PRZESTRZENNA GENERALIZACJA WARTOŚCI SHAPLEYA DLA GIER PROSTYCH JAKO MOCNY PUNKT W CHAOSIE IDEOLOGII[1]

Mikołaj Jasiński[2]
Uniwersytet Warszawski

Streszczenie: *W pracy przedstawiam ważne zastosowanie przestrzennej generalizacji wartości Shapleya dla gier prostych. Koncepcja Shapleya i Owena umożliwia nie tylko interesujące interpretacje empiryczne, ale również stanowi ważny wkład w badaniu własności przestrzennych modeli głosowania, szczególnie w sytuacji nieistnienia stabilnego rozwiązania. Pozwala ona na znalezienie rozwiązania najmniej niestabilnego. Jest cenną odpowiedzią na problem przedstawiony w twierdzeniu McKelveya. Poza prezentacją założeń przestrzennej teorii głosowania oraz samej koncepcji wartości Shapleya-Owena przedstawiam ideę dowodu twierdzenia Shapleya-Owena oraz empiryczną ilustrację koncepcji Shapleya i Owena.*

Słowa kluczowe: *gra prosta, indeks siły, przestrzenna teoria głosowania, zwycięzca w sensie Condorceta, wartość Shapleya-Owena, mocny punkt.*

SPATIAL GENERALIZATION OF SHAPLEY VALUE FOR SIMPLE GAMES AS THE STRONG POINT IN THE CHAOS OF IDEOLOGY

Abstract: *The article presents an important application of spatial generalization of Shapley value for simple games. Proposition presented by Shapley and Owen enables very interesting empirical interpretations. It has also strong contribution in the research of spatial voting models' properties when there is no stable solution. This theorem enables us to find the least unstable solution and therefore this is the valuable answer to the problem presented in the McKelvey's theorem. The article presents the main postulates of the spatial voting theory, a geometric insight on which the general proof of Shapley-Owen theorem is based and empirical illustration of the presented concepts.*

Keywords: *simple game, power index, spatial voting theory, Condorcet winner, Shapley-Owen value, strong point.*

[1] Autor dziękuje za cenne uwagi Markowi Bożykowskiemu i anonimowym recenzentom.

[2] Mikołaj Jasiński, Zakład Statystyki, Demografii i Socjologii Matematycznej w Instytucie Socjologii Uniwersytetu Warszawskiego; e-mail: mikoj@is.uw.edu.pl

DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.11

O wadze koncepcji naukowej świadczy nie tylko jej bezpośrednie zastosowanie, ale skutki, które wywołuje w nauce. Rozwinięcia jednej z ciekawszych koncepcji formalnej teorii decyzji – wartości Shapleya – utwierdzają w przekonaniu o jej doniosłości. Obchodząca w tym roku 60-lecie propozycja Lloyda Shapleya jest nie tylko obecna w każdym szanującym się podręczniku teorii gier. Doczekała się wielu rozwinięć i interpretacji – cennych zarówno jako modele normatywne, jak i służące opisowi realnych zjawisk. Niektóre zostały opisane również w publikacjach w „Decyzjach"[3].

W niniejszym artykule przedstawię jedno z twierdzeń dotyczących przestrzennej generalizacji wartości Shapleya dla gier prostych, stanowiące ważną normatywną „odpowiedź" na problem niestabilności wyboru społecznego przedstawiony w twierdzeniu McKelveya (McKelvey, 1976) zwanym nieprzypadkowo twierdzeniem o chaosie. Prezentowane propozycje odwołują się do pojęć znanych z przestrzennej teorii głosowania. Dostępne są obszerne opracowania problematyki związanej z przestrzenną teorią głosowania[4]. W języku polskim omówienie tej problematyki znajdzie Czytelnik np. w tekstach wydania „Studiów Socjologicznych" (nr 1/2003) poświęconego jej w całości, w szczególności w artykule wprowadzającym (Lissowski, 2003). Własności przestrzennej generalizacji wartości Shapleya zostały opisane przeze mnie w jednym z artykułów we wspomnianej publikacji (Jasiński, 2003). W tym tekście jedynie ogólnie przedstawię tę koncepcję oraz założenia niezbędne do jej omówienia, więcej miejsca pozostawiając na prezentację wspomnianego twierdzenia o *mocnym punkcie* Shapleya-Owena.

1. Gra prosta, indeks siły, przestrzenna teoria głosowania

Tworzenie koalicji, porozumień jest bardzo ważnym procesem analizowanym w naukach politycznych i ekonomii. Jest również centralnym pojęciem w teorii gier kooperacyjnych. Ich szczególnym typem są tzw. gry proste. Przez grę prostą będziemy rozumieli taką grę kooperacyjną, którą da się scharakteryzować przez dwa pojęcia: koalicji wygrywającej i koalicji przegrywającej. Są to naturalne kategorie w naukach politycznych. Głosujących traktujemy jako graczy. Modele teoretyczne konstruowane na bazie gier prostych mają interesujące interpretacje politologiczne. Wśród nich ważnym pojęciem są indeksy siły – parametry określające znaczenie uczestników głosowań, np. klubów parlamentarnych. Oczywiste jest, że siła trzech klubów posiadających identyczną liczbę członków jest równa. W głosowaniach wymagających bezwzględnej większości każde dwa kluby mogą utworzyć koalicję, która zwycięży w głosowaniu. Można przyjąć, że każdy z graczy-głosujących dyspo-

[3] (Jasiński, 2004), (Malawski, 2008), (Jasiński, 2009), (Malawski, 2013).
[4] M.in. (Enelow i Hinich, 1984, 1989).

