jest stosowana w przypadku grafów planarnych. Dopuszczalne bloki podziału tworzy się na podstawie odległości kątowej odbiorców od dostawcy. Następnie do wyznaczania tras wykorzystywane są metody rozwiązywania TSP. Algorytm ten jako pierwszy zaproponowali Wren i Holliday (Wren, 1972), ale

ponieważ metoda ta została głównie rozpowszechniona dzięki pracy Gilleta i Millera (Gillet, 1976), im przypisuje się jej autorstwo. Algorytm rozpoczyna działanie od wybrania wolnego pojazdu. Następnie spośród odbiorców nieuwzględnionych jeszcze w rozwiązaniu wybierani są odbiorcy rosnąco według kąta nachylenia prostej przechodzącej przez wierzchołek odbiorcy i wierzchołek dostawcy do osi  $OX$ . Jeśli przydzielenie kolejnego odbiorcy spowodowałoby naruszenie dowolnego warunku zadania, bieżąca trasa zostaje zamknięta, a kolejni odbiorcy przydzielani są do nowego pojazdu. Po przydzieleniu wszystkich odbiorców do rozwiązania następuje procedura wyznaczenia rozwiązania TSP dla każdego bloku oddzielnie.

Ostatni algorytm to propozycja Fishera i Jaikumara (Fisher, 1981). Polega ona na zastosowaniu podczas generowania podziału zbioru odbiorców rozwiązania zadania przydziału. W pierwszym kroku tej procedury spośród wierzchołków odbiorców wybieranych jest  $k$  wierzchołków, które w dalszej części będą pełniły funkcję tzw. koncentratorów bloków (ang. *seed vertices*). Następnie rozwiązywane jest zadanie przydziału, w którym rozważa się  $k$  agentów (pojazdy) i  $n$  zadań (odbiorcy VRP). Niezbędne ilości zasobów dla zadań w zadaniu przydziału są takie same, jak zapotrzebowanie odbiorców problemu wyjściowego. Zasoby agentów odpowiadają ładowności pojazdów. Dodatkowo przyjmuje się, że zadania nie mogą być realizowane przez więcej niż jednego agenta. Rozwiązanie zadania przydziału określa podział odbiorców. Algorytm kończy wyznaczenie optymalnej trasy przejazdu dla każdego bloku podziału powiększonego o wierzchołek dostawcy.

### 3. Zagadnienie wyznaczenia tras pojazdów w łańcuchach dostaw

Wraz z rozwojem nowych koncepcji w zakresie dystrybucji towarów, takich jak zarządzanie zapasami przez dostawcę (ang. *vendor managed inventory replenishment* w skrócie VMI), a także z powiększaniem zakresu zainteresowania z pojedynczego przedsiębiorstwa na wiele przedsiębiorstw tworzących łańcuch dostaw przed metodami wyznaczenia tras pojazdów, są stawiane nowe wymagania. Stosunkowo dobrze przeanalizowane metody rozwiązywania klasycznego VRP wymagają kolejnych rozszerzeń i modyfikacji tak, aby możliwe było ich stosowanie w nowych sytuacjach. Konieczne jest także stwierdzenie zasadności stosowania metody optymalizacyjnych dla nowych zagadnień oraz ich możliwości i ograniczeń. Analiza literatury pozwala zidentyfikować 3 podstawowe kierunki rozwoju opisywanego obszaru. Jako pierwszy wymienić należy wspomniane już wcześniej zagadnienie VMI, które łączy w sobie podejmowanie decyzji dotyczące zarówno planowania tras, jak i sterowania zapasami. Druga grupa zagadnień to problematyka wyboru dostawcy usług transportowych. Ja-

ko ostatni kierunek należy wymienić wyznaczanie tras dostaw w wielopoziomowych sieciach dystrybucyjnych.

### 3.1. Zarządzanie zapasami sterowane przez dostawcę

Zarządzanie zapasami sterowane przez dostawcę (ang. *vendor managed inventory replenishment*) to przykład koncepcji, która dotyczy co najmniej dwóch przedsiębiorstw. Strategia ta polega na przeniesieniu odpowiedzialności za sterowanie poziomem zapasów u odbiorcy z odbiorcy na dostawcę. Odbiorca w tej koncepcji nie składa zamówień (tak jak w klasycznych strategiach) tylko ustala maksymalny poziom magazynu dla surowców objętych VMI. W zamian za przejęcie tego zobowiązania dostawca ma możliwość określania wielkości oraz terminów dostaw. Poprawnie wdrożone VMI gwarantuje zwiększenie efektywności zarówno po stronie odbiorcy (zmniejszenie kosztów sterowania zapasami), a także po stronie dostawcy (zmniejszenie kosztów dystrybucji poprzez mniejsze ograniczenia podczas jej planowania) – (Bell, 1983), (Hannon, 2005), (Mongelluzzo, 1998) i (Waller, 1999).

Problem dostawcy w koncepcji VMI doczekał się licznych modeli badań operacyjnych oraz kilku metod ich rozwiązywania. Na gruncie badań operacyjnych zagadnienia te są określane jako problemy wyznaczania tras przepływu zapasów (ang. *inventory routing problem* IRP).

W IRP jest rozważana powtarzająca się dystrybucja jednorodnego produktu od dostawcy do  $n$  odbiorców w zadanym horyzoncie planowania  $T$ . Dzielne zużycie  $u_i$  każdego odbiorcy jest znane. Ponadto każdy odbiorca dysponuje magazynem o pojemności  $C_i$  przeznaczonym do składowania dystrybuowanych towarów, a jego stan w czasie 0 (na początku analizy) wynosi  $I_i$ . Dostawca dysponuje jednorodnym taborem  $m$  samochodów, każdy o pojemności  $Q$ , umożliwiających dystrybucję produktu. Celem jest minimalizacja kosztów dystrybucji w planowanym okresie  $T$  oznaczona jako  $v_T$  przy założeniu, że u żadnego odbiorcy nie wystąpią braki w magazynie. Rozwiązaniem problemu IRP jest szczegółowy sposób dystrybucji towarów (ilość oraz terminy lub warunki wywołania dostaw, a także trasy dostaw dla poszczególnych pojazdów w każdym okresie) określane jako strategia uzupełniania zapasów.

