METODY ELECTRE W DETERMINISTYCZNYCH I STOCHASTYCZNYCH PROBLEMACH DECYZYJNYCH

Maciej Nowak*
Akademia Ekonomiczna w Katowicach

Wstęp

Relacja preferencji indywidualnej pozostaje jednym z głównych zagadnień podejmowanych w naukach społecznych od ponad pięćdziesięciu lat. Intensywne badania prowadzone są zarówno przez ekonomistów, jak i psychologów zajmujących się wyborami społecznymi, ocenianiem i wartościowaniem. Prace takich badaczy jak Arrow (1951), Simon (1982) czy Kahneman i Tversky (1979) wywarły silny wpływ na badaczy pracujących nad zagadnieniami z zakresu podejmowania decyzji i doprowadziły do sformułowania nowego paradygmatu, w którym punkt ciężkości rozważań przesuwa się z prób odpowiedzi na pytanie o to, jaką decyzję należy podjąć, na zagadnienia związane z lepszym rozumieniem problemu decyzyjnego. W tym ujęciu analizę decyzji zastępuje wspomaganie decyzji, w którym istotną rolę odgrywa analityk wspierający decydenta w formułowaniu wariantów decyzyjnych, konstruowaniu kryteriów oceny wariantów oraz wyborze formy agregacji ocen dokonywanych względem poszczególnych kryteriów. W nowym podejściu podkreśla się wielokryterialny charakter problemu decyzyjnego. Zwraca się uwagę na fakt, że decyzje zwykle mają prowadzić do zaspokojenia całego zbioru potrzeb decydenta, a co za tym idzie nie jest ani uzasadnionym, ani praktycznym sprowadzanie porównania wariantów do porównania ich ocen względem pojedynczego kryterium.

* Maciej Nowak, Katedra Badań Operacyjnych, Akademia Ekonomiczna w Katowicach ul. 1 Maja 50, 40-287 Katowice, e-mail: nomac@ae.katowice.pl

Jednym z najciekawszych nurtów, które pojawiły się w nauce o podejmowaniu decyzji w ciągu ostatnich 30 lat, jest tzw. europejska (zwana też francuską) szkoła podejmowania decyzji, której głównym animatorem jest prof. Bernard Roy. Metodologia proponowana przez badaczy z tego kręgu ukształtowała się niejako w opozycji do klasycznej analizy decyzji opartej na teorii użyteczności. Jak pisze Roy (1990), czynnikiem skłaniającym go do podjęcia badań, które doprowadziły do sformułowania nowej metodologii, była rezerwa wobec normatywnego charakteru klasycznej teorii podejmowania decyzji oraz wątpliwości co do pewnych niejawnych jej założeń, określanych przez niego jako postulat rzeczywistości pierwszego rzędu, postulat decydenta i postulat optimum. Pierwszy z nich mówi, że wspomaganie decyzji oparte jest na faktach, które są opisane przez dane istniejące poza analizą i niezależnych od niej oraz na tyle stabilnych, że można mówić o dokładnym stanie lub dokładnej wartości ich charakterystyk, które uważa się za istotne. Postulat decydenta z kolei oznacza, że każda decyzja podejmowana jest przez dobrze zdefiniowanego decydenta, którego preferencje są zgodne ze zbiorem pewnych aksjomatów. Wreszcie postulat optimum stwierdza, że dla każdego problemu decyzyjnego istnieje co najmniej jedna decyzja optymalna, którą można ustalić, jeżeli dysponuje się odpowiednimi środkami. Badacze z kręgu europejskiej szkoły podejmowania decyzji podkreślają, że w przypadku realnych sytuacji decyzyjnych powyższe postulaty spełnione bywają niezmiernie rzadko. Charakterystycznymi cechami problemów, z którymi mamy do czynienia w rzeczywistości, jest towarzysząca im niepewność, nieprecyzyjność, niestałość oraz nieokreśloność. Dotyczy to zarówno danych, na których opiera się analiza, jak i ocen oraz preferencji uczestników procesu decyzyjnego.

Badania prowadzone przez badaczy szkoły europejskiej z jednej strony doprowadziły do opracowania nowej metodologii podejmowania decyzji, z drugiej zaś zaowocowały skonstruowaniem całego szeregu technik wielokryterialnych znajdujących szerokie zastosowanie w różnorodnych problemach decyzyjnych. Wyróżniają się wśród nich metody z rodziny ELECTRE. Dążąc do jak najbardziej realistycznego odwzorowania analizowanego problemu decyzyjnego, wprowadza się w nich wartości progowe równoważności i preferencji. Celem takiego podejścia jest zbudowanie na zbiorze wariantów decyzyjnych relacji przewyższania, która jest relacją częściową preferencji globalnej. Taki sposób postępowania pozostawia miejsce sytuacjom nieporównywalności tłumacząc to np. brakiem wystarczających informacji do określenia sytuacji preferencyjnej.

Pierwsza z metod ELECTRE zaprezentowana została w roku 1966. Od tego czasu zaproponowano cały szereg technik dostosowanych do specyfiki różnego rodzaju problemów decyzyjnych, począwszy od zagadnienia wyboru najlepszego wariantu decyzyjnego (ELECTRE I i ELECTRE IS), przez problem sortowania (ELECTRE TRI), po zagadnienie porządkowania wariantów decyzyjnych (ELECTRE II, ELECTRE III, ELECTRE IV). Celem niniejszej pracy jest przedstawienie możliwości wykorzystania tych metod zarówno w deterministycznych, jak i stochastycznych problemach wielokryterialnego podejmowania decyzji. W pracy przedstawiono również proponowany przez autora niniejszej pracy algorytm pozwalający na wykorzystanie koncepcji pseudokryterium w przypadku, gdy oceny wariantów mają postać rozkładów prawdopodobieństwa. Praca skonstruowana została w sposób następujący. W rozdziale drugim przedstawiono podstawowe założenia metodologiczne europejskiej szkoły wielokryterialnego podejmowania decyzji. Omówiono relacje binarne wykorzystywane w modelowaniu preferencji oraz przedstawiono koncepcję pseudokryterium. Następna część pracy poświęcona jest ogólnej prezentacji metod z rodziny ELECTRE. Z kolei w rozdziałach czwartym i piątym przedstawiono w sposób bardziej szczegółowy metody ELECTRE I i ELECTRE III. W części następnej zaprezentowano sposób wykorzystania tych metod w stochastycznych, dyskretnych problemach decyzyjnych. W rozdziale tym omówiono krótko metodę zaproponowaną przez Zarasia i Martela (1994) oraz przedstawiono algorytm proponowany przez autora niniejszej pracy. Ostatnią część pracy stanowi zakończenie, w którym przedstawiono pokrótce obszary zastosowań omawianych procedur.

Podstawowe założenia metodologiczne europejskiej szkoły podejmowania decyzji

Klasyczna teoria podejmowania decyzji zakłada, że porównując dwa warianty decyzyjne *a* i *b* możemy mieć do czynienia z jedną i tylko jedną z następujących sytuacji:

- *a* jest uznawane za równoważne *b*,
- *a* jest preferowane w stosunku do *b*,
- *b* jest preferowane w stosunku do *a*.

Wg Roya, założenie to jest nieuzasadnione i sprawia spore trudności we wspomaganiu decyzji. W zamian proponuje on rozszerzenie zbioru podstawowych sytuacji preferencyjnych w taki sposób, by obejmował sytuacje równoważności, preferencji silnej, preferencji słabej oraz nieporównywalności. Dwie pierwsze sytuacje rozumiane są podobnie jak w podejściu klasycznym: istnieją uzasadnione przesłanki pozwalające na przyjęcie równoważności obu wariantów lub silnej preferencji jednego z nich. Z kolei preferencja słaba rozumiana jest jako sytuacja, gdy istnieją istotne przesłanki, które z jednej strony osłabiają silną preferencję jednego z wariantów, z drugiej jednak nie są wystarczające do tego, by uzasadnionym było przyjęcie hipotezy o równoważności obu wariantów lub preferencji drugiego z nich. Natomiast z nieporównywalnością wariantów mamy do czynienia wówczas, gdy brak jest wystarczających przesłanek do przyjęcia, że zachodzi którakolwiek z pozostałych sytuacji podstawowych. Z wymienionymi sytuacjami podstawowymi związane są relacje binarne oznaczane odpowiednio przez I (równoważność), P (preferencja silna), Q (preferencja słaba) oraz R (nieporównywalność). Powyższe relacje mogą być wykorzystywane w modelowaniu preferencji na dwa sposoby. W pierwszym wypadku dla każdej pary wariantów a, b należących do zbioru wariantów decyzyjnych A określamy jedną i tylko jedną z czterech sytuacji podstawowych. Oznacza to, że za prawdziwe przyjmujemy dokładnie jedno z następujących stwierdzeń:

$$a \,\mathrm{I}\, b, \quad a \,\mathrm{P}\, b, \quad b \,\mathrm{P}\, a, \quad a \,\mathrm{Q}\, b, \quad b \,\mathrm{Q}\, a, \quad a \,\mathrm{R}\, b$$

