WARTOŚĆ SHAPLEYA

Marcin Malawski*

Instytut Podstaw Informatyki PAN

Akademia Leona Koźmińskiego

Streszczenie: *Praca stanowi przegląd najciekawszych tematów związanych z najbardziej znanym spośród jednoelementowych rozwiązań gier kooperacyjnych z wypłatami ubocznymi – wartością Shapleya. Przedstawimy oryginalną definicję tej wartości, najważniejsze wzory, podstawowe własności i twierdzenia charakteryzujące wartość Shapleya poprzez zestawy własności. Pokażemy, jak wygląda i zachowuje się wartość Shapleya na niektórych specjalnych grach i typach gier. Opiszemy niektóre znane zastosowania, w szczególności w zagadnieniach rozdziału kosztów, a także jako indeksu siły w problemach podejmowania decyzji grupowych modelowanych jako gry proste. Przedstawimy także niektóre szczególnie typowe lub interesujące spośród uogólnień i rozszerzeń wartości.*

Słowa kluczowe: *gra kooperacyjna, rozwiązanie, wartość Shapleya, efektywność, równoprawność, monotoniczność, wkłady krańcowe, gry proste, indeks siły, podział kosztów, wartości ważone, proceduralne i egalitarne.*

THE SHAPLEY VALUE

Abstract: *The paper is a review of most interesting topics on the most renowned one-element solution of cooperative games with side payments – the Shapley value. After an elementary introduction, we present the original definition of the Shapley value, basic formulae and properties as well as main theorems characterizing the Shapley value by systems of axioms. The form and behaviour of the value of some specific games and types of games is demonstrated. Some applications are described, including those in cost sharing problems and as a power index in group decision making problems modelled as simple games. Also some particularly typical or interesting extensions and generalizations of the Shapley value are presented.*

Keywords: *cooperative game, solution, Shapley value, efficiency, equal treatment, monotonicity, marginal contributions, simple games, power index, cost sharing, weighted values, procedural and egalitarian values.*

* Instytut Podstaw Informatyki PAN, ul. Ordona 21, 01-237 Warszawa i Akademia Leona Koźmińskiego, ul. Jagiellońska 59, 03-301 Warszawa, e-mail: malawski@ipipan.waw.pl, mmn@wspiz.edu.pl

1. Wprowadzenie. Gry kooperacyjne i ich rozwiązania

Wyobraźmy sobie następującą prostą sytuację, jaka może wystąpić w rzeczywistym świecie:

Trzej drobni plantatorzy (A, B i C) zebrali truskawki – A i B po 300 łubianek, a C 250 – i teraz muszą je sprzedać. Na terenie plantatora A jest jedyny w okolicy dobry punkt przy ruchliwej drodze, gdzie można sprzedać dowolną ilość truskawek po 3 zł za łubiankę. B może na własną rękę sprzedawać truskawki jedynie przy bocznej drodze, gdzie da się uzyskać cenę 2 zł za łubiankę. Plantator C na miejscu też może tylko ustawić się przy bocznej drodze, ale jako jedyny z trzech ma samochód dostawczy, którym może zawieźć do miasta nawet tysiąc łubianek i tam sprzedać po 4 zł za łubiankę. Koszty kursu do miasta wraz z opłatą placową na targu wynoszą 200 zł.

Jest to bardzo typowe zagadnienie z tematyki *gier kooperacyjnych*, a jego formalny opis i analiza to jedno z zadań, jakie niedawno ułożyłem na egzamin z teorii gier dla studentów ekonomii UW. Dociekliwy czytelnik zapyta w tym miejscu: gdzie tu jest jakakolwiek gra? Otóż trzej plantatorzy, jeśli chcą osiągnąć jak największy dochód ze sprzedaży truskawek, oczywiście powinni wejść w *koalicję*, czyli – w tym przypadku – dogadać się, że wspólnie sprzedadzą wszystkie zebrane truskawki w mieście (gdzie uzyskają najlepszą cenę), oraz uzgodnić, jak *podzielą* pomiędzy siebie ten dochód. Jest tu więc miejsce na negocjacje, propozycje i kontrpropozycje, a nawet groźby – na przykład plantator C może zagrozić, że jeżeli przy podziale sumy za sprzedane truskawki nie otrzyma co najmniej 1100 zł, to pojedzie do miasta tylko z własnymi truskawkami, wskutek czego A i B dostaną co najwyżej po 3 zł za łubiankę. Innymi słowy, plantatorzy przed (ewentualnym) dojściem do porozumienia rozgrywają grę negocjacyjną, w której mogą podjąć wiele różnych działań. Takie gry to domena teorii gier *niekooperacyjnych*, w których każdy gracz na własną rękę wybiera spośród dostępnych sobie akcji – raz lub wiele razy, w zależności od reguł gry – a podjęte przez wszystkich akcje decydują wspólnie o ostatecznym wyniku; tak jest w szachach, pokerze, negocjacjach płacowych i ustalaniu cen przez konkurujących producentów. Natomiast teoria gier kooperacyjnych „przeskakuje" etap negocjacji, tworzenia koalicji i dochodzenia do porozumienia, przyjmuje jako dane wejściowe łączne zarobki możliwe do uzyskania przez (każdą) koalicję w razie jej powstania i interesuje się koalicjami, jakie ostatecznie mogą utworzyć racjonalni gracze, oraz podziałami, jakie uzgodnią.

Formalnie gra kooperacyjna jest opisana przez *zbiór graczy* oraz *funkcję charakterystyczną*. Zbiór graczy, oznaczany zwykle przez N, często utożsamia się ze zbiorem pierwszych n liczb naturalnych, czyli mówi się o graczu 1, graczu 2 itd. aż do gracza n – a więc na przykład w grze czteroosobowej mamy $N = \{1,2,3,4\}$. Często jednak zamiast tego graczy oznacza się kolejnymi literami (jak w przykładzie powyżej) lub po prostu podaje się ich nazwy. Koalicja to dowolny podzbiór zbioru graczy; w grze n-osobowej wszystkich koalicji jest 2^n, w tym *wielka koalicja N* złożona ze wszystkich graczy oraz koalicja pusta.

Funkcja charakterystyczna gry to funkcja rzeczywista *v* określona na zbiorze wszystkich koalicji, interpretowana w ten sposób, że dla koalicji *T* wielkość *v(T)* to suma, jaką koalicja *T* jest w stanie wypracować/uzyskać samodzielnie, czyli bez oglądania się na to, co zrobią pozostali gracze[1]. Ta interpretacja naturalnie implikuje warunek $v(\emptyset) = 0$ – koalicja pusta nie jest w stanie wypracować nic.

Często, gdy jest oczywiste, jaki jest zbiór graczy, utożsamiamy grę z jej funkcją charakterystyczną i mówimy o grze *v* zamiast o grze *(N,v)*.

Jak wygląda gra opisująca sytuację trzech producentów truskawek? Oczywiście $N = \{A, B, C\}$, natomiast dla wyznaczenia funkcji charakterystycznej musimy przeanalizować możliwości wszystkich koalicji.

Każdy plantator na własną rękę może sprzedać tylko własne truskawki – A po 3 zł za łubiankę, B po 2 zł, a C albo po 2 zł u siebie, albo po 4 zł w mieście. Ta druga wersja wymaga wprawdzie poniesienia kosztów w wysokości 200 zł, ale warto je ponieść, bo dzięki temu za 250 łubianek uzyska się 1000 zł zamiast 500. Mamy więc:

$$v(\{A\}) = 3 \cdot 300 = 900\,, \quad v(\{B\}) = 2 \cdot 300 = 600\,, \quad v(\{C\}) = 4 \cdot 250 - 200 = 800\,.$$

Jeśli koalicję utworzą plantatorzy A i B, mogą wspólnie sprzedać wszystkie swoje truskawki u gracza A po 3 zł za łubiankę, a więc

$$v(\{A,B\}) = 3 \cdot (300 + 300) = 1800\,.$$

Jeśli powstanie koalicja złożona z gracza C i jednego z pozostałych, najbardziej opłaci się jej sprzedać całe swoje zbiory w mieście, gdzie uzyska najlepszą cenę, a koszty poniesie wspólnie i będzie mogła je podzielić:

$$v(\{A,C\}) = 4 \cdot (300 + 250) - 200 = 2000\quad,\quad v(\{B,C\}) = 4 \cdot (300 + 250) - 200 = 2\,000\,.$$

Taki sam jest najkorzystniejszy wariant dla wielkiej koalicji:

$$v(\{A,B,C\}) = 4 \cdot (300 + 300 + 250) - 200 = 3200.$$

[1] Wielkość *v(T)* bywa czasem nazywana wartością (ang. *worth*) koalicji *T*, będziemy jednak unikać tej nazwy jako mylącej, zwłaszcza w artykule zajmującym się wartością (ang. *value*) gier.

Warto zwrócić uwagę na pewną bardzo istotną własność tej gry: dla jakichkolwiek dwóch rozłącznych koalicji *S* i *T* zarobki, jakie może wypracować sobie koalicja powstająca przez połączenie *S* z *T* są większe od sumy maksymalnych zarobków każdej z tych dwóch koalicji z osobna. Mamy na przykład dla jednoosobowych koalicji {A} i {B}

$$v(\{A\}) = 900\,, \quad v(\{B\}) = 600\,, \quad v(\{A\} \cup \{B\}) = 1800 > 900 + 600$$

i podobnie jest dla każdej innej pary rozłącznych koalicji. Oznacza to, że zawsze korzystne jest tworzenie większych koalicji, a w szczególności najkorzystniejsze jest stworzenie koalicji złożonej ze wszystkich graczy.

Własność tę nazywamy *superaddytywnością*. Gra kooperacyjna *(N,v)* jest superaddytywna, jeżeli dla każdej pary koalicji *S, T*

$$S \cap T = \varnothing \quad \Rightarrow \quad v(S \cup T) \geq v(S) + v(T).$$

Skoro zaś w grze superaddytywnej warto łączyć koalicje, można oczekiwać, że racjonalni gracze w takiej grze utworzą wielką koalicję *N* i będą dzielić między wszystkich wielkość *v(N)*. Powstaje więc pytanie, jakiego podziału sumy *v(N)* mogą dokonać – i to jest zasadniczy temat teorii gier kooperacyjnych.

Podział w *n*-osobowej grze *(N,v)* to dowolny *n*-wymiarowy wektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ taki, że $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = v(N)$. Jest to zatem wektor złożony z udziałów poszczególnych graczy w sumie wypracowanej przez wielką koalicję – gracz 1 dostaje x_1, drugi x_2 itd. Zbiór wszystkich podziałów w grze *v* oznaczymy przez *P(v)*. (Zauważmy, że jeśli *v* i *w* są grami o tym samym zbiorze graczy *N* i *v(N) = w(N)*, to *P(v) = P(w)*; jednak podział, który jest bardzo sensowny w grze *v*, może być nie do przyjęcia dla graczy w grze *w*).