W IRP wyróżnia się dwie odmiany strategii uzupełniania zapasów. Pierwsza z nich to tzw. strategia czysta. Polega na wyznaczeniu stałych tras dla pojazdów. Oznacza to, że w sytuacji, kiedy wymagana jest dostawa towaru do jednego klienta, pojazd przejeżdża swoją stałą trasę, dostarczając produkty wszystkim klientom przypisanym do tej trasy. Druga odmiana to strategia mieszana, która w odróżnieniu od strategii czystej nie zakłada stałych tras dostarczania w analizowanym okresie. Stosowanie wyłącznie

czystej strategii może charakteryzować się wyższymi kosztami, jednak wyznaczenie najlepszej, czystej strategii jest łatwiejsze od znalezienia strategii optymalnej.

W celu ukazania złożoności zagadnień z tej grupy zostaną przeanalizowane dwa najprostsze przypadki IRP. Pierwszy z nich to sytuacja, w której dostawca zaopatruje tylko jednego odbiorcę, drugi to zadanie składające się z dwóch odbiorców. Nietrudno założyć, że w IRP składającym się tylko z jednego odbiorcy, optymalną strategią uzupełniania zapasów będzie dostarczanie towarów w okresie, kiedy ma wystąpić ich brak. Przyjmując, że  $c_1$  oznacza koszt dostawy do odbiorcy, utożsamiany często z długością trasy dostawy, koszt  $v_T$  dla tego przypadku można wyznaczyć za pomocą wzoru [15].

$$v_T = \max \left( 0, \left\lceil \frac{Tu_1 - I_1}{\min(C_1, Q)} \right\rceil \right) c_1 \quad [15]$$

Jeśli zadanie zawiera dwóch odbiorców, dostawca ma do dyspozycji dwie czyste strategie. Pierwsza z nich to dostarczanie towarów oddzielnie dla każdego odbiorcy. Jej koszt będzie sumą kosztów oddzielnych dostaw do pierwszego i do drugiego odbiorcy – wzór [16]. We wzorze symbolem  $c_i$  oznaczono koszt dostawy do odbiorcy  $i$ .

$$v_T = \max \left( 0, \left\lceil \frac{Tu_1 - I_1}{\min(C_1, Q)} \right\rceil \right) c_1 + \max \left( 0, \left\lceil \frac{Tu_2 - I_2}{\min(C_2, Q)} \right\rceil \right) c_2 \quad [16]$$

Druga to dostarczanie towarów do obydwu odbiorców w jednej trasie. Jeśli przyjmujemy, że  $TSP(c_1, c_2)$  oznacza koszt optymalnej trasy dostawy do odbiorców  $c_1$  i  $c_2$ , to koszt takiej strategii określa wzór [17].

$$v_T = \max \left( 0, \left\lceil \frac{T}{\min\left(\frac{c_1}{u_1}, \frac{c_2}{u_2}, \frac{Q}{u_1+u_2}\right)} \right\rceil \right) TSP(c_1, c_2) \quad [17]$$

Jeśli dla omawianego przypadku dopuścimy użycie strategii mieszanych to liczba możliwych strategii znacznie się zwiększa i zależy od wielkości zapotrzebowań poszczególnych odbiorców. Przykładowo – jeżeli zużycie u jednego odbiorcy jest dwa razy większe niż u drugiego, opłacalne może okazać się wykorzystywanie na przemian obu strategii czystych.

Problem wyznaczania tras przepływu zapasów jest szczegółowo przedstawiony np. w pracach Campbella i Savelsbergha (Campbell, 2002) oraz Campbella i innych (Campbell, 1998).



Pierwsze prace na temat rozwiązywania problemów wyznaczania tras przepływu zapasów zaliczyć można do podejść określanych jako krótkoterminowe, ponieważ zagadnienie oryginalne przez silne skrócenie horyzontu planowania (nawet do jednego dnia) jest sprowadzane do problemu wyznaczania tras pojazdów. Fundamentalne w realizacji metod z tej grupy są procedury określające, którzy odbiorcy powinni zostać zaopatrzeni w najbliższym okresie. Następnie, po wyznaczeniu zbioru odbiorców są układane trasy, ale w sposób, który ma zmaksymalizować wykorzystanie środków transportowych. Działanie takie wynika głównie z postawy asekuracyjnej dostawcy, który obawia się, że w przyszłości może nie być w stanie zrealizować wszystkich wymaganych dostaw. Podstawową wadą tego typu podejść są: tendencja do podnoszenia stanów magazynów, nierównomierne wykorzystanie środków transportowych, a także uniemożliwienie poprawy struktury środków transportowych (w niektórych okresach korzysta się ze wszystkich pojazdów). Przykładami tego typu badań są prace Golden, 1984; Chien, 1989 oraz Bell, 1983.

Drugi nurt badań to podejścia, w których próbuje się uwzględnić średnie koszty stosowania strategii w całym planowanym horyzoncie czasowym – określane jako długoterminowe. Podstawą w ich modelowaniu są najczęściej stałe trasy, które w praktycznych zastosowaniach nie zawsze mogą być stosowane. Dodatkowo, także w tym przypadku, występują pewne wady, z których najistotniejsze to niepełne wykorzystanie ładowności pojazdów oraz zwiększanie liczby realizowanych dostaw.

Problem VRP jest zadaniem NP-trudnym. Uwzględnienie wymagań związanych ze podejściem VMI dodatkowo znacznie komplikuje model IRP i sposób jego rozwiązywania. Uwzględniając powyższe, podstawowym celem opisanej w dalszej części próby zdefiniowania modelu programowania liniowego IRP jest sprawdzenie możliwości dokładnego rozwiązywania zadań tego typu. Zaprezentowane sformułowanie IRP jest połączeniem modelu podziału zbioru odbiorców wyznaczania tras pojazdów z dyskretnym, cyklicznym modelem planowania zapasów. Modelu podziału zbioru odbiorców został wybrany ze względu na możliwość dokładnego określenia realizowanych tras. Postępowanie takie jest stosowane w praktyce.