Drugi sposób postępowania polega na przyjęciu, że dla każdej pary wariantów określić można jedną, dwie lub trzy sytuacje podstawowe, bez możliwości rozróżnienia, która z nich ma miejsce. Roy definiuje dodatkowo pięć sytuacji zgrupowanych określanych jako brak preferencji (równoważność lub nieporównywalność), preferencja w szerokim sensie (silna lub słaba preferencja), przypuszczenie preferencji (słaba preferencja lub równoważność), K-preferencja (silna preferencja lub nieporównywalność) oraz przewyższanie. Relacje binarne odpowiadające tym sytuacjom oznaczane są odpowiednio przez $\sim$, $\succ$, J, K oraz S. W metodologii szkoły europejskiej szczególną rolę odgrywa relacja przewyższania odpowiadająca istnieniu ważnych przesłanek, które uzasadniają preferencję albo przypuszczenie preferencji jednego z dwóch wariantów, lecz bez możliwości rozróżnienia sytuacji silnej i słabej preferencji oraz równoważności.

Porządkowanie zbioru wariantów decyzyjnych wymaga określenia funkcji kryterium, która w sposób numeryczny pozwala wyrazić preferencje decydenta. Według Roya, funkcja $g(a)$ może pełnić rolę kryterium, jeżeli odzwierciedla sytuację przewyższania, co oznacza, że spełniony jest warunek:

$$g(b) \geq g(a) \quad \Rightarrow \quad b\, S_g\, a$$

Rozróżnienie sytuacji równoważności, preferencji słabej i silnej możliwe jest dzięki wykorzystaniu funkcji progowych związanych z kryterium g nazywanych progami równoważności i preferencji. Załóżmy, że wartość kryterium dla wariantu b nie jest niższa niż wartość tej funkcji dla wariantu a. Próg równoważności, oznaczany przez q_g, definiowany jest w ten sposób, że w przypadku, gdy różnica między wartościami $g(b)$ i $g(a)$ nie jest wyższa niż wartość progu, to przyjmujemy równoważność wariantów b i a, w przeciwnym zaś przypadku przyjmujemy, że zachodzi preferencja w szerokim sensie:

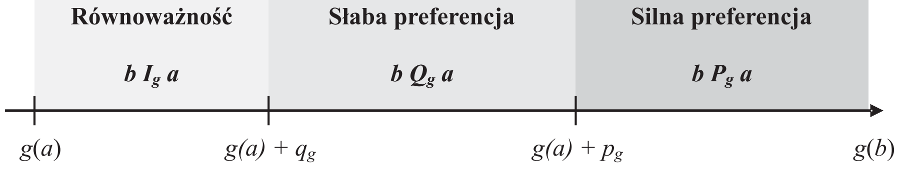
$$\forall a,b \in A, \quad 0 \le g(b) - g(a) \le q_g \Rightarrow b\, I_g\, a$$
$$\text{i} \quad g(b) - g(a) > q_g \Rightarrow b \succ_g a$$

Z kolei próg preferencji konstruowany jest tak, by w przypadku, gdy różnica między wartościami $g(b)$ i $g(a)$ jest wyższa niż wartość progu, można było przyjąć silną preferencję wariantu b w stosunku do a, a w przeciwnym przypadku przypuszczenie preferencji:

$$\forall a,b \in A, \quad g(b) - g(a) > p_g \Rightarrow b\, P_g\, a$$
$$\text{i} \quad 0 \le g(b) - g(a) \le p_g \Rightarrow b\, J_g\, a$$

W praktyce najczęściej przyjmuje się, że progi przybierają wartości stałe lub są zdefiniowane jako funkcja liniowa wartości kryterium jednego z porównywanych wariantów.

Rysunek 1. Strefy równoważności, słabej i silnej preferencji w przypadku, gdy $g(b) \ge g(a)$



Z przytoczonych powyżej definicji wywnioskować można, że:

a) $0 \le q_g \le p_g$

b) $\forall a,b \in A, \quad q_g < g(b) - g(a) \le p_g \Leftrightarrow bQ_g a$

W oparciu o koncepcję progów równoważności i preferencji definiuje się pseudokryterium. Jest to taka funkcja kryterialna g, z którą są związane dwie funkcje progowe q_g i p_g, niemalejące i takie, że $\forall\ a, b \in A$:

$$g(b) \ge g(a) \Rightarrow \begin{cases} b\, I_g a & \text{jeżeli} \quad g(b) - g(a) \le q_g \\ b Q_g a & \text{jeżeli} \quad q_g < g(b) - g(a) \le p_g \\ b\, P_g a & \text{jeżeli} \quad p_g < g(b) - g(a) \end{cases}$$

Powyższą zależność w sposób graficzny przestawiono na rys. 1.

Przykład 1:

Założmy, że wartość funkcji kryterialnej dla wariantu a wynosi 75, zaś progi równoważności i preferencji przyjmują wartości stałe równe odpowiednio: 5 i 20. Przeanalizujmy, z jaką sytuacją będziemy mieli do czynienia, jeżeli funkcja kryterium dla wariantu b przyjmuje kolejno wartości równe 78, 90, 120:

a) $g(b) = 78$: w tym wypadku należy przyjąć, że mamy do czynienia z równoważnością wariantów a i b, gdyż $g(b) - g(a) \leq q_g$ ($78 - 75 \leq 5$);

b) $g(b) = 90$: przyjmujemy, że mamy do czynienia ze słabą preferencją wariantu b w stosunku do a, gdyż $q_g < g(b) - g(a) \leq p_g$ ($5 < 90 - 75 \leq 20$);

c) $g(b) = 120$: zachodzi przypadek silnej preferencji wariantu b w stosunku do a, gdyż $g(b) - g(a) > p_g$ ($120 - 75 > 20$).

W przypadku problemu wielokryterialnego powstaje problem, w jaki sposób należy agregować oceny cząstkowe ze względu na poszczególne kryteria tak, by możliwym było modelowanie preferencji globalnych decydenta. W proponowanej przez Roya koncepcji agregacji odpowiednikiem funkcji agregacji stosowanej w podejściu klasycznym jest zbiór warunków, które charakteryzują obecność lub nieobecność przewyższania. Warunki te przyjmują zwykle formę testów. Dzięki temu możliwym jest takie modelowanie preferencji, które akceptuje możliwość wystąpienia nieporównywalności. W podejściu tym przyjmuje się również założenie o ograniczonej kompensacji oznaczające, że możliwa jest taka sytuacja, w której przewaga wariantu a nad wariantem b ze względu na jedno z kryteriów powoduje, że hipotezę o przewyższaniu wariantu a przez wariant b należy odrzucić nawet wówczas, gdy jest on silnie preferowany ze względu na wszystkie pozostałe kryteria. Do analizy tego typu sytuacji wykorzystywany jest próg weta, oznaczany jako v_j.

Przykład 2:

Przyjmijmy, że dwa warianty a i b są porównywane ze względu na cztery kryteria. Odpowiednie dane podane są w tabeli 1.

Tabela 1. Dane do przykładu 2

Kryterium	$g_j(a)$	$g_j(b)$	q_j	p_j	v_j
1	75	120	5	20	50
2	0,75	0,90	0,03	0,10	0,25
3	1640	2112	100	250	500
4	18	9	2	4	8

W prezentowanym przykładzie mamy do czynienia z sytuacją, gdy wariant *b* będzie silnie preferowany w stosunku do wariantu *a* ze względu na kryteria o numerach 1, 2 i 3. W przypadku kryterium nr 4 mamy jednak do czynienia z silną preferencją w stosunku do wariantu *a*. Co więcej, różnica między ocenami wariantu *a* i *b* ze względu na to kryterium przekracza wartość progu weta. Oznacza to, że niezależnie od relacji, jakie zachodzą między wariantami ze względu na pozostałe kryteria, hipotezę o przewyższaniu wariantu *a* przez wariant *b* należy odrzucić. W takim wypadku będziemy mieli do czynienia z nieporównywalnością wariantów *a* i *b*.