Rozwiązanie to dowolna funkcja *ρ* określona na zbiorze wszystkich gier kooperacyjnych ze skończonymi zbiorami graczy, przypisująca każdej grze pewien podzbiór zbioru podziałów w tej grze. Zatem dla gry *(N,v)* rozwiązanie tej gry, *ρ(v)*, jest podzbiorem zbioru *P(v)* i składa się z tych podziałów, spośród których w myśl danego rozwiązania gracze powinni wybierać. Rozwiązaniami są na przykład:

- Rozwiązanie egalitarne *e* składające się jedynie z podziału równego, czyli przypisujące każdemu graczowi w każdej grze *(N,v)* wielkość $\frac{v(N)}{n}$.
- Rozwiązanie proporcjonalne *p* dzielące wielkość *v(N)* pomiędzy graczy proporcjonalnie do ich indywidualnych możliwości:

$$p(N,v) = (p_1(v), \ldots p_n(v))\,, \quad p_i(v) = \frac{v(\{i\}) \cdot v(N)}{\sum_{j=1}^{n} v(\{j\})}$$

- Zbiór wszystkich podziałów bliskich równemu – takich, że dla każdej pary graczy *i,j* $|x_i - x_j| \leq \varepsilon$, gdzie ε jest pewną (małą) liczbą dodatnią.
- Zbiór wszystkich podziałów **x** spełniających warunek

$$\forall T \subset N \quad \mathbf{x}_T = \sum_{j \in T} x_j \geq v(T)$$

– czyli takich, przy których *każda* koalicja otrzymuje łącznie co najmniej tyle, ile byłaby w stanie samodzielnie wypracować. To rozwiązanie, o wiele rozsądniejsze i ciekawsze od obu poprzednich, przypisuje każdej grze *v* jej rdzeń, oznaczany przez *C(v)*. Rdzeń jest jednym z najważniejszych i najpowszechniej akceptowanych rozwiązań, wiążą się z nim jednak rozmaite problemy; w szczególności rdzenie wielu gier, nawet superaddytywnych, są puste.

W grze trzech plantatorów podział równy przypisuje każdemu z nich $1066\frac{2}{3}$, podziały bliskie równemu dowolne kwoty od $1066\frac{2}{3} - \frac{2\varepsilon}{3}$ do $1066\frac{2}{3} + \frac{2\varepsilon}{3}$ (ale sumujące się do 3200), podział proporcjonalny daje graczowi A $900 \cdot \frac{32}{23}$, graczowi B $600 \cdot \frac{32}{23}$ i graczowi C $800 \cdot \frac{32}{23}$, natomiast do rdzenia należy każdy wektor $\mathbf{x} = (x_A, x_B, x_C) \in R^3$ taki że

$$900 \leq x_A \leq 1200\,, \quad 600 \leq x_B \leq 1200\,, \quad 800 \leq x_C \leq 1400\,, \quad x_A + x_B + x_C = 3200\,.$$

Rozwiązanie ρ nazywamy wartością, jeżeli dla każdej gry *v* zbiór $\rho(v)$ jest jednoelementowy. Wartość przypisuje zatem każdej grze dokładnie jeden podział w tej grze, a więc jest uniwersalną – tj. dobrze określoną dla każdej gry – *metodą* podjęcia decyzji o podziale zarobku wielkiej koalicji pomiędzy graczy. Gdy zdecydujemy się na dzielenie *v(N)* w sposób zgodny z pewną wartością, nie mamy problemów niejednoznaczności bądź nieistnienia postulowanego podziału, na jakie napotykamy w przypadku rozwiązań wieloelementowych.

Spośród rozwiązań w przykładzie powyżej wartościami są rozwiązanie egalitarne *e* (wartość egalitarna) i rozwiązanie proporcjonalne *p* – w oczywisty sposób każde przypisuje dowolnej grze jeden dobrze określony podział. Jasne jest jednak, że w niektórych grach podział równy jest absurdalny, a łatwo też wskazać przykłady bezsensowności podziału proporcjonalnego. Wobec tego ani rozwiązanie egalitarne, ani proporcjonalne nie jest dobrą na każdą okazję uniwersalną metodą podziału.

Czy zatem istnieje taka metoda – tj. wartość, która w każdej grze prowadzi do podziału zgodnego ze zdrowym rozsądkiem? Wielu teoretyków uważa, że tak, i że jest nią wartość Shapleya – przedmiot tego artykułu.

2. Wartość Shapleya – wyprowadzenie i interpretacja

Zajmijmy się najpierw najprostszym interesującym przypadkiem – grą dwuosobową. Taka gra jest scharakteryzowana przez trzy liczby:

$$a = v(\{1\}), \quad b = v(\{2\}), \quad c = v(\{1,2\})$$

i jest superaddytywna wtedy i tylko wtedy, gdy $c \geq a + b$. Jak gracze powinni podzielić między siebie wielkość c?

W tej kwestii nie ma większych kontrowersji. Oczywiście jeśli nadwyżka powstająca dzięki zawarciu koalicji, $d = c - (a + b)$, jest nieujemna – czyli jeśli gra jest superaddytywna – to każdemu z graczy kwota, jaką jest on w stanie uzyskać samodzielnie, należy się „jak psu kość". Problem podziału sprowadza się więc do podzielenia nadwyżki d. Ta zaś istnieje dzięki współpracy obu graczy; każdy jest jednakowo niezbędny do jej powstania i nie ma żadnych podstaw do twierdzenia, że któryś z nich ma większy udział w jej utworzeniu niż drugi. (Nie oznacza to rzecz jasna, że gracze są równi, ale wszelkie ewentualne nierówności między nimi opisuje różnica $a - b$). Wobec tego nadwyżkę należy podzielić *równo*. Prowadzi to do podziału $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, gdzie

$$x_1 = a + \frac{d}{2} = \frac{v(\{1,2\}) + v(\{1\}) - v(\{2\})}{2} \quad , \quad x_2 = b + \frac{d}{2} = \frac{v(\{1,2\}) + v(\{2\}) - v(\{1\})}{2}.$$

Jest to tak zwane <u>rozwiązanie standardowe</u> gry dwuosobowej. Nazwa nie jest przypadkowa: prawie każda bardziej znana wartość sprowadza się dla gier dwuosobowych do rozwiązania standardowego[2], a praktycznie każde ich interesujące rozwiązanie niebędące wartością zawiera rozwiązanie standardowe (o ile tylko nie jest puste). Co więcej, w charakteryzacjach wartości przez zestawy aksjomatów (por. rozdział 4) często jeden z nich jest właśnie taki, że wartość gry dwuosobowej zawsze winna być rozwiązaniem standardowym tej gry.

Zwróćmy uwagę na pewien prosty algorytm dojścia do rozwiązania standardowego. Koalicja $\{1, 2\}$ może powstać na dwa sposoby: gracz 2 może dołączyć do gracza 1 lub odwrotnie. W tej pierwszej sytuacji gracz 1 sam wypracowuje a, a następnie dołączenie gracza 2 powiększa tę wielkość do c – można więc powiedzieć, że gracz 1 wniósł do koalicji kwotę a, a gracz 2 kwotę $c - a$. Przy odwrotnej kolejności tworzenia koalicji $\{1,2\}$ gracz 2 wnosi do niej b, a gracz 1 $c - b$.

[2] Jedyne znaczące wyjątki to tzw. wartości ważone, zakładające *a priori* nierówności między graczami nieopisane przez funkcję charakterystyczną gry, oraz wartość proporcjonalna (Feldman, 1999).

Ponieważ zaś nie ma powodów do wyróżniania którejkolwiek z tych dwóch kolejności tworzenia koalicji kosztem drugiej, sensowne jest przyjęcie, że obie są jednakowo prawdopodobne. Przy tym założeniu gracz 1 wnosi do koalicji {1,2} średnio

$$\frac{1}{2}\cdot a+\frac{1}{2}\cdot(c-b)=a+\frac{d}{2}$$

(*a* z prawdopodobieństwem 0,5 i *c* – *b* z prawdopodobieństwem 0,5), a gracz 2 wnosi średnio

$$\frac{1}{2}\cdot b+\frac{1}{2}\cdot(c-a)=b+\frac{d}{2}$$

(*b* z prawdopodobieństwem 0,5 i *c* – *a* z prawdopodobieństwem 0,5). Innymi słowy, średni wkład gracza do „wielkiej" – tu: dwuosobowej – koalicji przy losowym porządku jej tworzenia to dokładnie to, co daje mu rozwiązanie standardowe.

Oczywiście jednak to pojęcie „średniego wkładu do wielkiej koalicji" jest dobrze określone nie tylko w grze dwuosobowej, ale w dowolnej grze kooperacyjnej. Średnia jest wyliczana po wszystkich możliwych kolejnościach powstawania koalicji *N*, czyli wszystkich permutacjach (uporządkowaniach) zbioru graczy. Zaś przy ustalonym uporządkowaniu wkładem gracza jest to, co wnosi on do koalicji złożonej ze wszystkich graczy poprzedzających go w tym uporządkowaniu. Jeśli na przykład gracz 4 jest pierwszy w danym uporządkowaniu, to jego wkład wynosi *v(*{4}*)* (tyle, ile wypracowuje sam, czyli ile wnosi do koalicji pustej), a jeżeli poprzedzają go gracze 3 i 1 i nikt więcej, to jego wkład wynosi *v(*{1,3,4}*)* – *v(*{1,3}*)* – tyle, o ile po jego dołączeniu wzrasta możliwa do wypracowania wielkość.

W grze trzyosobowej wszystkich możliwych uporządkowań graczy jest sześć. Wkłady graczy do koalicji poprzedników przy wszystkich uporządkowaniach w grze producentów truskawek przedstawia tabelka poniżej: na przykład, gdy wielka koalicja jest tworzona w kolejności B, C, A, wkładem gracza B jest *v(*{B}*)* = 600, wkładem gracza C *v(*{B,C}*)* – *v(*{B}*)* = 2000 – 600, a gracza A *v(*{A,B,C}*)* – *v(*{B,C}*)* = 3200 – 2000. Średnie wkłady podano w ostatnim wierszu tabelki – powstają one przez wysumowanie odpowiedniej kolumny i podzielenie sumy przez liczbę możliwych ustawień graczy.

Kolejność	Wkłady graczy		
	A	B	C
A, B, C	900	900	1400
A, C, B	900	1200	1100
B, A, C	1200	600	1400
B, C, A	1200	600	1400
C, A, B	1200	1200	800
C, B, A	1200	1200	800
Średnia	1100	950	1150

Uzyskany w ten sposób w grze *(N,v)* wektor *n* średnich wkładów zawsze jest podziałem w tej grze: przy każdym uporządkowaniu suma wkładów wszystkich graczy jest oczywiście równa *v(N)*, a więc suma średnich po wszystkich uporządkowaniach jest taka sama. Podział ten nazywamy wartością Shapleya gry *v* i oznaczamy przez $\varphi(v)$. Składowe tego wektora to wartości Shapleya poszczególnych graczy – ich udziały w podziale zadanym przez wartość Shapleya.

W grze z wkładami graczy takimi jak w tabeli mamy zatem

$$\varphi_A(v)=1100 \quad , \quad \varphi_B(v)=850 \quad , \quad \varphi_C(v)=1150$$

i w ten sposób podzielą kwotę *v(N)* = 3200 trzej producenci truskawek, jeśli uzgodnią zastosowanie przy podziale wartości Shapleya.

Formalnie, dla dowolnej gry *(N,v)* jej wartość Shapleya $\varphi(v)$ jest dana wzorem

$$\varphi(v)=(\varphi_1(v),\varphi_2(v),\ldots,\varphi_n(v)),$$

$$\varphi_i(v)=E_\Pi(v(H_{\pi,i})-v(H_{\pi,i}\setminus\{i\}))=\sum_{\pi\in\Pi}\frac{v(H_{\pi,i})-v(H_{\pi,i}\setminus\{i\})}{n!} \qquad dla \qquad i=1,2,\ldots n,$$

gdzie Π jest zbiorem wszystkich permutacji zbioru *N*, E oznacza wartość oczekiwaną, a przy ustalonej permutacji $\pi\in\Pi$ przez $H_{\pi,i}$ oznaczamy zbiór tych wszystkich graczy, którzy w tej permutacji występują nie później niż gracz *i* (czyli $H_{\pi,i}=\pi^{-1}(\{1,2,\ldots\pi(i)\})$.