W prezentowanym wzorami [18]-[25] sformułowaniu indeksy  $i, j$  oraz  $t$  to odpowiednio odbiorcy, trasy i okresy. Parametr  $a_{ij}$  oznacza analogicznie jak w sformułowaniu VRP przynależność odbiorcy  $i$  do trasy  $j$ . Przyjmuje wartość 1, gdy odbiorca  $i$  jest obsługiwany w trasie  $j$  oraz 0 w przeciwnym przypadku. Parametry  $b_i$  oraz  $w_j$  to odpowiednio koszty składowania jednostki towaru u odbiorcy  $i$  oraz waga trasy  $j$ . Symbolem  $uit$  oznaczono zużycie odbiorcy  $i$  w okresie  $t$ . Dodatkowo parametr  $Q$  to ładowność pojazdu stosowanego w dystrybucji. W sformułowaniu wykorzystano także parametr  $M$ , który oznacza dodatnią wartość większą niż suma zapotrzebowań wszystkich odbiorców w analizowanym horyzoncie. Jest on używany w modelu z powodów technicznych.

W sformułowaniu wykorzystano trzy grupy zmiennych decyzyjnych. Jako pierwszą wymienić należy grupę binarnych zmiennych  $x_{jt}$ . Przyjmują one wartość 1, gdy trasa  $j$  jest realizowana w okresie  $t$  oraz 0 w przeciwnym przypadku. Dalej użyto dwie grupy zmiennych związane z zapasami  $y_{it}$  oraz  $z_{ijt}$ . Pierwsza z nich to wielkość zapasu odbiorcy  $i$  w okresie  $t$ , druga natomiast to wielkość zrealizowanej dostawy do odbiorcy  $i$  w trasie  $j$  oraz w okresie  $t$ .

$$\min \left[ \sum_{j=1..m, t=1..p} w_j x_{jt} + \sum_{i=1..n, t=1..p} b_i y_{it} \right] \quad [18]$$

$$z_{ijt} - a_{ij} x_{jt} M \leq 0 \quad \begin{array}{l} \text{dla każdego } j = 1..m \\ t = 1..p \\ i = 1..n \end{array} \quad [19]$$

$$\sum_{i=1..n} z_{ijt} \leq Q \quad \begin{array}{l} \text{dla każdego } j = 1..m \\ t = 1..p \end{array} \quad [20]$$

$$y_{i,t} + \sum_{j=1..m} z_{i,j,t} - d_i - y_{i,t+1} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{dla każdego } i = 1..n \\ t = 1..p - 1 \end{array} \quad [21]$$

$$y_{it} + \sum_{j=1..m} z_{ijt} - d_i - y_{i1} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{dla każdego } i = 1..n \\ t = p \end{array} \quad [22]$$

$$x_{jt} \in \{0,1\} \quad \begin{array}{l} \text{dla każdego } j = 1..m \\ t = 1..p \end{array} \quad [23]$$

$$y_{it} \geq 0 \quad \begin{array}{l} \text{dla każdego } i = 1..n \\ t = 1..p \end{array} \quad [24]$$

$$z_{ijt} \geq 0 \quad \begin{array}{l} \text{dla każdego } j = 1..m \\ t = 1..p \\ i = 1..n \end{array} \quad [25]$$

Funkcja celu zapisana wzorem [18] zapewnia minimalizację łącznych kosztów w całym horyzoncie planowania. Pierwszy składnik sumy to koszty dystrybucji, drugi to koszty magazynowania. Ograniczenie [19] zapewnia połączenie zmiennych  $x_{jt}$  i  $z_{ijt}$ . Gwarantuje ono, że dostawy będą realizowane tylko w okresach, w których będzie wykonywana trasa uwzględniająca danego odbiorcę. Ograniczenie [20] odpowiada za zachowa-

nie maksymalnej ładowności pojazdu. Wzorami [21] i [22] są zapisane ograniczenia gwarantujące ciągłość polityki magazynowania. I tak ograniczenie [21] gwarantuje ciągłość w okresach od 1 do  $p - 1$ . Natomiast ograniczenie [22], ponieważ przyjęto założenie o cykliczności dystrybucji, łączy stany z okresu  $p$  ze stanami z okresu 1. Ograniczenie [23], [24] oraz [25] to ograniczenia brzegowe zmiennych decyzyjnych  $x$ ,  $y$  oraz  $z$ .

Podstawowym problemem w tym sformułowaniu jest proces generowania tras. Przed rozpoczęciem procesu optymalizacji konieczne jest wygenerowanie wszystkich tras, sprawdzenie ich wykonywalności, a także określenia kosztów każdej z nich. Sformułowanie to jest bardzo elastyczne i stanowi dobrą podstawę do budowania bardziej złożonych modeli. Przykładowo uwzględnienie różnych zapotrzebowań na produkty w kolejnych okresach czy dopuszczenie heterogenicznego taboru nie stanowi dużego problemu. Takie zmiany nie wpływają nawet na wielkość modelu oraz na czas jego rozwiązywania. Ponadto możliwe jest stosowanie podejść upraszczających model jak przykładowo predefiniowane wielkości dostaw. Natomiast duża liczba tras nie jest jednak problemem, który uniemożliwiłoby korzystanie z tego sformułowania. Analogicznie jak w przypadku modeli podziału zbioru odbiorców do obsługi tras można używać techniki generowania kolumn, której zastosowanie w przytoczonej grupie modeli znacznie zwiększa rozmiar rozwiązywanych zadań.

Zaprezentowanie sformułowanie zostało użyte do przygotowanie heurystycznej metody wyznaczenia harmonogramu i tras dostaw w 5 okresach w systemie dystrybucyjnym składającym się z 30 odbiorców (Hanczar, 2006). Uzyskane wyniki zostały porównane z planami dotyczącymi tego samego zadania przygotowanymi przez 6 zespołów menedżerów. Wyniki te przedstawia tabela 2.

**Tabela 2. Wyniki symulacji planowanie tras przepływu zapasów**

Lp.	Zespół	Łączna długość tras	Suma dostarczonych produktów	Max liczba pojazdów	Wskaźnik [km/szt.]
1.	01	225,77	33 200	4	0,0068
2.	02	222,91	29 600	3	0,0075
3.	03	200,71	31 458	4	0,0064
4.	04	191,41	30 950	3	0,0062
5.	05	202,37	31 950	3	0,0063
6.	06	220,95	32 000	4	0,0069
7.	<b>AVG</b>	<b>210,22</b>	<b>31 844</b>		<b>0,0066</b>
8.	TR	198,65	32 000	2	0,0062

Źródło: Opracowanie własne na podstawie wyników symulacji.