Rodzina metod ELECTRE

Omówione powyżej pokrótce podstawowe założenia metodologiczne były podstawą do opracowania całego szeregu technik wielokryterialnych. Do najbardziej znanych i szeroko stosowanych należą metody z rodziny ELECTRE. Wybór konkretnej metody zależy z jednej strony od rodzaju problemu, z jakim mamy do czynienia, z drugiej zaś od rodzaju danych, jakimi dysponujemy. Roy (1990) wyróżnia cztery problematyki wzorcowe: wyboru, sortowania, porządkowania i opisu wielokryterialnego. W przypadku pierwszej z nich problem formułowany jest w kategoriach wyboru „najlepszego" wariantu. Problematyka sortowania nastawiona jest na zagadnienie przydziału wariantów do pewnych kategorii, z których każda ma samowystarczalną definicję. Z kolei problematyka porządkowania polega na ukierunkowaniu badań na uporządkowanie wariantów według malejącej preferencji. Wreszcie w przypadku problematyki opisu badania nakierowane są na opis wariantów decyzyjnych i ich konsekwencji. Listę metod z rodziny ELECTRE wraz z informacją o rodzajach problematyk, w których mogą one być wykorzystywane, przedstawia tabela 2.

Tabela 2. Metody z rodziny ELECTRE

Metoda	Problematyka	Parametry metody		
		Progi równoważności i preferencji	wagi	weto
ELECTRE I	wyboru	Nie	Tak	Tak
ELECTRE IS	wyboru	Tak	Tak	Tak
ELECTRE TRI	sortowania	Tak	Tak	Tak
ELECTRE II	porządkowania	Nie	Tak	Tak
ELECTRE III	porządkowania	Tak	Tak	Tak
ELECTRE IV	porządkowania	Tak	Nie	Tak

Podstawową zasadą wykorzystywaną w metodach ELECTRE jest porównywanie każdego wariantu z wszystkimi pozostałymi. W ten sposób sprawdza się, czy istnieją przesłanki pozwalające na uznanie danego wariantu za mający przewagę nad każdym z pozostałych. Hipotezę „*b* jest w relacji przewyższania z *a*" weryfikuje się za pomocą dwóch warunków: zgodności oraz braku niezgodności. Poniżej opisano metody ELECTRE I i ELECTRE III. Opis pozostałych metod znaleźć można w pracy Roy i Bouyssou (1993).

Metoda ELECTRE I

Niech F oznacza spójną rodzinę kryteriów $g_1(a)$, $g_2(a)$, ..., $g_m(a)$, czyli zbiór kryteriów spełniający warunki wyczerpywalności, spójności oraz nieredundancji. Przyjmujemy, że kryteria zdefiniowane są w ten sposób, że wyższa wartość kryterium jest preferowana w stosunku do wartości niższej. Każdemu kryterium przypisujemy liczbę dodatnią k_j odzwierciedlającą ważność, jaką chcemy mu przypisać. Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$$C(b \text{ S } a) = \{\, j \in F\colon g_j(b) \geq g_j(a) \,\}$$

$$\forall C \subset F, k[C] = \sum_{j \in C} k_j$$

W metodzie ELECTRE I warunki zgodności i niezgodności sformułowane są następująco. Warunek zgodności:

$$\frac{k[C(b\ S\ a)]}{k[F]} \geq s$$

gdzie s oznacza próg zgodności ($s \in [0{,}5;\ 1]$).

Warunek braku niezgodności

$$\forall\, j \in F,\ g_j(b) + v_j \geq g_j(a)$$

gdzie v_j oznacza próg weta dla kryterium j.

Warunek braku niezgodności oznacza, że hipotezę „b jest w relacji przewyższania z a" należy odrzucić w sytuacji, gdy dla przynajmniej jednego z kryteriów różnica między wartością kryteriów dla wariantów a i b jest większa niż wartość progowa v_j.

Postępowanie w metodzie ELECTRE I opisać można następująco:

1. Dla każdej pary wariantów a i a' obliczamy wskaźnik zgodności:

$$c(b,a) = \frac{k[C(b\,S\,a)]}{k[F]}$$

2. Wyznaczamy zbiór zgodności C_s:

$$C_s = \{\ (b,\ a) \in A \times A\colon c(b,\ a) \geq s \wedge s \in [0{,}5;\ 1]\}$$

3. Wyznaczamy zbiór niezgodności:

$$D_v = \{\ (b,\ a) \in A \times A\colon \exists j\ g_j(b) + v_j < g_j(a)\ \}$$

4. Wyznaczamy relację przewyższania zdefiniowaną następująco:

$$S(s,v) = C_s \cap \overline{D}_v$$

gdzie : $\overline{D}_v = (A \times A) \setminus D_v$

Zdefiniowanie relacji przewyższania pozwala na skonstruowanie grafu zależności między wariantami, a tym samym na wyznaczenie wariantów, które mogą być zaproponowane decydentowi do rozważenia.

Przykład 3:

Rozpatrujemy problem osoby zamierzającej wynająć mieszkanie. Agencja nieruchomości proponuje osiem lokali wstępnie zakwalifikowanych jako spełniające wymagania sformułowane przez klienta. Przy wyborze klient kieruje się następującymi kryteriami:

g_1 – wysokość miesięcznego czynszu (w zł),

g_2 – powierzchnia użytkowa (w m^2),

g_3 – wyposażenie lokalu (oceniane na skali od 1 do 5),

g_4 – kondygnacja, na której położony jest lokal (oceny na skali od 1 do 5: ocena najwyższa dla piętra 1 i 2, ocena 4 dla piętra 3, ocena 3 dla piętra 4, ocena 2 dla pięter wyższych od 4, ocena najniższa dla parteru),

g_5 – lokalizacja (oceniana na skali od 1 do 5),

g_6 – komunikacja (oceniana na skali od 1 do 5).

Tablicę ocen przedstawia tabela 3. W związku z faktem, że klient zainteresowany jest jak najniższą wartością kryterium g_1, oceny podane są w postaci liczb ujemnych.

Przyjmijmy, że po dyskusjach z klientem przyjęto następujące wartości współczynników wagowych: k_1 = 0,35, k_2 = 0,25, k_3 = 0,15, k_4 = 0,05, k_5 = 0,10, k_6 = 0,10. Oznacza to, że za najważniejsze kryterium uznano wysokość miesięcznego czynszu, drugim co do ważności jest powierzchnia użytkowa, kolejnym wyposażenie lokalu, jako równie ważne, uznano lokalizację i komunikację, zaś najmniej istotne kondygnację, na której położony jest lokal. Obliczone wartości współczynników zgodności przedstawia tabela 4. Z kolei w tabeli 5 zamieszczono informację o kryteriach, dla których stwierdzono, że nie jest spełniony warunek braku niezgodności.

Tabela 3. Tablica ocen dla przykładu 3

Warianty	Kryteria					
	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
a_1	-720	68,2	4	2	4	5
a_2	-640	63,1	2	3	5	4
a_3	-910	72,3	5	5	1	3
a_4	-540	66,5	1	2	5	3
a_5	-480	51,3	3	4	3	2
a_6	-390	48,7	4	1	4	5
a_7	-490	49,6	5	5	2	3
a_8	-830	79,1	3	4	3	1
Próg weta	300	20,0	3	3	3	3

Tabela 4. Wartości współczynników zgodności

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
a_1	1,00	0,50	0,55	0,55	0,60	0,65	0,45	0,70
a_2	0,50	1,00	0,55	0,40	0,45	0,40	0,45	0,55
a_3	0,45	0,45	1,00	0,55	0,55	0,45	0,55	0,30
a_4	0,50	0,70	0,55	1,00	0,45	0,40	0,45	0,55
a_5	0,40	0,55	0,45	0,55	1,00	0,30	0,70	0,75
a_6	0,70	0,60	0,55	0,60	0,70	1,00	0,55	0,70
a_7	0,55	0,55	0,75	0,65	0,30	0,45	1,00	0,65
a_8	0,30	0,45	0,70	0,45	0,55	0,30	0,35	1,00

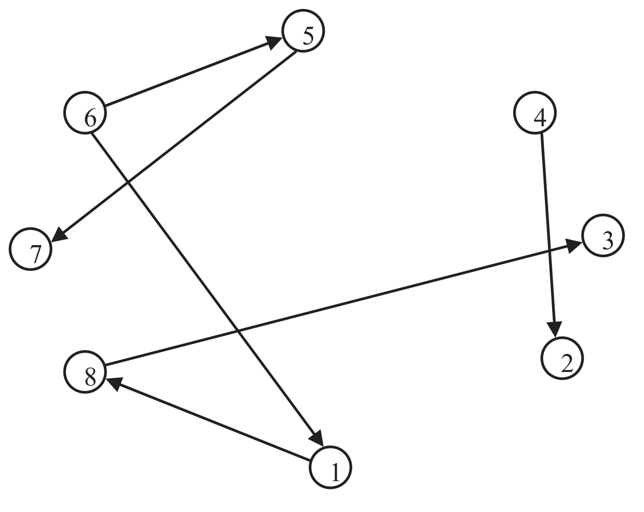
Tabela 5. Numery kryteriów, dla których stwierdzono niespełnienie warunku braku niezgodności