Samo określenie wartości φ sugeruje jej naturalną interpretację probabilistyczną, którą sformułował już Shapley w swej oryginalnej pracy (Shapley, 1953). Gracze zbierają się w losowej kolejności, aby utworzyć wielką koalicję *N*, przy czym każda kolejność π jest jednakowo prawdopodobna. Przy tej kolejności dołączenie gracza numer *i*, który zjawia się na miejscu $\pi(i)$, skutkuje powstaniem koalicji $H_{\pi,i}$. Wkładem gracza *i* w tę koalicję jest różnica między jej zarobkami a tym, co mogła wypracować koalicja bez niego, czyli $v(H_{\pi,i}) - v(H_{\pi,i}\setminus\{i\})$. Zatem wartość Shapleya gracza *i* w grze *v* to wartość oczekiwana jego wkładu w koalicję jego poprzedników przy losowym uporządkowaniu wszystkich graczy.

Różnych uporządkowań, w których wszyscy gracze z ustalonej koalicji $T \ni i$ poprzedzają gracza *i*, a wszyscy gracze spoza koalicji *T* występują później niż gracz *i*, jest $(t-1)!(n-t)!$, gdzie *t* to liczba graczy w koalicji *T*, a *n* – liczba wszystkich graczy w grze. Wobec tego sumując po koalicjach zamiast po permutacjach otrzymujemy prostszą postać wzoru na wartość Shapleya:

$$\varphi_i(v)=\sum_{T\subseteq N,T\ni i}\frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}\cdot(v(T)-v(T\setminus\{i\})), \tag{1}$$

gdzie T jest dowolną koalicją zawierającą gracza i, a współczynnik $\frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}$, przez który mnoży się wkład gracza i w koalicję T, to prawdopodobieństwo wystąpienia takiego uporządkowania, w jakim gracza i poprzedzają wszyscy inni gracze z T i tylko oni.

Do wartości Shapleya można także dojść zupełnie inną drogą – przez odpowiedni podział pomiędzy wszystkich graczy *dywidend koalicji* w grze. Pojęcie to zdefiniował jako pierwszy Harsányi (1959) następującym wzorem rekurencyjnym:

$$\Delta_v(T) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } T = \varnothing, \\ v(T) - \sum\limits_{U \subset T} \Delta_v(U) & \text{gdy } T \neq \varnothing. \end{cases}$$

$\Delta_v(T)$ to dywidenda koalicji T w grze v; z jej określenia widać, że dla koalicji jednoosobowych mamy $\Delta_v(\{j\}) = v(\{j\})$, dla dwuosobowych $\Delta_v(\{j,k\}) = v(\{j,k\}) - v(\{j\}) - v(\{k\})$ (ale dla większych koalicji wzory dywidend są coraz bardziej skomplikowane). Ponieważ zaś dla każdej gry (N,v)

$$\sum_{T \subseteq N} \Delta_v(T) = v(N)$$

(suma dywidend wszystkich koalicji jest równa wypłacie wielkiej koalicji), każda metoda podziału dywidend pomiędzy koalicjantów wyznacza pewną wartość. Okazuje się, że jeżeli dywidendę każdej koalicji podzielimy równo między wszystkich jej uczestników, to otrzymamy podział równy wartości Shapleya:

$$\forall i = 1, 2, \ldots n \quad \sum_{T \ni i} \frac{\Delta_v(T)}{t} = \varphi_i(v). \tag{2}$$

(Podobnie jak poprzednio, t jest tu liczbą graczy w koalicji T).

3. Właściwości

Od czasu zdefiniowania wartości Shapleya i sformułowania jej pierwszej charakteryzacji aksjomatycznej minęło 55 lat. Przez ten czas napisano na jej temat zapewne kilkaset prac, niezmiennie zajmuje poczesne miejsce wśród rozwiązań gier i bezsprzecznie pierwsze wśród ich wartości, jest przedmiotem każdego wykładu teorii gier kooperacyjnych, a także dorobiła się poważnych zastosowań. W tym rozdziale zestawimy najistotniejsze własności wartości Shapleya, które o tym zadecydowały.

Dwie z nich są bezpośrednim wnioskiem z wcześniejszych rozważań.

1. Efektywność (**E**): Dla każdej gry *(N,v)* $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(v) = v(N)$.

Ponieważ w tym artykule efektywność zakładamy już przy definiowaniu wartości (wartość każdej gry jest podziałem w tej grze), ta własność w żaden sposób nie wyróżnia wartości Shapleya spośród innych. Tradycyjnie jednak w literaturze od wartości często nie wymaga się efektywności – tj. wartością gry n-osobowej może być dowolny wektor $\mathbf{x} \in R^n$ – i wobec tego **E** bywa traktowana jako dodatkowa własność charakteryzująca niektóre wartości, w tym φ. Występuje ona więc w licznych znanych charakterystykach aksjomatycznych wartości Shapleya i przytaczając te wyniki będziemy ją uwzględniać, aby nie zmieniać klasycznych nieraz sformułowań twierdzeń.

2. Rozwiązanie standardowe dla gier dwuosobowych (**ST2**):

Dla każdej gry dwuosobowej v $\varphi(v)$ jest rozwiązaniem standardowym v.

Następna grupa własności jest związana z rolami, jakie odgrywają gracze w danej grze kooperacyjnej.

Gracz i jest graczem nieistotnym w grze v, jeżeli do każdej koalicji, do której nie należy, wnosi dokładnie tyle, ile jest w stanie wypracować samodzielnie:

$$\forall T \subset N \quad (i \notin T \quad \Rightarrow \quad v(T \cup \{i\}) = v(T) + v(\{i\}).$$

Oznacza to brak „efektu synergii" – nie jest istotne, czy gracz i dołączy do jakiejkolwiek koalicji, czy nie, bo tak czy owak uzyskać da się tę samą sumę, $v(T) + v(\{i\})$.

Szczególnym przypadkiem gracza nieistotnego jest gracz zerowy – taki, który jest nieistotny i dodatkowo sam nie jest w stanie wypracować nic ($v(\{i\}) = 0$), wobec czego nic nie wnosi też do żadnej koalicji:

$$\forall T \subset N \ v(T \cup \{i\}) = v(T).$$

Dwaj gracze i,j są wymienni w grze v, jeżeli każda koalicja niezawierająca żadnego z nich zyskuje na przystąpieniu jednego z nich tyle samo, ile na przystąpieniu drugiego:

$$\forall T \subset N \quad (i, j \notin T \quad \Rightarrow \quad v(T \cup \{i\}) = v(T \cup \{j\})).$$

Gracze wymienni są jednakowo pożyteczni dla każdej koalicji, więc pełnią w grze jednakowe role. (Gdyby plantator B miał przy tej samej drodze sąsiada B", który też zebrał 300 łubianek i też nie ma wozu dostawczego, gracze B i B" byliby wymienni w grze czteroosobowej).

Bezpośrednio z wzoru na wartość Shapleya wynikają następujące jej własności:

3. Własność gracza nieistotnego (WGN):

Jeżeli i jest graczem nieistotnym w grze v, to $\varphi_i(v) = v(\{i\})$.

4. Własność gracza zerowego (WG0):

Jeżeli i jest graczem zerowym w grze v, to $\varphi_i(v) = 0$.

5. Równoprawność (**R** – jednakowe traktowanie graczy wymiennych):

Jeżeli i,j są graczami wymiennymi w grze v, to $\varphi_i(v) = \varphi_j(v)$.

Wszystkie te własności są całkowicie zgodne z intuicją i z elementarnym pojęciem sprawiedliwości. Jeśli metoda podziału jest nastawiona nie na redystrybucję (na przykład w celu wspomożenia najsłabszych), tylko na wynagrodzenie graczy adekwatnie do ich „zasług" w tworzeniu $v(N)$, własności gracza zerowego i nieistotnego są zupełnie oczywistymi postulatami. Równoprawność tym bardziej rozumie się sama przez się – chyba żeby ktoś potrafił podać powód, dla którego jeden z graczy pełniących identyczne role w grze miałby być potraktowany przy podziale inaczej niż inny.

Własnością nieco mocniejszą niż równoprawność jest

6. Symetria (**S**): Dla każdej gry (N,v) i każdej permutacji π zbioru N zachodzi

$$\varphi_i(\pi(v)) = \varphi_{\pi(i)}(v) \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots n,$$

gdzie $\pi(v)$ jest grą (N,w) określoną następująco:

$$w(T) = v(\pi(T)) \text{ dla każdej koalicji } T \subseteq N.$$

Symetria wartości oznacza, że przenumerowanie graczy bądź zmiana ich nazw – operacja niemająca wpływu na ich pozycję w grze – nie ma wpływu też na ich wartości. Innymi słowy, jeżeli wartość jest symetryczna, to suma, jaką przydzieli ona danemu graczowi, nie zależy od tego, jak ów gracz się nazywa (bądź który ma numer), tylko od jego roli w grze. Z tego powodu symetria ostatnio bywa często zwana także *anonimowością*.

Jeżeli wartość jest symetryczna, to w oczywisty sposób jest równoprawna, ponieważ jeżeli permutacja π sprowadza się do zamiany graczy wymiennych w grze v, to nie zmienia ona gry: $\pi(v) = v$. Z drugiej strony przykłady wartości równoprawnych, ale nie symetrycznych, są dosyć sztuczne. W wielu twierdzeniach charakteryzujących wartości poprzez układ aksjomatów występuje postulat symetrii, zazwyczaj jednak można zastąpić go słabszym warunkiem równoprawności. Tak jest również w klasycznym twierdzeniu Shapleya (1953).

Kolejne własności opisują związki między wartościami *różnych* gier kooperacyjnych.

Gry takie można mnożyć przez liczby, a gry na tym samym zbiorze graczy także dodawać. <u>Suma</u> gier (N,v) i (N,w) to gra $v + w = z$ określona wzorem

$$z(T) = v(T) + w(T) \text{ dla każdej koalicji } T \subseteq N\,,$$

natomiast gra $y = c \cdot v$ (gdzie c jest dowolną liczbą) jest dana wzorem $y(T) = cv(T)$ dla każdej koalicji T. Pomnożenie gry przez liczbę jest zatem równoznaczne z przeskalowaniem dochodów wszystkich koalicji – np. z wyrażeniem ich w euro zamiast w złotówkach. Natomiast w wyniku dodania dwóch lub więcej gier otrzymujemy grę opisującą możliwe łączne dochody każdej z koalicji z udziału we wszystkich tych grach.

Wartość Shapleya reaguje na te operacje w łatwy do przewidzenia sposób, opisany przez następujące własności.

7. Addytywność (**A**): Dla każdych gier (N,v) i (N,w) $\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w)$.

8. Jednorodność (**J**): Dla każdej gry v i każdego $c \in R$ $\varphi(c \cdot v) = c \cdot \varphi(v)$.

Addytywność wartości oznacza, że w wyniku podziału zgodnie z tą wartością najpierw kwoty $v(N)$ w grze v, a następnie $w(N)$ w grze w, każdy z graczy otrzyma tyle samo, ile po zagregowaniu v i w w jedną grę i jednorazowym rozdzieleniu sumy $v(N) + w(N)$. Jest więc obojętne, czy rozdzielimy według wartości Shapleya (i tak samo każdej wartości addytywnej) np. kwoty z gier rozgrywanych przez tych samych graczy w kolejnych miesiącach, czy też posługując się tą samą wartością dokonamy jednego podziału na koniec roku. Warto wspomnieć, że choć ta własność wydaje się oczywista, niektóre interesujące wartości nie są addytywne.