W tabeli 2 zaprezentowano łączną długość tras (kolumna 3), sumę dostarczonych produktów (kolumna 4), maksymalną liczbę pojazdów w okresie użytą do dystrybucji (kolumna 5) oraz wskaźnik km/szt. (kolumna 6) określający, ile kilometrów należy pokonać celem dostarczenia jednej jednostki produktu. Pierwsze 6 wierszy tabeli prezen-

tuje wyniki dla poszczególnych zespołów, wiersz 7 to wynik średni, natomiast w wierszu 8 przedstawiono wynik uzyskany za pomocą omawianego tutaj sformułowania.

Analiza wyników zawartych w tabeli 2 nie jest jednoznaczna. Powodem tego jest specyfika problemu wyznaczania tras przepływu zapasów, w którym wyniki decyzji operacyjnych mogą być oceniane dopiero w długim okresie. W pierwszej kolejności należy zauważyć, że wynik uzyskany za pomocą metod optymalizacyjnych nie jest, pod względem długości trasy, rozwiązaniem najlepszym. Najlepszy uzyskany wynik to rozwiązanie zaproponowane przez zespół 04. Jednak dużą zaletą tego pierwszego jest fakt, że we wszystkich okresach do realizacji dystrybucji są wykorzystywane tylko dwa pojazdy. Ponadto suma dostarczonych produktów jest również większa dla rozwiązania uzyskanego za pomocą metod optymalizacyjnych. Stosunek łącznej długości tras do liczby dostarczonych produktów, który określa część kilometra, jaką pokonano w celu dostarczenia jednej sztuki produktu, w przypadku obu tych rozwiązań są takie same.

### **3.2. Wybór dostawcy usług dystrybucyjnych w warunkach różnych taryf transportowych**

Gwałtowny rozwój przedsiębiorstw transportowych działających na podstawie różnych typów taryf spowodował pojawienie się zapotrzebowanie na wspomaganie decyzji planowania tras z uwzględnieniem różnych taryf transportowych. Z jednej strony oferta usług dużych, międzynarodowych przedsiębiorstw transportowych gwarantuje niskie ceny. Z drugiej strony małe krajowe firmy przewozowe zapewniają w swoim – często jedynym – odbiorcom wysoką jakość i elastyczność świadczonych usług.

Taryfę transportową określić możemy jako wykaz cen za usługi transportowe wraz z przepisami ich stosowania. Biorąc pod uwagę kryterium sposobu obliczania kosztów dostawy, możemy wyróżnić dwa podstawowe typy taryfy:

- zależne od odległości i wielkości przesyłki,
- zależne od długości trasy przebytej w celu dostarczenia przesyłki.

W taryfie pierwszego typu nie uwzględnia się bezpośrednio rzeczywistej odległości pokonywanej przez przesyłkę, lecz dla ujednoczenia i ułatwienia rozliczeń są ustalone uśrednione stawki transportowe zależne od wagi przesyłki oraz od odległości pomiędzy punktami nadania i odbioru. Najkorzystniejsze dla firmy transportowej są tutaj przesyłki na trasach o dużym wolumenie. Jednak wybierając ten typ taryfy, firma przewozowa zobowiązuje się do realizowania wszystkich nadań. Stąd głównym problemem w stosowaniu taryf tego typu jest wyznaczenia odpowiednich stawek. Często

stosowaną praktyką jest tutaj ustalanie stawek na wysokim poziomie. Następnie w zależności od różnych czynników stawki te są znacznie obniżane dla stałych klientów.

W taryfie drugiego typu koszt przewozu jest bezpośrednio zależny od rzeczywistej długości trasy, jaką pokonuje środek transportu w celu dostarczenia jednej lub więcej przesyłek. Najczęściej taryfy takie stosują najmniejsi uczestnicy rynku usług transportowych. Są one tym korzystniejsze im rozproszenie odbiorców jest mniejsze, a poziom załadowania pojazdu większy.

W przeważającej większości modeli wspomagających decyzje transportowe koszt dostawy jest utożsamiany z długością przejechanej trasy. Przykładem może być tutaj szeroko stosowany model trójindeksowy przedstawiony w pierwszej części opracowania. Pomijając trudności w jego używaniu, wynikające z dużych rozmiarów zadań rzeczywistych, model ten może być używany wyłącznie w sytuacji, kiedy decydent planuje tylko trasy przejazdu i nie musi dodatkowo wybierać jednego z kilku dostawców usług transportowych. Problem staje się jeszcze bardziej złożony, gdy analizowani spedytorzy rozliczają się na podstawie różnych typów taryf transportowych.

Przedstawiona skrótowo zmiana specyfiki problemów dotyczących decyzji transportowych wymusza zmianę postaci modeli stosowanych w optymalizacji opisywanych zagadnień. Najbardziej obiecującym w nowych warunkach sformułowaniem wydaje się model podziału zbioru odbiorców.

Przedstawiony w pierwszej części opracowania model podziału zbioru odbiorców można określić jako model wyboru tras. Dopuszczalna ładowność, długość trasy, a także odbiorcy obsługiwani w każdej z nich są parametrami modelu. Bardzo istotne z punktu widzenia elastyczności modelu jest to, że nie przyjmuje się tutaj żadnych warunków dotyczących tras (spójność tras, cykliczność). To podejście umożliwia także już na etapie budowy modelu (procesu generowania tras) uwzględnianie wielu dodatkowych ograniczeń i odrzucanie niedopuszczalnych tras.

W celu uwzględnienia w wybranym modelu przesyłek dostarczanych według taryfy opisywanej wcześniej jako zależnej od odległości i wielkości przesyłki w modelu należy rozważyć dodatkowe trasy. W tych trasach przesyłki będą dostarczane wyłącznie do jednego odbiorcy, a koszt ich realizacji będzie równy opłacie za dostarczenie przesyłki. W samym modelu spowoduje to zwiększenie liczby zmiennych decyzyjnych  $x_j$ . Wartość współczynnika funkcji celu dla nowych zmiennej  $x_j$  będzie równa opłacie za dostawę. Natomiast współczynnik  $a_{ij}$  dla nowych tras przyjmie wartość 1 wyłącznie w wierszu dotyczącym odbiorcy, do którego będzie realizowana dostawa.