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
a_1						1		
a_2			3				3	
a_3		5		1, 5	1	1	1	
a_4								
a_5			2					2
a_6			2, 4				4	2
a_7			2					2
a_8	6				1	1, 6	1	

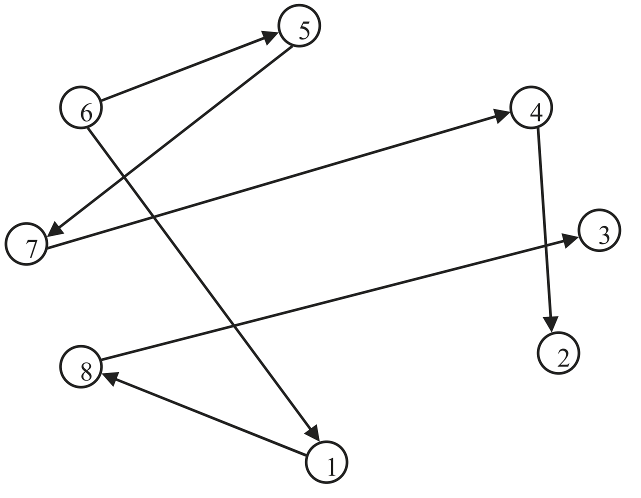
Z wartości współczynników zgodności wynika, że dla wartości $s > 0{,}75$ warunek zgodności nie jest spełniony dla żadnej z par wariantów decyzyjnych. Dla wartości $s = 0{,}75$ warunek ten jest spełniony wyłącznie dla pary wariantów (a_5, a_8) oraz (a_7, a_3), jednak dla obu par nie jest spełniony warunek braku niezgodności ze względu na kryterium g_2. Wobec powyższego pierwszą wartością, która pozwala na pozytywne zweryfikowanie testu na przewyższanie, jest wartość $s = 0{,}70$. Graf zależności między wariantami dla tej wartości progu zgodności przedstawia rys. 2. Przy tym poziomie współczynnika zgodności klientowi należałoby zarekomendować lokale o numerach 6 i 4. Warto jednak sprawdzić, jak wyglądać będzie relacja przewyższania, jeżeli wartość progu zgodności nieco obniżymy. Odpowiednie grafy dla $s = 0{,}65$ oraz $s = 0{,}60$ zaprezentowano na rys. 3 i 4. Analiza wyników wskazuje, że przy przyjętych wartościach współczynników wagowych klientowi należałoby zarekomendować lokal o numerze 6.

W metodzie ELECTRE I nie jest wykorzystywana koncepcja pseudokryterium, jako że nie wykorzystujemy progów równoważności i preferencji. Metodą wykorzystywaną w problematyce wyboru, w której pseudokryterium znajduje wykorzystanie jest ELECTRE IS.

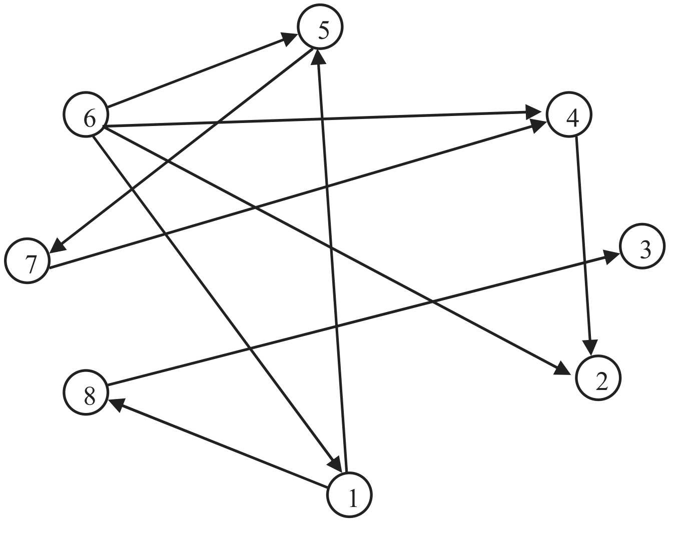
Rysunek 2. Relacja przewyższania dla $s = 0{,}70$



Rysunek 3. Relacja przewyższania dla *s* = 0,65



Rysunek 4. Relacja przewyższania dla *s* = 0,60



Metoda ELECTRE III

Jedną z najczęściej stosowanych technik porządkowania zbioru wariantów decyzyjnych jest metoda ELECTRE III, w której wykorzystywana jest koncepcja pseudokryterium, współczynniki weta oraz współczynniki wagowe. Pierwszym etapem rozwiązania problemu jest obliczenie wartości współczynników zgodności i wiarygodności dla każdej pary wariantów decyzyjnych. Współczynnik zgodności obliczany jest następująco:

$$c(b,a) = \frac{k\left[C(b\ S\ a), C(a\ Q\ b)\right]}{k\left[F\right]}$$

gdzie:

$$C(b\ S\ a) = \left\{j \in F : g_j(b) + q_j \geq g_j(a)\right\}$$

$$C(a\ Q\ b) = \left\{j \in F : g_j(b) + q_j < g_j(a) \leq g_j(b) + p_j\right\}$$

$$k\left[C(b\,S\,a), C(a\,Q\,b)\right] = \sum_{j \in C(b\,S\,a)} k_j + \sum_{j \in C(a\,Q\,b)} \varphi_j k_j$$

$$\varphi_j = \frac{g_j(b) + p_j - g_j(a)}{p_j - q_j}$$

Współczynnik wiarygodności obliczany jest następująco:

$$\sigma_s(b,a) = c(b,a) \cdot \prod_{j \in D_c(b,a)} \frac{1 - d_j(b,a)}{1 - c(b,a)}$$

gdzie:

$$d_j(b,a) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli} \quad g_j(a) > g_j(b) + v_j \\ 0 & \text{jeżeli} \quad g_j(a) \leq g_j(b) + p_j \\ \dfrac{g_j(a) - g_j(b) - p_j}{v_j - p_j} & \text{w innych przypadkach} \end{cases}$$

$$D_c(b,a) = \left\{j \in F : d_j(b,a) > c(b,a)\right\}$$

Macierz wskaźników wiarygodności może być wykorzystana do wyznaczenia dwóch porządków całkowitych Z_1 i Z_2. Porządek całkowity Z_1 jest scharakteryzowany przez podział zbioru A na r klas $\overline{C}_h$ uporządkowanych od $h = 1$ (klasa najwyższa) do $h = r$ (klasa najniższa), zaś porządek Z_2 scharakteryzowany jest przez podział zbioru A na p klas oznaczonych przez $\underline{C}_h$ uporządkowanych od $h = p$ (klasa najwyższa) do $h = 1$ (klasa najniższa). Porządek Z_1 uzyskiwany jest za pomocą procedury destylacji zstępującej, zaś porządek Z_2 za pomocą procedury destylacji wstępującej [1].

Uzyskane w wyniku procedur destylacji porządki Z_1 i Z_2 mogą być wykorzystane do wyznaczenia rankingu końcowego. W tym celu należy skorzystać z następujących zasad:

- wariant *a* uznajemy za lepszy od wariantu *b,* jeżeli przynajmniej w jednym z porządków *a* jest umieszczony wyżej niż *b*, zaś w drugim jest na tym samym poziomie,
- wariant *b* uznajemy za lepszy od wariantu *a,* jeżeli przynajmniej w jednym z porządków *b* jest umieszczony wyżej niż *a*, zaś w drugim jest na tym samym poziomie,
- warianty *a* i *b* uznajemy za równoważne, jeżeli w obu porządkach *a* i *b* umieszczone są na tym samym poziomie,
- warianty *a* i *b* uznajemy za nieporównywalne, jeżeli w jednym z porządków *a* umieszczone jest wyżej, zaś w drugim niżej niż *b*.

Budując ranking końcowy rozpoczynamy od najlepszych wariantów, tzn. tych, dla których nie można znaleźć wariantów, które zgodnie z przytoczonymi wyżej zasadami można by uznać za lepsze. Warianty te umieszczane są na poziomie najwyższym. Na kolejnych poziomach umieszczamy warianty, które są gorsze jedynie od wariantów położonych na poziomach wyższych.