Jednoczesne spełnianie własności **A** i **J** to **liniowość** (**L**).

Inna własność wartości Shapleya jest następująca:

9. „Fairness” (**F**):

Jeżeli gracze i,j są wymienni w grze (N,w), to dla każdej gry (N,v) zachodzi równość

$$\varphi_i(v + w) - \varphi_i(v) = \varphi_j(v + w) - \varphi_j(v)$$

Oznacza to, że w wyniku dodania gry, w której dwaj gracze są wymienni, obaj zawsze zyskają (w sensie wartości) tyle samo. Własność tę ma oczywiście każda wartość równoprawna i addytywna, ale z samej **F** nie wynika ani **R**, ani **A**.

Własności *monotoniczności* wartości polegają na tym, że im bardziej gracz jest przydatny różnym koalicjom, tym więcej przypisuje mu wartość. Oczywiście sensowna metoda podziału powinna mieć tego typu własności, a porównania takie można czynić zarówno między różnymi graczami w tej samej grze, jak i pomiędzy sytuacją tego samego gracza w różnych grach. Z wzoru (1) łatwo wyprowadzić następujące własności wartości Shapleya:

10. Lokalna monotoniczność (**LM**):

Jeżeli dla każdej koalicji *S* niezawierającej gracza *i* ani *j*

$$v(S \cup \{i\}) \geq v(S \cup \{j\}), \text{ to } \varphi_i(v) \geq \varphi_j(v).$$

(Z tej własności natychmiast wynika równoprawność).

11. Monotoniczność (**M**):

Jeżeli (N,v) i (N,w) mają tę własność, że dla pewnego gracza j i dla każdej niezawierającej go koalicji T zachodzi

$$v(T \cup \{j\}) - v(T) \geq w(T \cup \{j\}) - w(T),$$

to $\varphi_j(v) \geq \varphi_j(w)$.

12. Wyznaczanie przez wkłady w koalicje („marginalizm" – **WW**):

Jeżeli dla pewnego gracza j w grach (N,v) i (N,w) dla każdej koalicji $T \not\ni j$ zachodzi równość

$$v(T \cup \{j\}) - v(T) = w(T \cup \{j\}) - w(T),$$

to $\varphi_j(v) = \varphi_j(w)$.

Lokalna monotoniczność to kolejna bardzo intuicyjna własność, wspólna zresztą dla prawie wszystkich interesujących wartości[3]. Własnością bardziej fundamentalną i mającą istotniejsze konsekwencje jest jednak monotoniczność **M**. Wiąże ona bowiem z sobą wartości gracza w grach, w których zachodzą odpowiednie nierówności pomiędzy wkładami tego gracza w koalicje, ale poza tym być może zupełnie do siebie niepodobnych.

Z monotoniczności natychmiast wynika w szczególności własność **WW**, ale także różne interesujące równości i nierówności między wartościami rozmaitych gier. Przyjrzyjmy się jeszcze raz grze trzech producentów truskawek i rozpatrzmy dwie jej modyfikacje:

- v': grę, w której producent A zebrał $300 + a$ łubianek $(a > 0)$,
- v'': grę, w której opłata targowa została obniżona o $\delta > 0$,

przy czym w każdym przypadku pozostałe dane pozostają bez zmian. Z monotoniczności wartości Shapleya wynikają następujące bardzo rozsądne związki między wartościami gier v, v' i v'':

[3] Wyjątkiem są ważone wartości Shapleya (por. rozdział 8), te jednak z założenia dopuszczają nierówności między graczami inne niż opisane przez funkcję charakterystyczną gry.

1. $\varphi_A(v') \geq \varphi_A(v)$ – większe zbiory u danego gracza prowadzą do otrzymania przezeń większej sumy przy podziale;
2. $\varphi_B(v') = \varphi_B(v)$ – wartość gracza B nie zależy od zbiorów u gracza A, ponieważ wkłady gracza B we wszystkie koalicje pozostają bez zmian;
3. $\varphi_A(v'') = \varphi_A(v)$ oraz $\varphi_B(v'') = \varphi_B(v)$ – ponieważ obniżenie placowego na targu zmienia tylko wkłady do koalicji gracza C, ale nie wkłady graczy A i B. Stąd
4. $\varphi_C(v'') = 1150 + \delta$ – cała korzyść z tytułu obniżenia opłaty targowej idzie do kieszeni właściciela samochodu dostawczego.

Oczywiście stwierdzenia te są prawdziwe także dla każdej innej monotonicznej wartości.

Dla dowolnej gry (N,v) jej gra dualna (N,v^*) jest określona w następujący sposób:

$$v^*(S) = v(N) - v(N \backslash S) \text{ dla każdej koalicji } S \subseteq N.$$

13. Samodualność (**D**): Dla każdej gry (N,v) $\varphi(v) = \phi(v^*)$.

Jeszcze innej natury jest własność *zrównoważonych wkładów* opisująca pewien związek między wartościami gry v i gier otrzymanych z niej przez *usunięcie* jednego z graczy. Dla gry (N,v) i koalicji $S \subset N$ zdefiniujemy obcięcie gry v do koalicji S, $(S,v|_S)$ jako grę, w której zbiorem graczy jest S, a wartości funkcji charakterystycznej $v|_S$ na podzbiorach $T \subseteq S$ są takie same jak wartości funkcji v: $\forall T \subseteq S \quad v|_S\ (T) = v(T)$. Gra $v|_S$ jest zatem „podgrą" gry v rozgrywaną przez graczy ze zbioru S.

Okazuje się, że dla wartości Shapleya zachodzi

14. Własność zrównoważonych wkładów (**ZW**):

Dla każdej gry (N,v) i każdych dwóch graczy $i, j \in N$ zachodzi równość

$$\varphi_i(v) - \varphi_i(v|_{N \backslash \{j\}}) = \varphi_j(v) - \varphi_j(v|_{N \backslash \{i\}}).$$

Innymi słowy, usunięcie z gry gracza j zmienia wartość Shapleya gracza i o tę samą wielkość, o którą usunięcie gracza i zmieniłoby wartość gracza j. Na przykład w grze producentów truskawek mamy w grze bez udziału gracza C

$$\varphi_A(v|_{\{A,B\}}) = 1050, \quad \varphi_B(v|_{\{A,B\}}) = 750 = \varphi_B(v) - 200,$$

czyli wartość Shapleya gracza B jest o 200 mniejsza niż w grze v, zaś w grze bez udziału gracza B

$$\varphi_A(v|_{\{A,C\}}) = 1050\,, \quad \varphi_C(v|_{\{A,C\}}) = 950 = \varphi_C(v) - 200\,,$$

czyli tutaj z kolei C traci 200 w porównaniu z wartością gry v. Analogiczna równość zachodzi także dla każdej pary graczy.

W odróżnieniu od poprzednich własności, typowych dla wielu różnych wartości, własność zrównoważonych wkładów jest charakterystyczna wyłącznie dla wartości Shapleya (por. twierdzenie 4 w następnym rozdziale).

4. Charakterystyki aksjomatyczne

Zestawiona w poprzednim rozdziale długa lista korzystnych własności wartości Shapleya może robić wrażenie, narzuca się jednak pytanie, czy przypadkiem jakaś inna wartość – a może więcej różnych wartości – nie ma tych samych zalet i być może jeszcze jakichś dodatkowych. Na tego typu pytania odpowiedź dają charakterystyki aksjomatyczne, tj. twierdzenia głoszące, iż jeżeli jakiś obiekt – tu: wartość – spełnia pewien układ warunków (aksjomatów), a więc ma pewne własności, to jest to obiekt konkretnej postaci.

Dla wartości Shapleya istnieje kilka różnych takich charakterystyk, w których zakłada się tylko niektóre spośród własności wymienionych w rozdziale 3. Jest ona zatem jedyną wartością gier kooperacyjnych mającą wszystkie te własności, a nawet jedyną mającą pewne wybrane zestawy tych własności.

Pierwszą charakteryzację aksjomatyczną podał sam odkrywca wartości Shapleya.

Twierdzenie 1 (Shapley, 1953)
Jedyną efektywną, addytywną i symetryczną wartością gier kooperacyjnych mającą własność gracza zerowego jest wartość Shapleya.

Powyższa wersja tego klasycznego twierdzenia jest dziś najczęściej spotykaną w podręcznikach; oryginalne sformułowanie Shapleya jest równoważne, ale założenia **E** i **WG0** zostały w nim połączone w jeden bardziej skomplikowany warunek, wymagający dodatkowo wprowadzenia pojęcia nośnika gry. Z drugiej strony łatwo widać, że w dowodzie jednoznaczności symetrię można zastąpić równoprawnością, uzyskując nieco mocniejszy wynik.

Dla zilustrowania sposobu dowodzenia tego typu wyników podamy tutaj – jako jedyny w tym artykule – skrótowy dowód tego twierdzenia.

Szkic dowodu. Wiemy z poprzedniego rozdziału, że wartość Shapleya ma własności **E**, **A**, **S** i **WG0**. Pozostaje dowieść, że każda wartość o tych własnościach jest identyczna z wartością Shapleya.

Niech ψ będzie dowolną wartością spełniającą **E**, **A**, **R** i **WG0**. Ustalmy zbiór graczy N i określmy dla dowolnej koalicji $T \subset N$ następującą grę jednomyślności koalicji T:

$$u_T(S) = \begin{cases} 1 & gdy \quad S \supseteq T, \\ 0 & gdy \quad T \setminus S \neq \phi. \end{cases}$$

W takiej grze do podziału jest 1 i tyle też może sobie zapewnić koalicja T lub każda inna, która ją zawiera; każda koalicja niezawierająca wszystkich graczy z T wypracowuje 0. Wszyscy gracze spoza koalicji T są zerowi w u_T, więc ze względu na **WG0** dla każdego $j \notin T$ zachodzi $\psi_j(u_T) = 0$. Natomiast wszyscy gracze z koalicji T są w u_T wymienni, więc z warunku **R** (a tym bardziej z symetrii) wynika, że ich wartości ψ_k muszą być jednakowe. Ponieważ zaś na mocy **E** $\sum_{j=1}^{n} \psi_j(u_T) = u_T(N) = 1$, wynika stąd

$$\psi_j(u_T) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } j \notin T, \\ \dfrac{1}{t} & \text{gdy } j \in T. \end{cases}$$

Analogiczne rozumowanie zastosowane do gry $c \cdot u_T$ (gdzie c jest dowolną stałą) daje

$$\psi_j(c \cdot u_T) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } j \notin T, \\ \dfrac{c}{t} & \text{gdy } j \in T. \end{cases}$$

Dla takich gier zatem wszystkie ich wartości spełniające założenia twierdzenia są jednakowe, a więc identyczne z wartością Shapleya.

Wiadomo ponadto, że gry jednomyślności wszystkich $2^n - 1$ niepustych koalicji tworzą bazę $(2^n - 1)$-wymiarowej przestrzeni wektorowej wszystkich n-osobowych gier kooperacyjnych. Oznacza to, że każdą grę n-osobową można w dokładnie jeden sposób przedstawić jako kombinację liniową gier jednomyślności, tzn. dla każdej gry v istnieje dokładnie jedna rodzina współczynników $(c_T)_{T \subseteq N}$ taka, że:

$$v(S) = \sum_{T \subseteq N} c_T \cdot u_T(S) \text{ dla każdej koalicji } S \subseteq N.$$

(Współczynnikami tymi są znane nam już dywidendy Harsányiego: $c_T = \Delta_v(T)$).