Przesyłki, których koszt dostawy wyznaczany jest na podstawie długości trasy (czyli według drugiego typu taryfy), mogą zostać uwzględnione w modelu analogicznie jak przesyłki pierwszego typu, z tą jednak różnicą, że współczynnik  $a_{ij}$  może przyjąć war-

tość 1 w więcej niż jednym ograniczeniu. Dzieje się tak, ponieważ w jednej trasie może być dostarczonych więcej niż jedna przesyłka.

W analizowanym przypadku warto rozważyć dodatkowo ograniczenie dotyczące zadanej ilości zamówionych usług transportowych. W wielu sytuacjach możliwość uzyskania odpowiedniego poziomu cen podczas współpracy przedsiębiorstwa ze spedytorem wymaga zamawiania zleceń transportowych o odpowiedniej wartości  $P$ .

W dalszej części na podstawie wcześniej przytoczonego sformułowania Balinskiego i Quandta zostanie zaproponowany model wyznaczania tras dostaw w warunkach różnych taryf transportowych. Przyjmijmy, że  $H = \{Z_1, \dots, Z_m, Z_{m+1}, \dots, Z_{m'}\}$  oznacza zbiór wszystkich możliwych tras dostaw spełniających warunki zadania. Trasy od 1 do  $m$  to trasy opłacane według taryfy zależne od odległości i wielkości przesyłki, natomiast trasy od  $m+1$  do  $m'$  to trasy rozliczane według odległości przebytej celem zrealizowania dostawy. Symbolem  $w_j^*$  oznaczono wagę trasy  $Z_j$ . Ponadto parametr  $a_{ij}$  oznacza przynależność odbiorcy  $i$  do trasy  $j$ . Przyjmuje on wartość 1, jeśli odbiorca  $i$  jest obsługiwany w trasie  $j$  lub 0 w przeciwnym przypadku. Dla każdej trasy z pierwszej grupy (tj. rozliczanych według odległości i wielkości dostawy) wartość parametru  $a_{ij}$  może przyjąć wartość 1 wyłącznie w przypadku jednego odbiorcy. W przypadku tras z drugiej grupy (tj. trasy rozliczane zależnie od długości) parametr  $a_{ij}$  może przyjąć wartość 1 dla więcej niż jednego odbiorcy. Zmienna decyzyjna  $x_j$  przyjmuje wartość 1 wtedy i tylko wtedy, gdy trasa  $j$  jest użyta. Propozycję modelu dla zagadnienia wyznaczania tras dostaw w warunkach różnych taryf transportowych prezentują wzory [26]-[30].

$$\min \sum_{j=1}^{m'} w_j^* x_j \quad [26]$$

przy warunkach

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j = 1 \quad \text{dla każdego } i \in N \quad [27]$$

$$\sum_{j=m+1}^{m'} x_j = k \quad [28]$$

$$\sum_{j=1}^m w_j^* x_j \geq P \quad [29]$$

$$x_j \in \{0,1\} \quad \text{dla każdego } j = 1, \dots, m \quad [30]$$

Ograniczenie [27] zapewnia, że każdy odbiorca będzie uwzględniony w rozwiązaniu dokładnie raz. Natomiast warunek [28] zapewnia, że w rozwiązaniu użytych będzie dokładnie  $k$  tras. Ograniczenie [28] w prezentowanym modelu powinno uwzględniać wyłącznie trasy realizowane według drugiego typu taryfy (tj. trasy opłacane zgodnie z długością przejazdu). Spowodowane jest to faktem, że dostawcy rozliczający się właśnie w taki sposób dysponują ograniczoną liczbą pojazdów i nie mogą zrealizować dowolnej liczby tras. Jeśli w zadaniu uwzględniamy kilku dostawców usług transportowych rozliczanych według drugiego typu taryfy, to opisywane tutaj ograniczenie należy wprowadzić dla każdego odbiorcy z tej grupy. Prawa strona ograniczenia będzie równa liczbie tras, jaką może zrealizować dany odbiorca.

Przedstawione podejście jest bardzo elastyczne. Pozwala ono uwzględniać nie tylko dwóch dostawców usług transportowych rozliczających się według różnych typów taryfy, ale także wybierać spośród wielu dostawców realizujących transport według różnych strategii (duża lub mała liczba odbiorców w trasie; użycie dużych, małych pojazdów itd.).

Zaprezentowany model został wykorzystany w analizie systemu dystrybucji i możliwości jego rozwoju w jednej z wrocławskich firm produkcyjnych z branży budowlanej. Gwałtowny wzrost zapotrzebowania na jej produkt na terenie całej Polski stał się powodem do rozpoczęcia przedstawionych dalej analiz (Hanczar, 2008).

Firma korzysta z usług dużej firmy spedycyjnej, która zapewnia transport jej produktów na terenie całego kraju. Koszt realizowanych przez firmę spedycyjną usług określany jest przez dyrekcję firmy jako wysoce zadowolający. Jednak ze względu na pojawiające się coraz częściej zamówienia określone jako priorytetowe dyrekcja rozważa podjęcie współpracy z przewoźnikiem, który będzie realizował przede wszystkim dostawy priorytetowe zgodnie z ustaleniami firmy. Podstawowym argumentem za podjęciem współpracy jest chęć podniesienia jakości obsługi klientów przez wprowadzenie możliwości zrealizowania dostawy w określonej porze dnia oraz przez zagwarantowanie zrealizowania dostawy.