Przykład 4:

Przeanalizujemy ponownie problem z przykładu 3. Przyjmiemy, że klientem biura nieruchomości jest firma zamierzająca wynająć kilka mieszkań dla swoich pracowników. W tej sytuacji problem można sformułować jako problematykę porządkowania wariantów decyzyjnych. Wartości progów równoważności i preferencji przedstawiono w tabeli 6. Wartości współczynników wiarygodności przedstawia tabela 7, zaś wyniki procedur destylacji oraz ranking końcowy tabela 8.

Tabela 6. Wartości progów równoważności i preferencji

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
q_j	50	5,0	0	0	0	0
p_j	100	10,0	1	1	1	1

Tabela 7. Wartości współczynników wiarygodności

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
a_1	1,00	0,75	0,00	0,55	0,60	0,00	0,00	0,70
a_2	0,75	1,00	0,00	0,82	0,45	0,00	0,00	0,49
a_3	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,70
a_4	0,00	0,70	0,00	1,00	0,76	0,00	0,00	0,55
a_5	0,00	0,55	0,00	0,55	1,00	0,00	0,70	0,00
a_6	0,12	0,60	0,00	0,33	0,00	1,00	0,00	0,00
a_7	0,17	0,00	0,00	0,00	0,90	0,37	1,00	0,00
a_8	0,00	0,00	0,70	0,045	0,00	0,00	0,00	1,00

Tabela 8. Wyniki procedur destylacji i ranking końcowy

Destylacja zstępująca		Destylacja wstępująca		Ranking końcowy	
Poziom	Warianty	Poziom	Warianty	Poziom	Warianty
1	a_4, a_7	1	a_1, a_3, a_7	1	a_7
2	a_1	2	a_6	2	a_1, a_4
3	a_6	3	a_2, a_4	3	a_3, a_6
4	a_2	4	a_8	4	a_2
5	a_3, a_5, a_8	5	a_5	5	a_8
				6	a_5

Metody ELECTRE w stochastycznych problemach decyzyjnych

Zadanie, w którym skończona liczba wariantów decyzyjnych oceniana jest względem skończonej liczby kryteriów, zaś oceny wariantów względem kryteriów mają postać rozkładów prawdopodobieństwa, nazywamy stochastycznym, dyskretnym problemem wielokryterialnego podejmowania decyzji.

Opisywany problem można wyrazić za pomocą modelu *Warianty – Kryteria – Oceny*, w którym mamy:

1. Zbiór wariantów decyzyjnych:

$$A = \{ a_1, a_2, ..., a_m \}$$

2. Zbiór kryteriów oceny wariantów:

$$X = \{ X_1, X_2, ..., X_n \}$$

3. Zbiór ocen wariantów decyzyjnych względem kryteriów:

$$E = [X_{ik}]_{m\mathrm{x}n},$$

Przyjmujemy, że odpowiednie funkcje rozkładu prawdopodobieństwa są znane, zaś kryteria zdefiniowane są w taki sposób, że wyższa wartość kryterium jest preferowana w stosunku do wartości niższej. W takim przypadku porównanie dwóch wariantów sprowadza się do porównania dwóch wektorów rozkładów prawdopodobieństw.

Powyższy problem decyzyjny może być rozwiązany przez maksymalizację wieloatrybutowej funkcji użyteczności. Keeney and Raiffa (1976) pokazali, że jeżeli spełnione są warunki niezależności kryteriów względem użyteczności, to wieloatrybutowe porównanie dwóch wariantów decyzyjnych może być zastąpione przez porównania jednoatrybutowe. Niestety, proces szacowania funkcji użyteczności, nawet jeżeli jest to funkcja jednoatrybutowa, jest kłopotliwy i czasochłonny. Aby uniknąć tego problemu, można wykorzystać reguły decyzyjne oparte na relacji dominacji stochastycznej. Jeżeli spełnione są określone założenia do typu funkcji użyteczności, to reguły te są zgodne z regułą maksymalizacji oczekiwanej użyteczności. Wyróżnić można dwie podstawowe grupy relacji opartych na dominacji stochastycznej (definicje poszczególnych typów dominacji stochastycznej podano w dodatku A, zaś reguły wyboru oparte na dominacjach stochastycznych w dodatku B). Pierwsza z nich obejmuje dominację stochastyczną stopnia pierwszego (FSD – *first degree stochastic dominance*), dominację stochastyczną stopnia drugiego (SSD – *second degree stochastic dominance*) oraz dominację stochastyczną stopnia trzeciego (TSD – *third degree stochastic dominance*). Ta grupa relacji może być stosowana dla decydentów cechujących się malejącą absolutną awersją do ryzyka (funkcja użyteczności typu DARA – *decreasing absolute risk aversion*). Druga grupa relacji obejmuje dominację stochastyczną stopnia pierwszego, odwrotną dominację stochastyczną stopnia drugiego (SISD – *second degree inverse stochastic dominance*) oraz dwa rodzaje odwrotnej dominacji stochastycznej stopnia trzeciego (TISD1, TISD2 – *third degree inverse stochastic dominance*). Te typy relacji mogą być stosowane w przypadku decydenta wykazującego rosnącą absolutną awersję do ryzyka (funkcja użyteczności typu INARA – *increasing absolute risk aversion*). Zaraś i Martel (1994) proponują wykorzystywanie reguł opartych na dominacjach FSD/SSD/TSD, w przypadku gdy problem decyzyjny zdefiniowany jest w kategoriach zysków, zaś reguły FSD/SISD/TISD1/TISD2, w przypadku gdy jest on określony w kategoriach strat. Założenie to jest zgodne z wynikami prac Kahnemana i Tversky'ego (1979), którzy wykazali, że o ile w przypadku wyboru między ryzykownymi wariantami zdefiniowanymi pozytywnie decydenci wykazują zwykle awersję do ryzyka, to w przypadku wyboru projektów wiążących się z kosztami lub stratami często cechuje ich skłonność do ryzyka.

Wykorzystaniem relacji dominacji stochastycznej w wielokryterialnym podejmowaniu decyzji zajmowali się Zaraś i Martel (1994). Proponowana przez nich procedura składa się z dwóch kroków. Etap pierwszy polega na weryfikacji testów zachodzenia relacji dominacji stochastycznej dla każdej pary wariantów decyzyjnych ze względu na każde z kryteriów. Etap drugi to agregacja wieloatrybutowa oparta na metodologii zaczerpniętej z metody ELECTRE I. Najpierw warianty klasyfikowane są z uwzględnieniem wszystkich kryteriów. Jeżeli otrzymany ranking uznany zostaje przez decydenta za wystarczająco szczegółowy, to procedura kończy się. W przeciwnym wypadku budowany jest nowy ranking. Przy jego konstrukcji uwzględniane są relacje zachodzące między wariantami ze względu na wszystkie kryteria z wyjątkiem najmniej istotnego. Procedura jest kontynuowana do momentu uzyskania rankingu, który zostanie uznany przez decydenta za wystarczająco szczegółowy przy uwzględnieniu warunku, że suma współczynników wagowych przypisanych uwzględnianym kryteriom nie może być mniejsza od 0,5.

Zaraś i Martel przyjęli, że wariant a_i jest preferowany w stosunku do wariantu a_j ze względu na kryterium X_k, jeżeli między rozkładami ocen wariantów a_i i a_j ze względu na X_k zidentyfikowano odpowiedni typ dominacji stochastycznej. Tym samym modelując preferencje decydenta możemy mieć do czynienia z następującymi sytuacjami:

- preferencją – gdy zweryfikowano pomyślnie test zachodzenia dominacji stochastycznej i typ dominacji stochastycznej jest zgodny z założoną funkcją użyteczności decydenta,
- równoważnością – gdy rozkłady ocen wariantów decyzyjnych są identyczne,
- brakiem dostatecznej informacji pozwalających na przyjęcie jednej z powyższych sytuacji – w pozostałych przypadkach.

W prezentowanej poniżej procedurze[2] przyjęto, że analizując preferencje decydenta na poziomie pojedynczego kryterium możemy mieć do czynienia z silną preferencją, słabą preferencją, równoważnością lub brakiem wystarczającej informacji.

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

F_{ik} – dystrybuanta rozkładu oceny wariantu a_i względem kryterium X_k,

μ_{ik} – wartość oczekiwana rozkładu oceny wariantu a_i względem kryterium X_k,

w_k – waga przypisana kryterium X_k,

$p_k(\mu_{ik})$ – próg preferencji dla kryterium X_k,

$v_k(\mu_{ik})$ – próg weta dla kryterium X_k,

SD_T – jawna dominacja stochastyczna – dominacja stochastyczna zgodna z funkcją użyteczności decydenta: FSD, SSD lub TSD w przypadku funkcji użyteczności typu DARA, FSD, SISD, TISD1, TISD2 w przypadku funkcji użyteczności typu INARA.