Ale zarówno ψ, jak i φ z założenia są addytywne, więc dla każdej gry v

$$\psi(v) = \psi(\sum_{T \subseteq N} c_T u_T) = \sum_{T \subseteq N} \psi(c_T u_T) = \sum_{T \subseteq N} \varphi(c_T u_T) = \varphi(\sum_{T \subseteq N} c_T u_T) = \varphi(v),$$

a zatem Ψ jest wartością Shapleya.

Twierdzenie 1 mówi, że jedyną metodą umożliwiającą podział w dowolnej grze *(N,v)* wielkości *v(N)* pomiędzy graczy w taki sposób, by gracze zerowi nigdy nie otrzymywali nic, gracze wymienni zawsze otrzymywali tyle samo, a dodatkowo wielkości uzyskiwane przez graczy w podziale *(v + w)(N)* były sumami wielkości uzyskiwanych przez nich w podziałach *v(N)* i *w(N)*, jest podział zgodnie z wartością φ. Wystarczy zatem zażądać spełniania przez metodę podziału dwóch zdroworozsądkowych postulatów **R** i **WG0** oraz addytywności, aby jednoznacznie określić tę metodę. (Przypomnijmy, że w myśl przyjętej przez nas definicji wartości warunek **E** jest spełniony przez każdą wartość).

Ten prosty i elegancki wynik nie do końca zadowolił tych, którzy uważają addytywność **A** za warunek sztuczny bądź techniczny, niemający uzasadnienia na gruncie pojęć sprawiedliwości podziału. Udowodniono jednak, że wartość Shapleya daje się uzyskać także bez postulowania addytywności. Bezsprzecznie najważniejsze i najpiękniejsze twierdzenie na ten temat udowodnił Peyton Young.

Twierdzenie 2 (Young, 1985)

Jedyną efektywną i symetryczną wartością gier kooperacyjnych mającą własność wyznaczania przez wkłady w koalicje jest wartość Shapleya.

Także w twierdzeniu 2 warunek **S** można zastąpić przez **R**. Ponieważ zaś **WW** wynika wprost z mocniejszej, ale mającej bardziej naturalną interpretację własności **M**, twierdzenie Younga często występuje w nieco słabszej wersji:

Jedyną monotoniczną, efektywną i symetryczną (bądź równoprawną) wartością gier kooperacyjnych jest wartość Shapleya.

Ten zestaw warunków – **E**, **M** i **R** – jest chyba najbardziej naturalny i zgodny ze zdrowym rozsądkiem spośród znanych dotychczas charakterystyk wartości φ. Kluczowe znaczenie ma tu oczywiście mocny, ale dobrze uzasadniony postulat monotoniczności. Zauważmy, że w tym twierdzeniu nie trzeba nawet zakładać własności gracza zerowego – można ją bowiem dość prosto udowodnić korzystając z trzech zakładanych.

Poniżej przedstawimy także dwie inne charakterystyki aksjomatyczne wartości φ, w których niektóre zakładane własności są mniej oczywiste od postulatów Shapleya i Younga, za to bądź są słabsze, bądź dają bardziej zwięzłą charakterystykę wartości Shapleya.

Twierdzenie 3 (van den Brink, 2001)

Wartość gier kooperacyjnych ma własności **E**, **F** i **WG0** wtedy i tylko wtedy, gdy jest wartością Shapleya.

Twierdzenie 4 (Myerson, 1977)

Wartość gier kooperacyjnych ma własności **E** i **ZW** wtedy i tylko wtedy, gdy jest wartością Shapleya.

Własność **F** zastępuje mocniejszą od niej koniunkcję addytywności i równoprawności. Natomiast własność **ZW**, choć nie ma oczywistej interpretacji z punktu widzenia sensowności metody podziału, jest o tyle interesująca, że samodzielnie charakteryzuje wartość Shapleya: własności tej nie ma *żadna* inna wartość gier kooperacyjnych.

5. Niektóre przypadki szczególne

W pewnych szczególnych grach lub klasach gier wartość Shapleya bądź przyjmuje postać znacznie prostszą niż (1) i (2), bądź istnieje prosty algorytm wyliczania wartości każdego gracza. Poniżej podamy parę przykładów.

5.1. Gry utrzymania sieci

Każdy z gospodarzy mieszka w jednym z węzłów sieci dróg łączących jego obejście z centrum wsi. Drogi te tworzą drzewo, tzn. od każdego gospodarza do centrum wsi można dojechać tylko jedną trasą. Każdy odcinek drogi jest scharakteryzowany przez liczbę osobogodzin pracy niezbędną do odśnieżenia go. Jak sprawiedliwie rozdzielić pomiędzy mieszkańców pracę przy odśnieżaniu dróg we wsi?

Sytuację tę opisuje gra kooperacyjna w, w której graczami są wszyscy gospodarze, a dla każdej koalicji T $w(T)$ jest liczbą osobogodzin pracy niezbędną do odśnieżenia wszystkich dróg, którymi gracze z tej koalicji dojeżdżają do centrum.

Ponieważ niektórzy gracze mogą korzystać z tych samych dróg, ta gra nie jest superaddytywna, lecz *subaddytywna*, tzn. spełnia warunek

$$S \cap T = \varnothing \quad \Rightarrow \quad w(S \cup T) \le w(S) + w(T) \;;$$

jest to typowe dla sytuacji, w której dzielone pomiędzy graczy są nie dochody, tylko *obciążenia*. Zwróćmy jednak uwagę na to, że w definicji wartości Shapleya nigdzie nie zakłada się superaddytywności, a wzory (1) i (2) w oczywisty sposób można stosować dla każdej gry kooperacyjnej. (To samo dotyczy zresztą każdej innej wartości gier).

Okazuje się, że wartość Shapleya gry *w* najłatwiej wyznaczyć podając konkretny sposób rozdzielenia pracy między gospodarzy. Jest on opisany następującym algorytmem:

- wszyscy gracze równocześnie rozpoczynają pracę w centrum wsi,
- każdy pracuje na nieodśnieżonym odcinku drogi do własnego gospodarstwa,
- każdy kończy pracę w chwili, gdy cała droga od centrum do jego gospodarstwa jest odśnieżona.

5.2. „Bankructwo"

Zbankrutował przedsiębiorca zadłużony u n wierzycieli na kwoty $d_1,d_2,...,d_n$. Masa upadłościowa jest warta E i nie wystarcza na pokrycie wszystkich długów, tj. $E < D = \sum_{i=1}^{n} d_i$. Jak rozdzielić masę upadłościową pomiędzy wierzycieli?

Jako pierwszy przychodzi tu na myśl podział proporcjonalny ($x_i = d_i \cdot \frac{E}{D}$), warto jednak zauważyć, że w praktyce często stosowane są inne reguły podziału, zaś niektóre z nich mają związki z rozwiązaniami gier kooperacyjnych.

Sytuację tę opisuje gra kooperacyjna „bankructwo", w której graczami są wszyscy wierzyciele, a funkcja charakterystyczna jest następująca:

$$b(T) = (E - \sum_{j \notin T} d_j)^+ = \max(0, E - \sum_{j \notin T} d_j),$$

tzn. *b(T)* jest sumą, jaką koalicja *T* może sobie zagwarantować bez udawania się do sądu, czyli spłaciwszy – na ile to możliwe – wszystkich pozostałych graczy.

Wartość Shapleya gry *b* nie jest może najbardziej polecanym rozwiązaniem w tym przypadku, ale ma interesującą interpretację. Widzieliśmy w rozdziale 3, że φ jest wartością samodualną. Zas gra dualna gry *b* jest postaci

$$b^*(T) = b(N) - b(N \setminus T) = E - (E - \sum_{j \in T} d_j)^+ = min(E, \sum_{j \in T} d_j).$$

Zatem *b*(T)* to suma, jaką koalicja *T* uzyska od syndyka masy upadłościowej, jeżeli przekona go, by to ją spłacił w pierwszej kolejności. Ponieważ zaś $\varphi(b) = \varphi(b^*)$ (na mocy **D**), wartość Shapleya gracza w grze *b* to wartość oczekiwana kwoty, jaką otrzyma, jeśli wierzyciele zjawiają się u syndyka w losowej kolejności, a ten wypłaca im całość ich wierzytelności w kolejności zgłoszeń, dopóki starczy masy upadłościowej.

5.3. Wartości gier wypukłych

Jak zauważyliśmy we wprowadzeniu, istnieją gry – nawet superaddytywne – które mają puste rdzenie, czyli w których nie da się podzielić wielkości *v(N)* w taki sposób, by każda koalicja *T* uzyskała łącznie co najmniej *v(T)*. W takiej grze zatem żaden podział, w tym też *φ(v)*, nie może całkowicie zadowolić każdej koalicji. Przykładem jest następująca gra:

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } s < n-1, \\ 1 & \text{gdy } s \geq n-1, \end{cases}$$

w której wszyscy gracze są wymienni, więc dla każdego gracza *j* $\varphi_j(v) = \frac{1}{n}$ i każda *(n* – 1*)*-osobowa koalicja *T* uzyskuje łącznie $\frac{n-1}{n} < v(T)$.

Gdy jednak gra ma następującą własność rosnących wkładów:

$$\forall T, U \subseteq N \; \forall i \in N \; (T \subset U, i \in T \Rightarrow v(T) - v(T - \{i\}) \leq v(U) - v(U - \{i\})),$$

to ten problem nie występuje. Własność rosnących wkładów oznacza, że każdy gracz wnosi do większej (w sensie zawierania) koalicji co najmniej tyle, ile do mniejszej. Gry o tej własności nazywamy grami wypukłymi.

Twierdzenie 5 (Ichiishi, 1981)

Jeżeli gra *(N,v)* jest wypukła, to dla każdej koalicji $T \subset N$

$$\sum_{j \in T} \varphi_j(T) \geq v(T).$$

Innymi słowy, wartość Shapleya gry wypukłej zawsze należy do rdzenia tej gry.

6. Zastosowanie w problemie podziału kosztów

Prawdopodobnie najczęściej spotykanym w praktyce zastosowaniem wartości Shapleya jest użycie jej jako metody podziału kosztów wspólnych przedsięwzięć. Wyobraźmy sobie na przykład kilka gmin zamierzających wybudować wspólny wodociąg lub trójkę znajomych biorących jedną taksówkę z dworca po powrocie do rodzinnego miasta. Jeśli koszt takiego wodociągu czy taksówki jest niższy od sumy kosztów, jakie poniosłyby wszystkie strony zapewniając sobie potrzebne dobro czy usługę samodzielnie, powstaje pole do współpracy – zapewnienia jej sobie wspólnie i następnie rozdzielenia (mniejszych) kosztów.

Sytuację taką opisuje gra kosztów *(N,c)*, w której *N* jest zbiorem graczy – stron ewentualnie zainteresowanych wspólnym przedsięwzięciem, a dla każdej koalicji *T* *c(T)* jest *najmniejszym* kosztem, jakim ta koalicja może zapewnić sobie potrzebne jej dobro/usługę.