W celu porównania różnych strategii dystrybucji zdefiniowano 3 warianty dystrybucji. Wariant I, w którym jedna z paczek (paczka priorytetowa) jest dostarczana przez nowego przewoźnika. Zgodnie z sugestią decydenta za paczkę priorytetową przyjęto w symulacji przesyłkę o największej wadze. Pozostałe paczki są dostarczane zgodnie ze standardowymi warunkami. Wariant II to wariant porównawczy i odpowiada on stosowanemu obecnie sposobowi dystrybucji. W planowaniu dostaw dla obu opisanych wariantów nie były potrzebne żadne procedury optymalizacyjne. Jako ostatnio rozważono wariant III, w którym trasa przesyłki priorytetowej jest rozszerzana o dodatkowych odbiorców paczek zwykłych celem zmniejszenia łącznych kosztów dostaw. Procedura ta uwzględnia ponadto maksymalną ładowność, maksymalną długość trasy oraz maksymalną liczbę dostaw w jednej trasie, jakie zostały ustalone z no-

wym przewoźnikiem. Wartości ten w analizowanej sytuacji wynoszą odpowiednio 2000 kg, 800 km oraz 5 dostaw. Do wyznaczenia optymalnego planu dostaw w wariancie III wykorzystano podejście zaprezentowane w tej części artykułu.

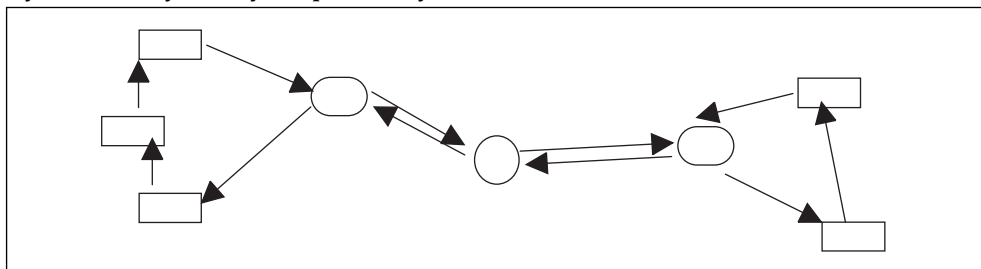
W wyniki przeprowadzonych analiz dla wybranego okresu 1 miesiąca wyznaczono koszty stosowania każdego z opisanych wariantów. Koszty realizacji wariantów odpowiednio I, II i III wyniosły 11 975 zł, 8 599 zł oraz 11 616 zł. Wartości te pokazują, że rozszerzenie dystrybucji o obsługę przesyłek priorytetowych spowoduje znaczny wzrost kosztów dostaw. Widać także, że oszczędności wynikające z ewentualnego łączonego dostarczania z przesyłką priorytetową przesyłek zwykłych są nieznaczne.

### 3.3. Wyznaczanie tras dostaw w sieci wielopoziomowej

W ostatniej części rozważymy proces wyznaczanie tras pojazdów w wielopoziomowej sieci dystrybucyjnej. W praktyce bardzo często spotyka się sytuacje, w których dostawy realizowane są za pomocą dwóch środków transportu o różnych ładownościach. Im większy dystans, tym bardziej opłacalny jest przewóz większej liczby towarów jednorazowo. I odwrotnie – im mniejszy dystans i większe rozproszenie, tym lepsze efekty daje korzystanie ze środków transportu o mniejszych ładownościach.

System dystrybucyjny analizowany w dalszej części rozważań składa się z dwóch poziomów. Nie ogranicza to jednak ogólności prezentowanego dalej rozumowania wyłącznie do dwupoziomowej sieci dystrybucyjnej. Przyjęto dodatkowe założenie odnośnie sposobu realizowania dostaw – i tak na pierwszym poziomie systemu dystrybucji towary są dostarczane do jednej lokalizacji pośredniej (np. regionalnego centrum dystrybucji). Następnie na drugim poziomie towary są rozwożone do odbiorców końcowych. Na poziomie pierwszym realizowane trasy są trasami wyłącznie do jednej lokalizacji, natomiast na poziomie drugim towary są dostarczane w trasach do wielu odbiorców. Przykładowy system dystrybucji w prezentowanej sytuacji przedstawia rysunek 3.

**Rysunek 3. Przykładowy dwupoziomowy**



Źródło: Opracowanie własne.



Na rysunku 3 okręgiem oznaczono centrum dystrybucji, prostokątami z zaokrąglonymi rogami regionalne centra dystrybucji, natomiast prostokąty odpowiadają odbiorcom końcowym. Strzałki prezentują wykorzystywane połączenia celem zrealizowania dostaw.

Do wyznaczenia optymalnego planu dystrybucji dla tak przedstawionego systemu dystrybucji można posłużyć się modyfikacją zaprezentowanego wcześniej modelu przepływu pojazdów dla zagadnienia VRP. W modelu tym analogicznie jak poprzednio wykorzystano zmienną binarną  $x_{ij}^k$ , której wartość 1 oznacza, że odcinek  $(i, j)$  należy do trasy pojazdu  $k$ , w przeciwnym wypadku zmienna ta przyjmuje wartość 0. Główna modyfikacja, której celem jest dostosowanie modelu do nowego systemu dystrybucji, będzie polegać na podzieleniu zbioru odbiorców  $N$  na trzy podzbiory. Pierwszy z nich oznaczony  $N^0$  składa się z jednego elementu, tj. lokalizacji centrum dystrybucji oznaczonego indeksem 0. Kolejny to podzbiór oznaczony  $N''$ , który zawiera wszystkie pośrednie lokalizacje regionalnych centrów dystrybucji. Ostatni zbiór oznaczony jako  $N'''$  to lokalizacje odbiorców końcowych. Ponadto symbolem  $N^0$  oznaczono sumę wszystkich trzech wprowadzonych zbiorów, tj.  $N^0, N''$  oraz  $N'''$ . Model wyznaczenia planu dostaw w dwupoziomym systemie dystrybucyjnym zapisać można wzorami [31]-[38].