Przyjmujemy, że funkcje progowe $p_k(\mu_{ik})$ i $v_k(\mu_{ik})$ są funkcjami liniowymi:

$$p_k(\mu_{ik}) = \alpha_k^P \mu_{ik} + \beta_k^P$$

$$v_k(\mu_{ik}) = \alpha_k^V \mu_{ik} + \beta_k^V$$

Przyjmiemy, że wartość progu rośnie wraz ze wzrostem wartości oczekiwanych porównywanych rozkładów prawdopodobieństwa. Im wyższe będą wartości oczekiwane, tym wyższa będzie musiała być różnica między nimi, by można było uznać, że jeden z porównywanych wariantów jest silnie preferowany lub że zachodzi warunek weta. Przyjęcie współczynników α_k^P lub α_k^V na poziomie 0 oznacza, że wartości progów preferencji lub weta są stałe i wynoszą odpowiednio β_k^P lub β_k^V.

Porównując warianty a_i i a_j ze względu na kryterium X_k możemy mieć do czynienia z następującymi sytuacjami:

1. Silna preferencja wariantu a_i w stosunku do wariantu a_j:

   $a_i \, P \, a_j \Leftrightarrow F_{ik} \, SD_T \, F_{jk}$ i $\mu_{ik} \geq \mu_{jk} + p_k(\mu_{ik})$

2. Silna preferencja wariantu a_j w stosunku do wariantu a_i:

   $a_j \, P \, a_i \Leftrightarrow F_{jk} \, SD_T \, F_{ik}$ i $\mu_{jk} \geq \mu_{ik} + p_k(\mu_{jk})$

3. Słaba preferencja wariantu a_i w stosunku do wariantu a_j:

$a_i \; Q \; a_j \Leftrightarrow F_{ik} \; \mathrm{SD_T} \; F_{jk}$ i $\mu_{jk} < \mu_{ik} < \mu_{jk} + p_k(\mu_{ik})$

4. Słaba preferencja wariantu a_j w stosunku do wariantu a_i:

$a_j \; Q \; a_i \Leftrightarrow F_{jk} \; \mathrm{SD_T} \; F_{ik}$ i $\mu_{ik} < \mu_{jk} < \mu_{ik} + p_k(\mu_{jk})$

5. Równoważność – gdy porównywane rozkłady ocen są dokładnie takie same.

6. W pozostałych przypadkach mamy do czynienia z brakiem dostatecznych informacji pozwalających na rozstrzygnięcie, która z powyższych sytuacji ma miejsce.

Kolejność postępowania w proponowanej procedurze porządkowania wariantów decyzyjnych jest następująca:

1. Identyfikacja dominacji stochastycznych zachodzących dla każdej pary rozpatrywanych wariantów decyzyjnych względem każdego z kryteriów.

2. Obliczenie wartości współczynników zgodności według następującego wzoru:

$$c(a_i, a_j) = \sum_{k=1}^{n} w_k \varphi_k (a_i, a_j)$$

gdzie:

$$\varphi_k(a_i, a_j) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } F_{ik} \; \mathrm{SD_T} \; F_{jk} \wedge \mu_{ik} \geq \mu_{jk} + p_k(\mu_{ik}) \\ \dfrac{\mu_{ik} - \mu_{jk}}{p_k(\mu_{ik})} & \text{jeżeli } F_{ik} \; \mathrm{SD_T} \; F_{jk} \wedge \mu_{jk} < \mu_{ik} < \mu_{jk} + p_k(\mu_{ik}) \\ 0 & \text{w innych przypadkach} \end{cases}$$

zaś współczynniki wag w_k spełniają warunek:

$$\sum_{k=1}^{n} w_k = 1$$

3. Obliczenie współczynników wiarygodności:

$$\sigma(a_i, a_j) = c(a_i, a_j) \cdot \prod_{k \in D(a_i, a_j)} \frac{1 - d_k(a_i, a_j)}{1 - c(a_i, a_j)}$$

gdzie:

$$d_k(a_i, a_j) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } \mu_{jk} > \mu_{ik} + v_k(\mu_{ik}) \\ \dfrac{\mu_{jk} - \mu_{ik} - p_k(\mu_{ik})}{v_k(\mu_{ik}) - p_k(\mu_{ik})} & \text{jeżeli } \mu_{ik} + p_k(\mu_{ik}) < \mu_{jk} \\ & \qquad \le \mu_{ik} + v_k(\mu_{ik}) \\ 0 & \text{w innych przypadkach} \end{cases}$$

zaś

$$D(a_i, a_j) = \{k\colon d_k(a_i, a_j) > c(a_i, a_j)\}$$

4. Porządkowanie zbioru wariantów decyzyjnych metodą destylacji wykorzystywaną w metodzie ELECTRE III.

Przykład 5[3]:

Rozpatrujemy problem oceny projektów inwestycyjnych. Dziesięć projektów ocenianych jest przez siedmiu ekspertów ze względu na cztery kryteria:

X_1 – nakłady na realizacje projektu,

X_2 – korzyści finansowe z realizacji projektu,

X_3 – szansa powodzenia,

X_4 – zaawansowanie technologiczne.

Rozkłady ocen wariantów względem kryteriów przedstawia tabela 9. Zakładamy, że za najważniejsze decydent uznaje kryterium drugie (waga 0,55), a następnie kryterium trzecie (waga 0,27). Kryteria pierwsze i czwarte decydent uznaje za równie ważne (wagi równe 0,09). Pierwszy etap procedury rozwiązania problemu to określenie relacji między rozkładami ocen wariantów decyzyjnych względem kryteriów. Ze względu na fakt, że wyższe wartości kryteriów są preferowane w stosunku do wartości niższych, zakładamy, że decydent wykazuje awersję do ryzyka, a co za tym idzie badamy, czy między rozkładami ocen zachodzi relacja dominacji stochastycznej typu FSD/SSD/TSD. Odpowiednie dane przedstawiono w tabeli 10.

Tabela 9. Rozkłady ocen wariantów decyzyjnych względem kryteriów

Wartość kryterium	Projekty									
X_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1							1/7	1/7		
2	3/7	1/7						2/7		1/7
3	1/7				1/7			2/7		2/7
4		2/7						1/7		2/7
5	2/7	1/7	3/7	1/7			3/7	1/7	2/7	1/7
6		2/7	1/7		2/7	1/7	1/7		1/7	
7	1/7		1/7	1/7	2/7	2/7			3/7	1/7
8		1/7	2/7	1/7		2/7	1/7		1/7	
9				3/7	2/7					
10				1/7		2/7	1/7			
Średnia	3.71	5.00	6.29	8.14	6.71	8.00	5.71	2.86	6.43	4.00
X_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1							1/7	3/7		
2	2/7						3/7	3/7		1/7
3	1/7			1/7		4/7	1/7		1/7	
4				1/7				1/7	1/7	
5	2/7				1/7		1/7			
6		1/7	1/7	1/7	2/7		1/7		1/7	
7		1/7			1/7	1/7			4/7	2/7
8	1/7	3/7	2/7	3/7	2/7	2/7				3/7
9	1/7	2/7	3/7	1/7	1/7					
10			1/7							1/7
Średnia	4.86	7.86	8.43	6.57	7.00	5.00	3.00	1.86	5.86	7.14
X_3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1								2/7		1/7
2							3/7	1/7		2/7
3	1/7			1/7			1/7	4/7	1/7	
4	3/7					1/7	1/7		2/7	
5		1/7				1/7	2/7		2/7	
6	1/7									2/7
7		1/7		1/7	2/7				2/7	2/7
8	1/7	2/7	4/7	2/7	3/7	2/7				
9	1/7	3/7	3/7	1/7	1/7	1/7				
10				2/7	1/7	2/7				
Średnia	5.43	7.86	8.43	7.86	8.14	7.71	3.29	2.29	5.00	4.43
X_4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1								2/7		
2									1/7	
3	3/7						1/7			
4								1/7	1/7	
5	2/7					1/7	1/7	2/7		
6					1/7	1/7		1/7	3/7	3/7
7			1/7		1/7	1/7				1/7
8	1/7	4/7	3/7	3/7	3/7	2/7	3/7	1/7	1/7	1/7
9		2/7		1/7	1/7	1/7	1/7			1/7
10	1/7	1/7	2/7	3/7	1/7	1/7	1/7		1/7	1/7
Średnia	5.29	8.57	8.43	9.00	8.00	7.57	7.29	4.29	6.00	7.43