Gdy na przykład gracz A potrzebuje sześciu puszek piwa, a gracz B dwunastu, przy czym pojedyncza puszka kostuje 3 zł, a zgrzewka z 20 puszkami – 50 zł, mamy

$$c(\{A\}) = 18\,, \quad c(\{B\}) = 36\,, \quad c(\{A,B\}) = 50\,,$$

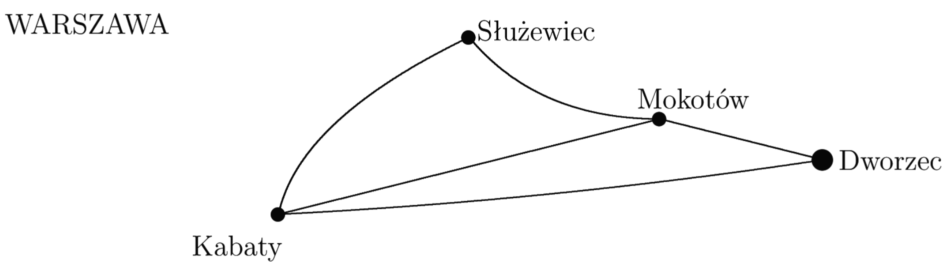
ponieważ koalicja złożona z obu graczy najtaniej zaspokoi swoje potrzeby kupując całą zgrzewkę. Gdy w Warszawie trzej gracze mieszkający odpowiednio na Mokotowie, Służewcu i Kabatach wspólnie biorą taksówkę z dworca, a koszty kursów wynoszą odpowiednio:

- na Mokotów 17 zł,
- na Służewiec przez Mokotów (co jest najkrótszą drogą) 35 zł,
- najkrótszą drogą na Kabaty 45 zł,
- na Kabaty przez Mokotów z pominięciem Służewca 50 zł,
- na Kabaty przez Mokotów i Służewiec 65 zł,

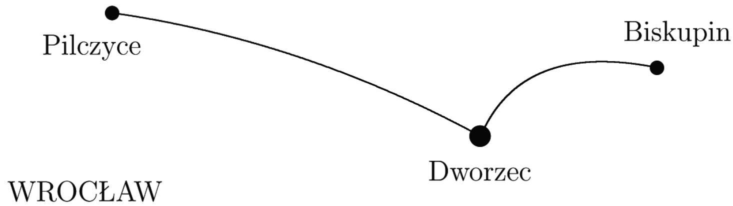
to gra kosztów jest następująca:

$$c(\{M\}) = 17\,, \quad c(\{S\}) = c(\{M,S\}) = 35\,, \quad c(\{K\}) = 45\,,$$
$$c(\{M,K\}) = 50\,, \quad c(\{S,K\}) = c(\{M,S,K\}) = 65$$

i jest oczywiste, że opłaca się wziąć jedną taksówkę na trzech. Łatwo także sprawdzić, że przy podziale kosztów zgodnie z wartością Shapleya pasażer jadący na Mokotów zapłaci 6,50 zł, jadący na Służewiec 23 zł, a na Kabaty – 35,50 zł.



W ogólnym przypadku gry kosztów zawsze są *subaddytywne*, ponieważ koalicja $S \cup T$ zawsze, jeśli tylko uważa to za najbardziej opłacalne, może zadecydować o rozdzieleniu się na koalicje *S* i *T* i ponoszeniu kosztów osobno. Jeśli np. jeden z dwóch kolegów biorących taksówkę do domu na dworcu we Wrocławiu mieszka na Biskupinie, a drugi na Pilczycach, najtaniej będzie oczywiście wziąć dwie taksówki i wtedy $c(\{1,2\}) = c(\{1\}) + c(\{2\})$, jednak zawsze, gdy połączenie koalicji obniża łączne koszty, zachodzi ostra nierówność.



Subaddytywność gry nie stanowi jednak żadnej przeszkody dla zastosowania wartości Shapleya. Co więcej, warunki **R**, **WG0** i **A** przekładają się dla gry kosztów na następujące bardzo pożądane własności:

- gracze jednakowo zwiększający koszty każdej koalicji płacą tyle samo (**R**),
- gracz niezwiększający kosztu żadnej koalicji nie płaci nic (**WG0**),
- jeśli koszty rozkładają się w naturalny sposób na dwie kategorie, np. koszty zmienne i stałe, to można równoważnie rozdzielić osobno pomiędzy graczy koszty z każdej kategorii (**A**).

Do tego samego podziału prowadzi skonstruowanie <u>gry oszczędności</u> v zdefiniowanej następująco:

$$v(T) = \sum_{j \in T} c(\{j\}) - c(T)$$

i wyliczenie jej wartości Shapleya, a następnie rozdzielenie kosztów następująco:

$$c_i = c(\{i\}) - \varphi_i(v).$$

Wartość Shapleya $\varphi(c)$ przyjmuje szczególnie prostą postać, gdy gra kosztów ma strukturę szeregową, tzn. koszt każdej koalicji jest równy największemu z indywidualnych kosztów wszystkich graczy w tej koalicji:

$$\forall T \ c(T) = \max_{i \in T} c(\{i\}).$$

Możemy bez zmniejszania ogólności założyć, że $c(\{1\}) \leq c(\{2\}) \leq \ldots \leq c(\{n\})$ (w przeciwnym wypadku wystarczy odpowiednio przenumerować graczy). Wartość Shapleya wyznacza wówczas następującą zasadę podziału kosztów:

- koszt c_1 jest dzielony równo pomiędzy wszystkich graczy,
- różnica $c_2 - c_1$ jest dzielona równo pomiędzy wszystkich graczy oprócz 1 itd.,

- różnica $c_{n-1} - c_{n-2}$ jest dzielona po połowie między graczy $n - 1$ i n,
- różnicę kosztów $c_n - c_{n-1}$ ponosi w całości gracz n.

Tę procedurę szeregowego podziału kosztów opisali jako pierwsi Billera i Heath (1982) i zastosowali ją do rozdzielenia między linie lotnicze kosztów budowy pasa startowego na lotnisku, przyjmując, że koszt ten zależy tylko od najcięższego typu samolotu, jaki będzie lądować na tym pasie.

7. Gry proste i indeks Shapleya – Shubika

Dość nietypowe, ale ciekawe i szybko dostrzeżone zastosowanie znalazła wartość Shapleya jako miernik względnej siły uczestników procesów grupowego podejmowania decyzji.

Reguły takiego procesu precyzują, które grupy jego uczestników są uprawnione do podjęcia decyzji w imieniu wszystkich decydentów, a które nie. Naturalne jest przy tym założenie, że cała grupa może jednomyślnie podjąć każdą decyzję, a także to, że jeśli do podjęcia decyzji wystarczy zgoda pewnego podzbioru T zbioru wszystkich decydentów, to tym bardziej wystarcza zgoda któregokolwiek zbioru zawierającego T.

Tak rozumiane zasady grupowego podejmowania decyzji można w bardzo prosty sposób opisać za pomocą *gry prostej* – szczególnego typu gry kooperacyjnej, w której graczami są wszyscy uczestnicy procesu decyzyjnego. <u>Gra prosta</u> to gra kooperacyjna (N,v) spełniająca warunki:

- dla każdej koalicji $T \subseteq N$ $\quad v(T) = 0$ lub $v(T) = 1$,
- $v(N) = 1$,
- jeżeli $v(T) = 1$ i $S \supseteq T$, to $v(S) = 1$.

Interpretacja jest następująca: każda koalicja T, dla której $v(T) = 1$, może – jeżeli tylko jest co do tego zgodna – przeforsować dowolną decyzję bez względu na stanowisko pozostałych graczy. Takie koalicje nazywamy koalicjami <u>wygrywającymi</u>, a te, dla których $v(S) = 0$ – <u>przegrywającymi</u>. Warunki w definicji gry prostej oznaczają, że (1) każda koalicja jest wygrywająca lub przegrywająca, (2) koalicja wszystkich graczy jest wygrywająca, (3) jeśli koalicja jest wygrywająca, to każda inna zawierająca ją też.

Tak jak każdej innej grze n-osobowej spełniającej $v(N) = 1$, wartość Shapleya przypisuje każdej grze prostej (N,v) n-wymiarowy wektor, którego współrzędne sumują się do jedności. Wektor ten ma w tym wypadku interesującą interpretację, na którą zwrócono uwagę już w rok po odkryciu wartości φ (Shapley i Shubik, 1954). Jeśli mianowicie potraktować $v(N) = 1$ jako całkowitą władzę podejmowania decyzji przez koalicję wszystkich graczy, to wartość każdego gracza *i*, $\varphi_i(v)$, stanowi dobrą miarę jego udziału we władzy. Im większa wartość danego gracza, tym więcej ma on – zgodnie z wyznaczoną przez grę *v* (czyli zbiór jej koalicji wygrywających) regułą podejmowania decyzji – do powiedzenia przy podejmowaniu decyzji grupowej.

Widać to szczególnie dobrze, gdy przypomnimy sobie wzory definiujące wartość Shapleya i zastanowimy się, jak będą one wyglądać w przypadku gier prostych. Gdy *v* jest grą prostą, wkład gracza *i* do koalicji *T*, $v(T) - v(T\setminus\{i\})$, zawsze jest równy 0 lub 1, przy czym równy 1 jest wtedy i tylko wtedy, gdy koalicja *T* jest wygrywająca, a koalicja $T\setminus\{i\}$ przegrywająca. O takiej konfiguracji mówimy, że gracz *i* jest decydujący w koalicji *T*: gdy wszyscy inni gracze z *T* są za podjęciem pewnej decyzji, a wszyscy gracze spoza *T* przeciw, to głos gracza *i* zadecyduje o tym, czy zostanie ona podjęta. We wzorze (1) określającym $\varphi_i(v)$ pozostaną zatem tylko te permutacje, przy których gracz *i* jest decydujący w koalicji swych poprzedników, a w (2) tylko te koalicje, w których *i* jest decydujący – dla wszystkich pozostałych wkład gracza *i* będzie równy zeru:

$$\varphi_i(v) = \frac{\#\{\pi \in \Pi : H_{\pi,i} \in D(i,v)\}}{n!} = \sum_{T \subseteq N, T \in D(i,v)} \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!} \tag{3}$$

gdzie *D(i,v)* oznacza zbiór wszystkich koalicji, w których gracz *i* jest decydujący w grze *v*, zaś *#A* to liczba elementów zbioru *A*.

Jasne jest zaś, że gracz jest tym „silniejszy" przy podejmowaniu decyzji przez grupę, im częściej to jego głos decyduje o ostatecznej decyzji. Co więcej, gracze wymienni w grze prostej mają dokładnie takie samo znaczenie w procesie podejmowania decyzji, a gracz zerowy nie ma żadnego znaczenia, ponieważ jego głos nie jest przydatny dla żadnej koalicji. Dlatego też wartość Shapleya, równoprawna i mająca własność gracza zerowego, stanowi dobrą miarę „siły" graczy w takich grach.

Wartości określone na zbiorze gier prostych nazywa się indeksami siły; w literaturze często już w definicji indeksu zakłada się dodatkowo, że jest on symetryczny i ma własność gracza zerowego. W szczególności wartość Shapleya ograniczona do zbioru gier prostych funkcjonuje w politologii pod nazwą indeksu Shapleya – Shubika.

Wśród kilku popularnych indeksów siły najpoważniejszym konkurentem indeksu Shapleya – Shubika jest często używany do mierzenia siły przez politologów i nieco prościej definiowany *indeks Banzhafa* (Banzhaf, 1965). Indeks ten dla większości gier daje wyniki zbliżone do φ, ma jednak gorsze własności pod względem matematycznym i w niektórych grach prowadzi do paradoksalnych wyników – w szczególności nie jest monotoniczny, tzn. nie ma własności **M**.