$$\min \sum_{i \in N^0} \sum_{j \in N^0} w_{ij} \sum_{k \in K} x_{ij}^k \quad [31]$$

przy założeniach

$$\sum_{i \in N'' \cup N'''} \sum_{k \in K} x_{ij}^k + \sum_{i \in N'' \cup N'''} \sum_{k \in K} x_{ji}^k = 2 \quad \text{dla każdego } j \in N'' \quad [32]$$

$$\sum_{i \in N'} \sum_{k \in K} x_{ij}^k + \sum_{i \in N'} \sum_{k \in K} x_{ji}^k = 2 \quad \text{dla każdego } j \in N'' \quad [33]$$

$$\sum_{i \in N'''} \sum_{k \in K} x_{ij}^k + \sum_{i \in N'''} \sum_{k \in K} x_{ji}^k = 2 \quad \text{dla każdego } j \in N'' \quad [34]$$

$$\sum_{i \in N^0} x_{im}^k + \sum_{j \in N^0} x_{mj}^k = 2 \quad \text{dla każdego } \begin{matrix} k \in K \\ m \in N''' \end{matrix} \quad [35]$$

$$\sum_{i \in N^0} x_{im}^k + \sum_{j \in N^0} x_{mj}^k = 4 \quad \text{dla każdego } \begin{matrix} k \in K \\ m \in N'' \end{matrix} \quad [36]$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} \sum_{k \in K} x_{ij}^k \geq r(S) \quad \text{dla każdego } S \subseteq N''', S \neq \emptyset \quad [37]$$

$$x_{ij}^k \in \{0, 1\} \quad \text{dla każdego } i \in N^0, j \in N^0, k \in K \quad [38]$$

W przedstawionym modelu funkcja celu wyrażona wzorem [31] gwarantuje minimalizację łącznych kosztów dystrybucji. Ograniczenie [32] zapewnia, że każdy odbiorca końcowy zostanie odwiedzony dokładnie raz. Ograniczenia [33] i [34] zapewniają odpowiednio, że każdy odbiorca pośredni zostanie odwiedzony dokładnie raz w trasach do odbiorców końcowych oraz że zostanie uwzględniony w trasie z lokalizacji dostawcy. Ciągłość trasy dla każdego pojazdu została zapewniona dzięki ograniczeniu [35] i [36]. Jeśli pojazd dojeżdża do danego odbiorcy lub odbiorcy pośredniego, to musi go opuścić z tą różnicą, że odbiorcy pośredni są obsługiwani przez 2 pojazdy. Ostatnie ograniczenie [38] zapewnia, że dla każdego pojazdu krawędzie wybrane do rozwiązania tworzą spójne cykle.

Analogicznie jak w przypadku zastosowania sformułowania tego typu do rozwiązywania klasycznego VRP także tutaj procedura znajdowania rozwiązania wymaga skorzystania z algorytmu *branch-and-cut*, który został opisany w pierwszej części artykułu. Przeprowadzone testy obliczeniowe wskazały, że podejście to pozwala na rozwiązywanie zadań o podobnej wielkości co klasyczne zadania VRP. Można zatem stwierdzić, że uwzględnienie dodatkowych poziomów sieci dystrybucyjnej, w których towary są dostarczane w dostawach bezpośrednich nie wpływa znacząco na trudność wyznaczenia rozwiązania. Podejście to nie zostało dotychczas zweryfikowane w zastosowaniu praktycznym.

#### 4. Podsumowanie

Jak pokazano w artykule, problem wyznaczania tras pojazdów, mimo że zdefiniowany przed ponad pół wiekiem stanowi wciąż interesujący obszar badawczy. Z uwagi na silne powiązanie tego zagadnienia z praktyką często rozwój koncepcji w obszarze zarządzania przedsiębiorstwem wymusza modyfikację lub rozszerzanie znanych już sformułowań VRP. W dalszej kolejności pojawia się konieczność opracowania odpowiednich metod rozwiązywania nowych sformułowań.

W artykule zostały przedstawione wybrane, najistotniejsze zdaniem autora, kierunki rozwoju modeli w tym obszarze. Oprócz przedstawionych tu głównych nurtów badań istnieje jeszcze wiele specjalistycznych wersji tego zagadnienia. Poczynając od bardziej technicznych polegających np. na opracowaniu metody rozwiązywania VRP przez komputery wieloprocesorowe, a skończywszy na specyficznych aspektach merytorycznych, jak planowanie tras służących do radiowego odczytu liczników zużycia gazu, gdzie obok kosztu maksymalizowane jest prawdopodobieństwo odczytu liczników.

W przypadku przedstawionych w artykule zagadnień planowania tras przepływu zapasów oraz wyboru dostawców usług transportowych obok propozycji sformułowań zostały zaprezentowane ich przykładowe zastosowania. Niestety, nie wskazują

one jednoznacznie, czy stosowanie modeli optymalizacyjnych jest zasadne. Takie wyniki jeszcze bardziej utrudniają badania w analizowanym obszarze, a szczególnie ich użycie w praktyce. Jak przekonać decydenta do poniesienia często wysokich kosztów wdrożenia modeli decyzyjnych, jeśli rozwiązania uzyskane dla zadań testowych jednoznacznie nie wskazują na możliwość wysokiego zwrotu z takiej inwestycji. Wyłania się tutaj nowy istotny obszar badawczy, w którym głównym celem będzie opracowanie metod wstępnej oceny efektów zastosowania algorytmów rozwiązywania VRP.