Tabela 10. Relacje dominacji stochastycznej między rozkładami ocen

X_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1								FSD		
2	FSD							FSD		FSD
3	FSD	FSD					SSD	FSD		FSD
4	FSD	FSD	FSD		FSD		FSD	FSD	FSD	FSD
5	FSD	FSD					SSD	FSD		FSD
6	FSD	FSD	FSD		FSD		FSD	FSD	FSD	FSD
7								FSD		
8										
9	FSD	FSD	SSD				SSD	FSD		FSD
10	SSD							FSD		
X_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1							FSD	FSD		
2	FSD			FSD	FSD	FSD	FSD	FSD	FSD	SSD
3	FSD	FSD		FSD	FSD	FSD	FSD	FSD	FSD	FSD
4	FSD					FSD	FSD	FSD	FSD	
5	FSD			SSD		FSD	FSD	FSD	FSD	
6	SSD						FSD	FSD		
7								FSD		
8										
9	SSD					SSD	FSD	FSD		
10	FSD						FSD	FSD		
X_3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1							FSD	FSD		SSD
2	FSD			SSD		SSD	FSD	FSD	FSD	FSD
3	FSD	FSD		SSD	SSD	SSD	FSD	FSD	FSD	FSD
4	FSD						FSD	FSD	FSD	FSD
5	FSD	SSD		SSD		SSD	FSD	FSD	FSD	FSD
6	FSD						FSD	FSD	FSD	FSD
7								FSD		
8										
9							FSD	FSD		SSD
10								FSD		
X_4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1								SSD		
2	FSD		SSD		FSD	FSD	FSD	FSD	FSD	FSD
3	FSD				FSD	FSD	FSD	FSD	FSD	FSD
4	FSD	FSD	FSD		FSD	FSD	FSD	FSD	FSD	FSD
5	FSD					FSD	FSD	FSD	FSD	FSD
6	FSD						SSD	FSD	FSD	
7	FSD							FSD	FSD	
8										
9								FSD		
10	FSD						SSD	FSD	FSD	

Przyjmijmy, że decydent zaakceptował następujące wartości progów preferencji i weta:

X_1:	$p_1 = 1$	$v_1 = 3$
X_2:	$p_2 = 1$	$v_2 = 3$
X_3:	$p_3 = 1$	$v_3 = 3$
X_4:	$p_4 = 1$	$v_4 = 3$

Przyjmujemy zatem, że z silną preferencją wariantu a_i w stosunku do wariantu a_j mamy do czynienia, gdy odpowiedni test zachodzenia dominacji stochastycznej został zweryfikowany pozytywnie, zaś różnica między wartościami oczekiwanymi rozkładów ocen wynosi co najmniej 1. Z kolei hipoteza o przewyższaniu wariantu a_j przez wariant a_i jest odrzucana, jeżeli różnica między wartościami oczekiwanymi rozkładów ocen wariantów a_j i a_i ze względu na co najmniej jedno kryterium jest nie mniejsza niż 3. W tabeli 11 zamieszczono wartości współczynników wiarygodności, zaś tabela 12 przedstawia wyniki procedur destylacji i ranking końcowy.

Tabela 11. Współczynniki wiarygodności

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.820	0.987	0.000	0.078
2	1.000	0.000	0.011	0.000	0.523	0.000	0.910	1.000	0.910	0.843
3	1.000	0.559	0.000	0.704	0.666	0.820	0.961	1.000	0.910	1.000
4	1.000	0.127	0.094	0.000	0.180	0.640	1.000	1.000	0.843	0.450
5	1.000	0.167	0.000	0.313	0.000	0.704	0.974	1.000	0.910	0.411
6	0.529	0.007	0.000	0.000	0.050	0.000	0.936	1.000	0.450	0.360
7	0.027	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.005	0.000
8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
9	0.640	0.001	0.000	0.000	0.000	0.127	0.884	1.000	0.000	0.244
10	0.666	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.563	1.000	0.028	0.000

Tabela 12. Wyniki procedur destylacji i ranking końcowy

Destylacja zstępująca		Destylacja wstępująca		Ranking końcowy	
Poziom	Warianty	Poziom	Warianty	Poziom	Warianty
1	a_3	1	a_3	1	a_3
2	a_2	2	a_2, a_4	2	a_2
3	a_5	3	a_5	3	a_4, a_5
4	a_4	4	a_6	4	a_6
5	a_6	5	a_{10}	5	a_9, a_{10}
6	a_9	6	a_9	6	a_1
7	a_{10}	7	a_1	7	a_7
8	a_1	8	a_7	8	a_8
9	a_7	9	a_8		
10	a_8				

Powyższe wyniki można porównać z wynikami uzyskanymi za pomocą procedury proponowanej przez Zarasia i Martela (tabela 13). Ranking uzyskany za pomocą procedur destylacji jest bardziej szczegółowy. Zauważyć można również inne różnice: w rankingu uzyskanym za pomocą procedur destylacji na najwyższym poziomie umieszczony został wariant a_3, podczas gdy w metodzie Zarasia i Martela do najlepszych zaliczał się również wariant a_4.

Tabela 13. Wyniki procedury Zarasia i Martela (próg zgodności 0.91)

Poziom	Warianty
1	a_3, a_4
2	a_2, a_5
3	a_6, a_9, a_{10}
4	a_1, a_7
5	a_8

Podsumowanie

Od momentu, gdy zaprezentowano metodę ELECTRE I minęło prawie 40 lat. Prace prowadzone w tym okresie przez badaczy z różnych krajów zaowocowały opracowaniem całego szeregu technik wielokryterialnych bazujących na relacji przewyższania dostosowanych do specyfiki różnorodnych problemów decyzyjnych. Oprócz metod z rodziny ELECTRE warto w tym miejscu wspomnieć chociażby o metodach PROMETHEE I i PROMETHEE II (Brans i in., 1986), metodzie MACBETH (Bana e Costa i Vansnick, 1994) czy wreszcie metodzie BIPOLAR (Konarzewska-Gubała, 1991).

Metody ELECTRE znajdują szerokie zastosowanie w wielu różnorodnych dziedzinach, począwszy od finansów (Zopounidis, 1999), przez zagadnienia związane z planowaniem strategii rozwoju przemysłu (Georgopoulou i in., 1997), zarządzanie projektami (Mavrotas i in., 2003), biotechnologię (Fichefet i in., 1984), po zagadnienia związane z ochroną naturalnego środowiska (Karagiannidis i Moussiopoulos, 1997, Rogers i Bruen, 1998, Georgopoulou i in., 2003).

W przypadku wielu problemów decyzyjnych oceny wariantów względem kryteriów mają charakter losowy. W tym wypadku porównanie dwóch wariantów decyzyjnych sprowadza się do porównania wektorów rozkładów prawdopodobieństwa. Dzięki wykorzystaniu relacji dominacji stochastycznej możliwe jest modelowanie preferencji decydentów o różnym nastawieniu do ryzyka. Zaprezentowane w pracy metody na rozwiązanie pozwalają na jednoczesne wykorzystanie koncepcji dominacji stochastycznej oraz procedur agregacji wielokryterialnej stosowanych w metodach ELECTRE I i ELECTRE III. Podejście tego typu może być z powodzeniem wykorzystywane w takich zagadnieniach jak analiza finansowa (Trzpiot, 2000), analiza projektów inwestycyjnych (Dominak, 2000), ubezpieczenia (Ciupek, 2000), sterowanie procesem produkcyjnym (Nowak i in., 2002) czy problemy związane z organizacją pomocy społecznej (Zawisza, 2000).