Interesującą cechą charakterystyczną indeksu Shapleya – Shubika jest

Własność transferu równomiernego (TR):

Jeżeli dla dwóch gier prostych *(N,v)* i *(N,w)* i pewnej koalicji $T \subset N$ zachodzi

$$v(T)=1, \quad w(T)=0 \text{ oraz } \forall S \neq T \; v(T)=w(T),$$

to dla każdej pary graczy $i,j \in T$ zachodzi $\varphi_i(w)-\varphi_i(v)=\varphi_j(w)-\varphi_j(v)<0$, a dla każdej pary graczy $k,l \notin T$ zachodzi $\varphi_k(w)-\varphi_k(v)=\varphi_l(w)-\varphi_l(v)>0$.

Własność ta oznacza, że w wyniku zmiany reguły decydowania (z *v* na *w*) takiej, że tylko jedna koalicja (*T*) z wygrywającej stała się przegrywająca, a status wszystkich innych koalicji pozostał bez zmian[4], wszyscy gracze z koalicji *T* tracą w sensie indeksu tyle samo, a wszyscy gracze spoza *T* zyskują tyle samo.

Twierdzenie 6 (Malawski, 2002)

Jedynym równoprawnym indeksem siły dla gier prostych mającym własność gracza zerowego i własność transferu równomiernego jest indeks Shapleya – Shubika.

Przyjrzyjmy się indeksom Shapleya – Shubika paru przykładowych gier prostych.

Gdy *v* jest *n*-osobową grą większości, w której każdy dysponuje jednym głosem, a do podjęcia decyzji potrzeba $\mu > n//2$ głosów, wszyscy gracze są równoprawni, więc indeks każdego z nich jest równy $1/n$. W tej grze dla każdego gracza *i* *D(i,v)* jest zbiorem wszystkich koalicji μ-osobowych zawierających *i*.

Gdy jednak gracze dysponują różnymi liczbami głosów – jak na przykład na walnych zgromadzeniach akcjonariuszy, na których głosuje się na zasadzie „jedna akcja – jeden głos" – struktura decydowania w koalicjach jest bardziej złożona. Na przykład w grze czteroosobowej, w której gracz 1 ma 40% akcji, gracz 2 – 30%, gracz 3 – 20% i gracz 4 – 10%, mamy przy wymaganej większości 51%

$$\varphi_1(v)=\frac{5}{12}, \quad \varphi_2(v)=\varphi_3(v)=\frac{1}{4}, \quad \varphi_4(v)=\frac{1}{12}$$

– np. gracz 4 jest decydujący tylko w trzyosobowej koalicji {2,3,4}, więc $\varphi_4(v)=\frac{(3-1)!(4-3)!}{4!}=\frac{1}{12}$. Natomiast przy tych samych udziałach i wymaganej większości 66% indeks Shapleya – Shubika wynosi

[4] Taka zmiana jest oczywiście możliwa tylko wtedy, gdy *T* jest minimalną koalicją wygrywającą w *v*.

$$\varphi_1(v)=\frac{7}{12},\quad \varphi_2(v)=\frac{1}{4},\quad \varphi_3(v)=\frac{1}{12},\quad \varphi_4(v)=\frac{1}{12},$$

a przy progu większości 85%

$$\varphi_1(v)=\varphi_2(v)=\varphi_3(v)=\frac{1}{3},\quad \varphi_4(v)=0.$$

Widzimy więc w szczególności, że przy tych samych wagach (udziałach) moc decydowania graczy zmienia się przy zmianach progu większości, a więc same wagi nie są dobrą miarą znaczenia graczy przy podejmowaniu decyzji grupowej.

W grze n-osobowej „*apex*", w której wygrywające są wszystkie koalicje dwuosobowe i większe zawierające gracza 1 oraz koalicja złożona ze wszystkich graczy oprócz 1, mamy

$$\varphi_1(v)=\frac{n-2}{n},\quad \varphi_2=\ldots=\varphi_n(v)=\frac{2}{n(n-1)}.$$

Ta ostatnia gra – przy mocnych założeniach 100% frekwencji, dyscypliny klubowej i braku głosów wstrzymujących się – jest obecnie (jesień 2008) rozgrywana w polskim Sejmie przy głosowaniach zwykłą większością. W takich głosowaniach wygrywające są koalicje co najmniej dwóch partii z udziałem Platformy Obywatelskiej oraz koalicja wszystkich partii poza PO[5].

Tego rodzaju analizy przeprowadzane są zwyczajowo przy różnych układach sił w parlamentach, ale także dla bardziej skomplikowanych gier, na przykład dla reguł głosowania w Radzie Ministrów Unii Europejskiej ustanowionych w traktacie nicejskim, a zmienionych w traktacie konstytucyjnym i lizbońskim. W tych przypadkach służą one nie tylko zaspokojeniu ciekawości, ale także jako narzędzie pomocne przy projektowaniu reguł decydowania o dobrych własnościach, np. zapewniających (w miarę możności) teoretycznie równy wpływ na wynik ostatecznej decyzji wszystkim wyborcom w UE niezależnie od obywatelstwa. Obserwowany w rozmaitych krajach, w tym w Polsce, opór przeciw forsowanym obecnie rozwiązaniom bierze się między innymi stąd, że mierzona obiektywną miarą, jaką jest indeks Shapleya – Shubika, siła głosu tych krajów w nowym systemie ma znacząco zmaleć w porównaniu z dotychczasową. Pouczająca w tym względzie jest poniższa tabela (Widgrén, 2008):

[5] Pomijamy tu posłów niezależnych i mniejszość niemiecką, będących w obecnej konfiguracji graczami zerowymi, i ograniczamy się do czterech istotnych graczy – PO, PiS, PSL i lewicy.

Kraj	Indeks Shapleya – Shubika przy systemie głosowania	
	„nicejskim"	„lizbońskim"
Niemcy	0,0874	0,1629
Francja	0,0872	0,1088
W. Brytania	0,0870	0,1082
Włochy	0,0869	0,1056
Hiszpania	0,0802	0,0705
Polska	0,0799	0,0692
Rumunia	0,0398	0,0435
Holandia	0,0367	0,0320
Czechy	0,0340	0,0232
Irlandia	0,0195	0,0127

Indeksy Shapleya – Shubika wybranych krajów Unii Europejskiej w Radzie Ministrów UE przy różnych regułach głosowania w tej radzie.

W Polsce indeksy Shapleya – Shubika dla gier większości w różnych zgromadzeniach badali m.in. Hołubiec i Mercik (2006) oraz Mercik (1999). Natomiast dobry program liczący indeksy siły, nie tylko Shapleya – Shubika w grach ważonej większości stworzyli Tommi Meskanen i Antti Pajala z grupą współpracowników na uniwersytecie w Turku. Program ten jest dostępny pod adresem http://powerslave.val.utu.fi.

8. Uogólnienia: wartości ważone, proceduralne i egalitarne

Na zakończenie tego przeglądu przedstawimy główne klasy wartości wywodzących się od wartości Shapleya, otrzymanych przez usunięcie części warunków postulowanych w klasycznych aksjomatyzacjach.

Rezygnacja z równoprawności przy pozostawieniu założeń addytywności i własności gracza zerowego prowadzi do klas *ważonych własności Shapleya* (Kalai i Samet, 1988) i *wartości losowego porządku* (Weber, 1988). Kalai i Samet (1988) wprowadzają egzogeniczne w stosunku do gry *wagi* wszystkich graczy – liczby dodatnie[6], określające a priori uprawnienia graczy do udziału w różnych wielkościach związanych z grą: im większa waga danego gracza, tym większe jego udziały przy podziałach. Podobnie jak zwykła wartość Shapleya, wartości ważone otrzymywane są w procesie podziału dywidend Harsányi'ego pomiędzy graczy z odpowiednich koalicji, tym razem jednak dywidendy dzielone są nie równo jak we wzorze (2), tylko proporcjonalnie do wag. Dla gry (N,v) i układu wag $w = (w_1,w_2,...,w_n)$ ważona wartość $\varphi(w,v)$ jest dana wzorem

[6] W istocie autorzy dopuszczają także wagi zerowe u części graczy i opisują niezbędny w tej sytuacji mechanizm podziału dywidend koalicji składających się wyłącznie z graczy o wadze 0.

$$\varphi_i(w,v) = \sum_{T \ni i} \frac{w_i}{w_T} \cdot \Delta_v(T) \quad \forall\, i = 1,2,\ldots n,$$

gdzie $w_T = \sum_{j \in T} w_j$. Gdy więc na przykład dwaj gracze *i,j* są równoprawni w grze *v*, ale mają różne wagi, ich wartości będą proporcjonalne do ich wag:

$$\frac{\varphi_i(w,v)}{\varphi_j(w,v)} = \frac{w_i}{w_j}.$$

Szerszą klasę wartości niesymetrycznych, ale spełniających **A** i **WG0** otrzymał Weber (1988). Jego *random order values* to podobnie jak φ wartości oczekiwane wkładu graczy w koalicje ich poprzedników przy losowym uporządkowaniu graczy, ale bez założenia, iż każde uporządkowanie jest jednakowo prawdopodobne – rozkład prawdopodobieństwa na permutacjach może być dowolny.

Radzik i Wieczorek (1988) przypisali każdemu z graczy współczynnik inicjatywy i współczynnik przyciągania do koalicji, określające rozkład prawdopodobieństwa na permutacjach zbioru graczy i prowadzące do interesującej podklasy wartości Webera. Ciekawą innowacją w ich pracy jest próba estymacji tych współczynników u rzeczywistych graczy na podstawie różnic między podziałami, jakie wynegocjowali oni w kilku grach, a wartościami Shapleya tych gier.

Innego rodzaju modyfikacje wartości Shapleya to wartości równoprawne i addytywne, ale bez własności gracza zerowego. Obok wartości egalitarnej najbardziej znaną z nich jest *wartość solidarnościowa* (Nowak i Radzik, 1994) określona wzorem:

$$\sigma_1(v) = \sum_{T \subseteq N, T \ni i} \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!} \cdot \frac{\sum_{k \in T}(v(T) - v(T \setminus \{k\}))}{t},$$

zgodnie z którą w koalicji *T* gracz zamiast swego własnego wkładu w koalicję otrzymuje średnią wkładów wszystkich *t* graczy w tę koalicję. Prowadzi to do „wspomożenia" graczy „słabszych", w tym zerowych, jednak w sposób bardziej umiarkowany niż dzielenie *v(N)* równo pomiędzy wszystkich graczy: wartość solidarnościowa jest lokalnie ściśle monotoniczna, tzn. gracz o większych wkładach w danej grze otrzymuje więcej.

Zarówno φ, jak *e* i σ są przykładami wartości *proceduralnych* (Malawski, 2009). Wartości takie powstają w wyniku podziału wkładów graczy w koalicje poprzedników pomiędzy gracza wnoszącego wkład i graczy już wcześniej obecnych w koalicji, a następnie uśrednienie otrzymanych przez każdego gracza wielkości po wszystkich (jednakowo prawdopodobnych) uporządkowaniach. *Procedura* to układ współczynników

$s_1, s_2, \ldots s_n \in [0,1]$ określających, jaką część swego wkładu w koalicje poprzedników gracz zjawiający się w uporządkowaniu na miejscu j zachowuje dla siebie (s_j), a jaką ma oddać poprzednikom jako „wpisowe" do koalicji ($1 - s_j$); oczywiście $s_1 = 1$, gdyż gracz przychodzący jako pierwszy nie ma poprzedników. Okazuje się, że sposób podziału wpisowego pomiędzy poprzedników gracza nie jest istotny: niezależnie od tego, czy będą się oni dzielić wpisowym równo, czy też np. całość otrzyma gracz, który zjawił się jako pierwszy, otrzymana (średnia) wartość będzie taka sama, czyli zależy ona tylko od współczynników s_j. W szczególności procedura ze współczynnikami $s_1 = s_2 = \ldots = s_n = 1$ prowadzi do wartości Shapleya, procedura ze współczynnikami $s_1 = 1$, $s_2 = \ldots = s_n = 0$ (przy której każdy gracz poza pierwszym oddaje cały swój wkład poprzednikom) do wartości egalitarnej e, a procedura ze współczynnikami $s_i = 1//i$ do wartości solidarnościowej σ.