## Bibliografia

- Adenso-Diaz, B., Gonzalez, M., Garcia, E. 1998 *A hierarchical approach to managing dairy routing*. „Interfaces” 28: 21-31.
- Agarwal, Y., Mathur, K., Salkin, H. 1989. *A set-partitioning-based exact algorithm for the vehicle routing problem*. „Networks” 19: 731-749.
- Altinkemer, K., Gavish, B. 1991. *Parallel savings based heuristic for the delivery problem*. „Operations Research” 39: 456-469.
- Balinski, M., Quandt, R. 1964. *On an integer program for a delivery problem*. „Operations Research” 12: 300-304.
- Bell, W., Dalberto, L., Fisher, M., Greeneld, A., Jaikumar, R., Kedia, P., Mack, R., Prutzman, P. 1983. *Improving the distribution of industrial gases with an on-line computerized routing and scheduling optimizer*. „Interfaces” 6.
- Beltrami, E., Bodin, L. 1974. *Networks and vehicle routing for municipal waste collection*. „Networks” 4: 65-94.
- Blasum, U., Hochstättler, W. 2000. *Application of the Branch and Cut Method to the Vehicle Routing Problem*. Technical Report zaik 2000-386, Centre of Applied Computer Science, Uniwersytet Kołowski, Niemcy (dostępne <http://www.zaik.uni-koeln.de/paper>).
- Caprara, A., Fischetti, M. 1997. *Branch-and-cut algorithms*. W: Dell’Amico M., Maffioli F., Martello S. (red.), *Annotated Bibliographies in Combinatorial Optimization*, New York: Wiley, 45-64.
- Chien, T., Balakrishnan, A., Wong, R. 1989. *An integrated inventory allocation and vehicle routing problem*. „Transportation Science” 2.
- Christofides, N., Elion, S. 1969. *An Algorithm for the Vehicel Dispatching Problem*. „Operational Research Quarterly” 20: 309-318.
- Clarke, G., Wright, J. 1964. *Scheduling of vehicles from central depot to a number of delivery points*. „Operations Research” 12: 568-581.
- Cline, A., King, D., Meyering, J. 1992. *Routing and scheduling Coast Guard buoy tenders*. „Interfaces” 22: 56-72.
- Dantzig, G., Ramser, J. 1959. *The truck dispatching problem*. „Management Science” 6: 80-91.
- De Backer, B., Furnon, V., Shaw, P., Kilby, P., Prosser, P., 2000. *Solving Vehicle Routing Problems Using Constraint Programming and Metaheuristics*. „Journal of Heuristics” 6: 501-523.
- Desrochers, M., Desrosiers, J., Solomon, M., 1992. *A new optimization algorithm for the vehicle routing problem with time windows*. „Operations Research” 40: 342-354.

- Fiala Timlin, M., Pulleyblank, W. 1992. *Precedence constrained routing and helicopter scheduling: Heuristics desing*. „Interfaces” 22: 100-111.
- Fisher, M.L., Jaikumar, R. 1981. *A generalized assignment heuristic for vehicle routing*. „Networks” 11: 109-124
- Fisher, M., 1988. *Optimal solution of vehicle routing problems using k-tree problem*. „Operations Research” 42: 626-642.
- Gaskell, T. 1967. *Bases for vehicle fleet scheduling*. „Operational Research Quarterly” 18: 281-295.
- Gillett, B., Miller, L. 1976. *A heuristic algorithm for the vehicle dispatch problem*. „Operations Research” 22: 340-349.
- Golden, B., Assad, A. 1988. *Vehicle Routing: Methods and Studies*. New York. Elsevier Science Publishers
- Golden, B., Assad, A., Dahl, R. 1984. *Analysis of a large scale vehicle routing problem with inventory component*. „Large Scale Systems” 7.
- Golden, B., Magnanti, T., Nguyen, H. 1977. *Implementing vehicle routing algorithms*. „Networks” 7: 113-148.
- Golden, G., Assad, A., Wasil, E. 2002. *Routing Vehicles in the Real World: Applications in the Solid Waste, Beverage, Food, Dairy and Newspaper Industries*. W: Toth P., Vigo D. *The Vehicle Routing Problem*. Philadelphia. Wiley, s 245-279.
- Gourley, G. 1998 *Distribution systems ease products down the road*. „Food Engineering” 7-8: 91.
- Greczyn, M. 1997. *Computers tackle Pennsylvania routes*. „Waste News” 27: 23.
- Hadjiconstantinou, E., Christofieds, N., Mingozzi, A. 1995. *A new exact algorithm for the vehicle routing problem based on q-paths and k-shortest paths relaxations*. „Annals of Operations Research” 61: 21-43.
- Hanczar, P. 2006. *Problemy w planowaniu dostaw w koncepcji uzupełniania zapasów sterowanego przez dostawcę*. Referat wygłoszony na Pierwszej Międzynarodowej Konferencji Logistycznej INTLOG 2006. Gdynia – Sztokholm.
- Hanczar, P. 2008. *Transport planning in conditions of different transport tariffs – application of integer programming*. W: „Total Logistics Management” 1: 25-33. Kraków. AGH Press.
- Hannon, D. 2005. *Best practices: Five key initiatives*. „Purchasing” 1.
- Laporte, G., Nobert, Y. 1987 *Exact algorithms for the vehicle routing problem*. „Annals of Discrete Mathematics” 31: 147-184.
- Larson, R., Minkoff, A., Gregory, P. 1988. *Fleet sizing and dispatching for the marine division on the New York City Departament of Sanitation*. W: Golden B., Assad A., *Vehicle Routing: Methods and Studies*. Amsterdam. Wiley, 395-423.
- Little, J.D.C, Murty, K.G., Sweeney, D.W., Karel, C., 1963. *An algorithm for the traveling salesman problem*. „Operations Research” 11: 972-989.
- Mans, J. 1997 *Downloading distribution*. „Dairy Foods” 8.
- Miller, D., 1995. *A matching based exact algorithm for capacitated vehicele routing problem*. „ORSA Journal of Computing” 7: 1-9.
- Mongelluzzo, B. 1998. *Shippers let vendors manage the stock: Wal-mart’s suppliers share in databases*. „Journal of Commerce and Commercial” 12A: 417.

- Padberg, M., Rinaldi, G., 1991. *A branch and cut algorithm for the resolution of largescale symmetric traveling salesman problems*. „SIAM Review” 33: 60-100.
- Paessens, H. 1988. *The savings algorithm for the vehicle routing problem*. „European Journal of Operations Research” 34: 336-344.
- Prutzman, P. 1983. *Improving the distribution of industrial gases with an on-line*
- Rich, J. 1999. *A Computational Study of Vehicle Routing Applications*. Praca doktorska. Rice University Houston.
- Sfiligoj, E. 1997. *One for the road*. „Beverage World” 11.
- Thienel, S., 1995. *ABACUS: A Branch and Cut System*. Praca doktorska, Universitaet zu Koeln.
- Waller, M., Johnson, M. E., Davis, T. 1999. *Vendor-managed inventory in the retail*.
- Wark, P., Holt, J. 1994. *A repeated matching heuristic for the vehicle routing problem*. „Journal of Operational Research Society” 45: 1156-1167.
- Wren, A., Holliday, A. 1972. *Computer scheduling of vehicles from one or more depots to a number of delivery points*. „Operational Research Quarterly” 23: 333-344.
- Yellow, P. 1970. *A computational modification to the savings method of vehicle scheduling*. „Operational Research Quarterly” 21: 281-283.