Dodatek A

Oznaczenia:

$F(x)$, $G(x)$ – kumulacyjne funkcje dystrybucji,

$\overline{F}(x), \overline{G}(x)$ – dekumulacyjne funkcje dystrybucji

Relacje dominacji stochastycznej definiujemy następująco:

Definicja 1:

$$F(x) \text{ FSD } G(x) \text{ wtedy i tylko wtedy gdy}$$
$$F(x) \neq G(x) \text{ i } H_1(x) = F(x) - \mathrm{G}(x) \leq 0 \text{ dla } x \in R$$

Definicja 2:

$F(x)$ SSD $G(x)$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$F(x) \neq G(x) \text{ i } H_2(x) = \int_a^x H_1(y)dy \leq 0 \text{ dla } x \in R$$

Definicja 3:

$F(x)$ TSD $G(x)$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$F(x) \neq G(x) \text{ i } H_3(x) = \int_a^x H_2(y)dy \leq 0 \text{ dla } x \in R$$

Definicja 4:

$\overline{F}(x)$ SISD $\overline{G}(x)$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$\overline{F}(x) \neq \overline{G}(x) \text{ i } \overline{H}_2(x) = \int_x^b \overline{H}_1(y)dy \geq 0 \text{ dla } x \in R$$

gdzie: $\overline{H}_1 = \overline{F}(x) - \overline{G}(x)$

Definicja 5:

$\overline{F}(x)$ TISD1 $\overline{G}(x)$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$\overline{F}(x) \neq \overline{G}(x) \text{ i } \overline{H}_3(x) = \int_x^b \overline{H}_2(y)dy \geq 0 \text{ dla } x \in R$$

Definicja 6:

$\overline{F}(x)$ TISD2 $\overline{G}(x)$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$\overline{F}(x) \neq \overline{G}(x) \text{ i } \widetilde{H}_3(x) = \int_a^x \overline{H}_2(y)dy \geq 0 \text{ dla } x \in R$$

Dodatek B

Oznaczenia:

$u(x)$ – funkcja użyteczności

Reguła 1 (Hadar, Russel, 1969):

Jeżeli $H_1(x) \le 0$ dla $x \in R$
to $E_F[u(x)] - E_G[u(x)] \ge 0$ dla $u(x) \in U_1$
gdzie $U_1 = \{u(x) : u'(x) > 0\}$

Reguła 2 (Hadar, Russel, 1969):

Jeżeli $H_2(x) \le 0$ dla $x \in R$
to $E_F[u(x)] - E_G[u(x)] \ge 0$ dla $u(x) \in U_2^1$
gdzie $U_2^1 = \{u(x) : u'(x) > 0, u''(x) \le 0\}$

Reguła 3 (Whitmore, 1970):

Jeżeli $\mu_F \ge \mu_G$ i $H_3(x) \le 0$ dla $x \in R$
to $E_F[u(x)] - E_G[u(x)] \ge 0$ dla $u(x) \in U_3^1$
gdzie $U_3^1 = \{u(x) : u'(x) > 0, u''(x) \le 0, u'''(x) \ge 0 \text{ i } u'(x) \cdot u'''(x) \ge [u''(x)]^2\}$

Reguła 4 (Goovaerts, 1984):

Jeżeli $\overline{H}_2(x) \ge 0$ dla $x \in R$
to $E_F[u(x)] - E_G[u(x)] \ge 0$ dla $u(x) \in U_2^2$
gdzie $U_2^2 = \{u(x) : u'(x) > 0, u''(x) \ge 0\}$

Reguła 5 (Goovaerts, 1984):

Jeżeli $\overline{H}_3(x) \ge 0$ dla $x \in R$
to $E_F[u(x)] - E_G[u(x)] \ge 0$ dla $u(x) \in U_3^2$
gdzie $U_3^2 = \{u(x) : u'(x) > 0, u''(x) \ge 0, u'''(x) \ge 0 \text{ i } u'(x) \cdot u'''(x) \le [u''(x)]^2\}$

Reguła 6 (Zaraś, 1989):

$$\text{Jeżeli } \widetilde{H}_3(x) \geq 0 \text{ dla } x \in R$$
$$\text{to } E_F[u(x)] - E_G[u(x)] \geq 0 \text{ dla } u(x) \in U_3^3$$
$$\text{gdzie } U_3^3 = \{u(x) : u'(x) > 0, u''(x) \geq 0, u'''(x) \leq 0\}$$

Przypisy

[1] Szczegółowe informacje na temat procedur destylacji znaleźć można w pracy Roy, Bouyssou (1993)

[2] Szczegółowy opis procedury znaleźć można w pracy: Nowak (2004)

[3] Idea przykładu pochodzi z pracy Zaraś, Martel (1994)

Bibliografia

Arrow K., 1951. *Social Choice and Individual Values*. Wiley, New York.

Bana e Costa C.A., Vansnick J.C., 1994. *MACBETH – An interactive path towards the construction of cardinal value functions*. „International Transactions in Operational Research” 1, 489-500.

Brans J.P., Vincke Ph., Mareschal B., 1986. *How to select and how to rank projects: The PROMETHEE method*. „European Journal of Operational Research” 24, 228-238.

Ciupek B., 2000. *Optymalny dobór składek ubezpieczeniowych w ubezpieczeniach majątkowych z wykorzystaniem dominacji stochastycznych, w: Modelowanie preferencji a ryzyko ’00*. Praca zbiorowa pod red. T. Trzaskalika. Akademia Ekonomiczna, Katowice, 189-205.

Dominiak C., 2000. *Wielokryterialna procedura wspomagania wyboru wariantu inwestycyjnego w warunkach ryzyka, w: Modelowanie preferencji a ryzyko ’00*. Praca zbiorowa pod red. T. Trzaskalika. Akademia Ekonomiczna, Katowice, 207-217.

Fichefet J., Leclercq J.P., Beyne Ph., Rousselet-Piette F.F., 1984. *Microcomputer-assisted identification of bacteria and multicriteria decision models*. „Computers & Operations Research” 11, 361-372.

Georgopoulou E., Lalas D., Papagiannakis L., 1997. *A multicriteria decision aid approach for energy planning problems: The case of renewable energy options*. „European Journal of Operational Research” 103, 38-54.

Georgopoulou E., Sarafidis Y., Mirasgedis S., Zaimi S., Lalas D.P., 2003. *A multiple criteria decision-aid approach in defining national priorities for greenhouse gases emissions reduction in the energy sector.* „European Journal of Operational Research" 146, 199-215.

Goovaerts J., 1984. *Insurance Premium*. Elsevier Science Publishers.

Hadar J., Russel W.R., 1969. *Rules for ordering uncertain prospects*. „The American Economic Review" 59, 25-34.

Kahneman D., Tversky A., 1979. *Prospect theory: an analysis of decisions under risk*. „Econometrica" 47, 263-291.

Karagiannidis A., Moussiopoulos N., 1997. *Application of ELECTRE III for the integrated management of municipal solid wastes in the Great Athens Area*. „European Journal of Operational Research" 97, 439-449.

Keeney R.L., Raiffa H., 1976. *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs.* Wiley, New York.

Konarzewska-Gubała E., 1991. *Wspomaganie decyzji wielokryterialnych*. *System BIPOLAR*. Akademia Ekonomiczna, Wrocław.

Mavrotas G., Diakoulaki D., Capros P., 2003. *Combined MCDA-IP approach for project selection in the electricity market.* „Annals of Operations Research" 120, 159-170.

Nowak M., 2004. *Preference and veto thresholds in multicriteria analysis based on stochastic dominance*. „European Journal of Operational Research" 158, 339-350.

Nowak M., Trzaskalik T., Trzpiot G., Zaraś K., 2002. *Inverse Stochastic Dominance and its Applications in Production Process Control, w: Multiple Objective and Goal Programming; Recent Developments.* Praca zbiorowa pod red. T. Trzaskalika i J. Michnika. Springer, 362-376.

Rogers M., Bruen M., 1998. *Choosing realistic values of indifference, preference and veto thresholds for use with enviromental criteria within ELECTRE*. „European Journal of Operational Research" 107, 542-551.

Roy B., 1990. *Wielokryterialne wspomaganie decyzji*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.

Roy B., Bouyssou D., 1993. *Aide Multicritère à la Décision: Méthodes et Cas*. Economica, Paris.

Simon H.A., 1982. *Podejmowanie decyzji kierowniczych. Nowe nurty.* Państwowe Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.

Trzpiot G., 2000. *Ryzyko na rynku kapitałowym, w: Modelowanie preferencji a ryzyko '00.* Praca zbiorowa pod red. T. Trzaskalika. Akademia Ekonomiczna, Katowice, 243-266.

Whitmore G.A., 1970. *Third-degree stochastic dominance*. „The American Economic Review” 60, 457-459.

Zaraś K., 1989. *Dominances stochastiques pour deu classes de fonctions d'utilite: Concaves et convees*. RO/OR, „Recherche Operationnelle” 23, 57-65.

Zaraś K., Martel J.M., 1994. *Multiattribute analysis based on stochastic dominance*. W: Munier B., Machina M.J. (Eds.), *Models and Experiments in Risk and Rationality*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 225-248.

Zawisza M., 2000. *Analiza sytuacji społeczno-ekonomicznej oparta na procedurach wielokryterialnego wspomagania decyzji. W: Metody i zastosowania badań operacyjnych 2000.* Praca zbiorowa pod red. D. Kopańskiej Bródka, Akademia Ekonomiczna, Katowice, 263-275.

Zopounidis C., 1999. *Multicriteria decision aid in financial management*. „European Journal of Operational Research” 119, 404-415.