Wszystkie wartości proceduralne są liniowe, symetryczne, lokalnie monotoniczne i nieujemne dla każdej gry monotonicznej, tzn. takiej, że $T \supset S \Rightarrow v(T) \geq v(S)$; można także pokazać (Malawski, 2009), że każda wartość mająca te własności jest proceduralna.

Natomiast wartości proceduralne, które dodatkowo są samodualne **D**, to tzw. *egalitarne wartości Shapleya* (van den Brink, Funaki i Ju, 2007) – wartości postaci

$$\psi(v) = a \cdot \varphi(v) + (1-a) \cdot e(v)\,, \quad a \in [0,1],$$

czyli kombinacje wypukłe wartości Shapleya i wartości egalitarnej. Powstają one w taki sposób, że przy każdym uporządkowaniu wszyscy gracze poza pierwszym zachowują część a swych wkładów krańcowych dla siebie, a pozostałą część $1 - a$ oddają do podziału graczom przybyłym wcześniej. Inny sposób podziału wkładów krańcowych prowadzący do tych wartości polega na tym, że każdy gracz (także pierwszy w uporządkowaniu) zachowuje dla siebie część a swego wkładu, a resztę oddaje do wspólnej puli, która na zakończenie zostaje podzielona równo pomiędzy wszystkich graczy.

9. Wartość Shapleya w bogatszych klasach gier

W tej pracy przedstawiliśmy jedynie najbardziej tradycyjną dziedzinę wartości – gry kooperacyjne ze skończoną liczbą graczy. Istnieje jednak obfita literatura dotycząca rozszerzeń pojęcia wartości Shapleya na ogólniejsze klasy gier i choć w większości przypadków wymaga to wprowadzenia nowych i bardziej skomplikowanych pojęć, warto tu wspomnieć o głównych kierunkach tych uogólnień i paru najprostszych przypadkach.

O ile w zwykłych grach kooperacyjnych nie ma żadnych ograniczeń możliwości tworzenia koalicji, o tyle w zastosowaniach takie ograniczenia niejednokrotnie występują. Mogą one być spowodowane utrudnieniami w porozumiewaniu się niektórych graczy z powodu np. braku łączności, narzuconą z zewnątrz hierarchią, uzgodnieniami koalicyjnymi dokonanymi przed grą itp. Wiele spośród takich ograniczeń można wygodnie opisać przez zadanie na zbiorze graczy dodatkowej struktury – na przykład:

- grafu komunikacji – opisującego fizyczne możliwości porozumiewania się; powstać mogą tylko takie koalicje, w których każda para graczy (wierzchołków grafu) jest połączona ścieżką nieprzechodzącą przez żadnego z graczy spoza koalicji;
- drzewa hierarchii – opisującego strukturę podporządkowań wewnątrz zbioru graczy; koalicja może powstać tylko wtedy, gdy wyrażą na to zgodę wszyscy (bezpośredni i pośredni) przełożeni każdego z uczestników koalicji;
- rozbicia zbioru graczy na tzw. prekoalicje – podzbiory graczy, którzy przed grą zobowiązali się do wspólnego negocjowania tworzenia ewentualnych koalicji z innymi graczami.

Wartościom Shapleya gier z takimi strukturami poświęcono dziesiątki prac. Prekursorem tej dziedziny jest Myerson (1977). Jego piękne twierdzenie głoszące (w pewnym skrócie), że jedyną efektywną regułą podziału o tej własności, iż zawsze na dodaniu nieobecnego wcześniej bezpośredniego połączenia między dwoma graczami obaj ci gracze zyskają tyle samo, jest wartość Shapleya odpowiednio określonej gry, zapoczątkowało cały nurt badań i doprowadziło m.in. do twierdzenia 4 z rozdziału 4. Inne ważne prace o wartościach gier z ograniczeniami tworzenia koalicji opisanymi przez różnego rodzaju grafy to Owen (1986) oraz Derks i Peters (1993). Gry z prekoalicjami i ich wartość wprowadził Owen (1977); dziś wartość Shapleya gier prostych z prekoalicjami jest jednym z ulubionych narzędzi bardziej matematycznie nastawionych politologów. Dużą pracę unifikującą wartości gier z różnymi rodzajami struktur wykonali Bilbao i Ordonez (2008).

Inny kierunek to rozszerzanie wartości na gry z *nieskończonym* zbiorem graczy. Choć wiążą się z tym znaczące trudności techniczne, gra jest warta świeczki, gdyż na przykład głosowania na walnych zgromadzeniach akcjonariuszy spółek giełdowych często najprościej opisują tzw. gry oceaniczne. Są to gry proste ze skończoną liczbą graczy dużych i continuum – „oceanem" – graczy małych, których indywidualną moc decydowania można zaniedbać, ale łącznie dysponują oni znaczącą liczbą akcji (= głosów), a więc głosy oceanu jako całości bądź jego istotnej części mają znaczenie dla podjętej decyzji.

Milnor i Shapley (1978) oraz Shapiro i Shapley (1978) udowodnili serię pięknych twierdzeń o takich grach. Pokazali oni między innymi, że dla ciągów gier ze skończonymi, ale coraz większymi zbiorami coraz mniejszych graczy „małych" i niezmiennym zbiorem graczy „dużych" wartości Shapleya każdego z dużych graczy tworzą ciąg zbieżny. Jego granicą jest zaś wartość gry „oceanicznej" mająca interpretację probabilistyczną podobną jak zwykła wartość Shapleya: wszyscy duzi gracze zostają losowo i niezależnie umieszczeni na odcinku reprezentującym ocean i każdy z nich jest decydujący wtedy i tylko wtedy, gdy to jego pojawienie się zmienia przegrywającą koalicję jego poprzedników (na odcinku) w wygrywającą. Wartość dużego gracza to prawdopodobieństwo rozmieszczenia, w którym on jest decydujący, a wartość oceanu – prawdopodobieństwo takiego rozmieszczenia, w którym żaden z dużych graczy nie jest decydujący.

Pełną teorię wartości dowolnych – nie tylko prostych – gier z nieskończonymi zbiorami graczy przedstawili Aumann i Shapley (1974). Ta niełatwa książka do dziś jest podstawowym źródłem wiedzy w swej tematyce.

Wreszcie określona i intensywnie studiowana jest także wartość Shapleya gier bez wypłat ubocznych, czyli takich gier, w których koalicje mają ograniczone możliwości dzielenia pomiędzy swych członków posiadanych bądź wypracowanych dóbr. Do tej kategorii należą m.in. gry rynkowe, w których gracze dysponują pewnymi dobrami i mogą je między sobą dowolnie wymieniać ku obopólnej korzyści, ale nie ma wspólnego środka płatniczego pożądanego przez wszystkich – wymianie mogą podlegać tylko towary lub usługi.

Bibliografia

Aumann, Robert i Lloyd Shapley. 1974. *Values of non-atomic games*. Princeton University Press.

Banzhaf, J.F. 1965. *Weighted voting does not work: a mathematical analysis*. „Rutgers Law Review" 19: 317-343.

Bilbao, Jesus M. i M. Ordonez. 2008. *Axiomatizations of Shapley values for games with augmenting systems*. „European Journal of Operations Research".

Billera, L.J. i D.C. Heath. 1982. *Allocation of shared costs: a set of axioms yielding a unique procedure*. „Mathematics of Operations Research" 7: 32-39.

Brink, René van den. 2001. *An axiomatization of the Shapley value using a fairness property*. „Int. J. Game Theory" 30: 309-319.

Brink, René van den, Yukihiko Funaki i Yuan Ju. 2007. *Consistency, monotonicity and implementation of egalitarian Shapley values*. Tinbergen Institut discussion paper TI 2007-062//1.

Derks, Jean i Hans Peters. 1993. *A Shapley value for games with restricted coalitions*. „International Journal of Game Theory" 21: 351-360.

Feldman, Barry. 1999. *The proportional value of a cooperative game*.fmwww.bc.edu//RePEc/ęs2000 //1140.pdf.

Harsányi, John C. 1959. *A bargaining model for the cooperative n-person game*. W: Tucker A.W. i R.D. Luce (wyd.). *Contributions to the Theory of Games IV*. „Annals of Mathematics Studies" 40: 325-355.

Hołubiec, Jerzy i Jacek Mercik. 2006. *Techniki i tajniki głosowania*. Warszawa: EXIT (wyd. II).

Ichiishi, Tatsuro. 1981. *Supermodularity: application to convex games and the greedy algorithm for LP*. „Journal of Economic Theory" 25: 283-286.

Kalai, Ehud i Dov Samet. 1988. *Weighted Shapley values*. W: Roth AE (wyd.). *The Shapley Value: Essays in Honor of Lloyd Shapley*. Cambridge University. Press: 83-100.

Malawski, Marcin. 2002. *Equity properties of the Shapley value as a power index*. „Control and Cybernetics" 31 (1): 117-127.

Malawski, Marcin. 2009. *„Procedural" values for cooperative games* ukaże się w „International Journal of Game Theory".

Mercik, Jacek. 1999. *Siła i oczekiwania*. „Decyzje grupowe". Warszawa: PWN.

Milnor, J.W. i L.S. Shapley. 1978. *Values of large games II: Oceanic games*. „Mathematics of Operations Research" 3: 290-307.

Myerson, Roger B. 1977. *Graphs and cooperation in games*. „Mathematics of Operations Research" 2: 225-229.

Myerson, Roger B. 1980. *Conference structures and fair allocation rules*. „International Journal of Game Theory" 9: 169-182.

Nowak, Andrzej i Tadeusz Radzik. 1994. *A solidarity value for n-person TU games*. „Int. J. Game Theory" 23: 43-48.

Owen, Guillermo. 1977. *Values of games with a priori unions*. W: R. Henn i O. Moeschlin (wyd.). *Mathematical Economics and Game Theory: Essays in honor of Oskar Morgenstern*. Springer-Verlag.

Owen, Guillermo. 1986. *Values of graph-restricted games*. „SIAM J. of Alg. Discr. Meth" 7: 210-220.

Radzik, Tadeusz i Andrzej Wieczorek. 1988. *Measuring initiative and attraction by means of deviations from the Shapley value.* „Optimization" 16: 167-180.

Shapiro, N.Z., i L.S. Shapley. 1978. *Values of large games I: A limit theorem*. „Math. Operations Research" 3: 1-9.

Shapley, Lloyd S. 1953. *A value for n-person games*. W: Kuhn H. i Tucker AW. (wyd.). *Contributions to the Theory of Games II*. „Annals of Mathematics Studies" 28: 307-317 Princeton University Press.

Shapley, Lloyd S. i Martin Shubik. 1954. *A method for evaluating the distribution of power in a committee system*. „American Political Science Review" 48: 787-792.

Weber, Robert J. 1988. *Probabilistic values for games*. W: Roth AE (wyd.). *The Shapley Value: Essays in Honor of Lloyd Shapley*. Cambridge University Press, s. 101-119.

Widgrén, Mika. 2008. *The impact of council voting rules on EU decision-making*. Turku School of Economics discussion paper no. 1162.

Young, H. Peyton. 1985. *Monotonic solutions of cooperative games*. „International Journal of Game Theory" 14: 65-72.