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.11

nuje po 1/3 władzy[5] w zgromadzeniu. Jeśli jednak rozważymy inne np. 100 osobowe zgromadzenie składające się z trzech klubów parlamentarnych, w którym pierwszy klub ma 50, drugi 49, a trzeci – 1 mandat, to przy regule bezwzględnej większości podział siły przestaje być oczywisty. Z pewnością najwięcej do powiedzenia w tej sytuacji ma pierwszy klub i może wygrać głosowanie równie dobrze w porozumieniu z drugim, jak i trzecim klubem. Jednakże nie jest jasne, jakie są proporcje siły między pierwszym a pozostałymi klubami. Widać również, że liczba mandatów nie przekłada się prosto na znaczenie w zgromadzeniu. Kwestie te są przedmiotem studiów odwołujących się do indeksów siły[6]. Wartość Shapleya dla gier prostych bywa nazywana indeksem Shapleya-Shubika od pierwszej publikacji przedstawiającej jej cenne interpretacje politologiczne (Shapley i Shubik, 1954).

Lloyd Shapley i Martin Shubik zaproponowali pewien prosty eksperyment myślowy umożliwiający łatwą i intuicyjną interpretację wartości Shapleya dla gier prostych. Wyznaczanie ich indeksu wyobrazić sobie można jako rekonstrukcję procesu tworzenia się w pewnym zgromadzeniu wyborczym, np. w parlamencie, koalicji wspierającej głosowany wniosek. Głosujący (deputowani lub kluby parlamentarne) przyłączają się do budowanej koalicji w jakimś porządku. Kluczowy jest moment, kiedy zostaje osiągnięta większość wystarczająca do przegłosowania wniosku. Głosujący, który przeważył szalę na korzyść formującej się koalicji okazuje się znaczący dla procesu decyzyjnego w tym zgromadzeniu – otrzymuje więc jeden punkt. Jeśli rozważymy wszystkie możliwe porządki tworzenia koalicji ze wszystkich głosujących, wówczas każdemu z głosujących przyporządkujemy liczbę „punktów" równą liczbie uporządkowań, w których gracze ci okazali się decydujący[7] o przekształceniu koalicji z przegrywającej w wygrywającą. Liczba „punktów" gracza podzielona przez liczbę wszystkich uporządkowań jest właśnie wartością indeksu Shapleya-Shubika danego gracza. Jest unormowany (przyjmuje wartości od 0 do 1) i posiada wygodną interpretację. Jeśli przyjąć, że rozważamy bardzo długi czas pracy zgromadzenia, to indeks ten można interpretować jako prawdopodobieństwo tego, że dany gracz okaże się tym decydującym o przeforsowaniu wniosku, a więc podjęciu decyzji przez zgromadzenie[8].

W klasycznych indeksach siły przyjmuje się anonimowość (symetrię) głosujących, zupełnie nienaturalną w zgromadzeniach o charakterze politycznym. Równe prawdopodobieństwo porozumienia się poszczególnych graczy jest postulatem nie do utrzymania,

[5] W języku angielskim wygodnie odwołać się do cennej dwuznaczności słowa *power*, które można tłumaczyć jako „siła" lub „władza". Stąd nazwa *power index* – indeks siły (władzy).

[6] Opracowania tej tematyki są dostępne nie tylko wśród licznych publikacji obcojęzycznych, m.in. (Shapley i Shubik, 1954), (Banzhaf, 1965), (Deegan i Packel, 1978). Czytelnik może dotrzeć do opracowań w języku polskim, m.in. (Jasiński, 2000), (Malawski i in., 1997), (Mercik, 1999), (Sosnowska, 1999).

[7] Ang. *pivotal.*

[8] Dociekliwemu Czytelnikowi pozostawiam przyjemność wyznaczenia wartości indeksu Shapleya-Shubika dla wspomnianej w przykładzie trójki klubów w 100-osobowym zgromadzeniu. Wynik można sprawdzić, zaglądając do mojego artykułu z „Decyzji" (Jasiński, 2004).

DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.11

jeśli rozważamy np. kluby parlamentarne czy też posłów w parlamencie. Stąd propozycje uchylenia tego założenia. Obok koncepcji zakładających pewną, z góry ustaloną, strukturę koalicyjną, prowadzącą do tzw. indeksów siły z prekoalicjami[9], na szczególną uwagę zasługują indeksy siły odwołujące się do założeń przestrzennej teorii głosowania. Indeksy takie, zwane przestrzennymi generalizacjami, w razie zapewnienia pełnej anonimowości graczy przyjmują postać znanych, klasycznych indeksów siły. Jednym z takich indeksów jest przestrzenna generalizacja indeksu Shapleya-Shubika. Ogłoszona przez Guillermo Owena (Owen, 1971), a następnie precyzyjnie doformułowana przez Shapleya (Shapley, 1977), pozwala na uwzględnienie przestrzennego usytuowania graczy w przestrzeni ideologicznej przy określaniu ich względnej siły w podejmowaniu zbiorowych decyzji. Shapley z Owenem znaleźli szereg naśladowców, którzy zaproponowali rozmaite generalizacje różnych indeksów siły[10]. Prezentacja tej koncepcji wymaga choć pobieżnego opisania założeń przestrzennej teorii głosowania.

Centralnym pojęciem w przestrzennej teorii głosowania jest n-wymiarowa przestrzeń ideologiczna, której punkty reprezentują stanowiska głosujących-graczy (punkty te nazywane są punktami idealnymi graczy) oraz głosowanych opcji-alternatyw, zaś odległość między punktami przestrzeni ideologicznej reprezentuje ideologiczne różnice między graczami czy rozważanymi alternatywami. Wymiary mogą być wyznaczone przez poglądy dotyczące różnych rozwiązań gospodarczych, poglądy dotyczące zagadnień obyczajowych itp. Poszczególne punkty przestrzeni można więc scharakteryzować, wykorzystując wartości ich współrzędnych. Poszczególne kierunki przestrzeni (proste przechodzące przez środek układu współrzędnych) modelowałyby zatem rozmaite „sposoby postrzegania wymiarów przestrzeni" charakteryzujące się stałą proporcją wszystkich współrzędnych. Jeśli np. oś x oznaczałaby stosunek do wartości tradycyjnych, zaś oś y – stosunek do liberalnych rozwiązań ekonomicznych, wówczas kierunek wyznaczony przez prostą $y = 2x$ (lub $y = -2x$) wyznaczałby punkty charakteryzujące głosujących (alternatywy), którzy przykładają dwukrotnie większe[11] znaczenie do spraw gospodarczych niż do spraw obyczajowych.

Konsekwencją przyjęcia przestrzennych modeli głosowania jest ograniczenie zbioru dostępnych preferencji indywidualnych[12] (ograniczenie dziedziny społecznego wyboru) oraz ograniczenie możliwości tworzenia porozumień graczy (koalicji). Gracze usytuowani[13] w punktach bardziej odległych od siebie będą mniej

[9] Omówienie tych koncepcji znaleźć można w literaturze obcojęzycznej, np. (Owen, 1977) oraz w języku polskim – m.in. w (Sosnowska, 1995).

[10] Opisane są m.in. w pracy (Rapoport, Golan, 1985), zaś w języku polskim w (Jasiński, 2003).

[11] Założyłem milcząco m.in., że oba wymiary są niezależne oraz mają równe znaczenie, co nie jest założeniem koniecznym w przestrzennej teorii głosowania, jednak dla ułatwienia percepcji tekstu uznałem je za zasadne. Zob. też m.in. (Lissowski, 2003).

[12] Por. (Haman, 2003b: 43).

[13] Usytuowane w przestrzeni są punkty idealne graczy, a nie gracze (przestrzeń ideologiczna jest tylko modelem teoretycznym), jednak dla uproszczenia przyjąłem nieco żargonową formę.

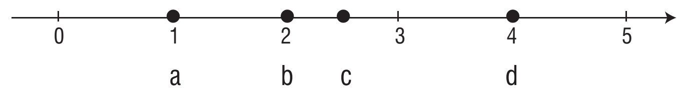
 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.11

skłonni do wchodzenia ze sobą w koalicje niż gracze reprezentowani przez bliższe sobie punkty idealne.

2. Przestrzenna generalizacja wartości Shapleya

Shapley przyjął również ograniczenie typów możliwych uporządkowań graczy reprezentowanych w modelach przestrzennych. Przyjął, że każdy kierunek w ideologicznej przestrzeni Euklidesowej określa dwa przeciwne uporządkowania. Poniższy rysunek ilustruje tę sytuację dla przestrzeni jednowymiarowej. Rysunek przedstawia punkty reprezentujące czwórkę graczy.

Rysunek 1. Punkty idealne graczy *a, b, c, d* w przestrzeni jednowymiarowej[14]



W tym przypadku, wedle prezentowanej propozycji Shapleya, możliwe są zatem tylko dwa uporządkowania: od „lewicy" do „prawicy" ($a \prec b \prec c \prec d$) i przeciwne ($d \prec c \prec b \prec a$).

Jeśli pominęlibyśmy wszystkie ograniczenia wynikające z przestrzennego usytuowania punktów idealnych czwórki graczy, należałoby rozważyć wszystkie 24 (4!) uporządkowania. Przyjmijmy, że gracze mają takie same wagi (np. równe 1), zaś do zwycięstwa w głosowaniu wystarczy zebrać 3 głosy poparcia spośród 4 głosów. W klasycznej wartości Shapleya, jak pamiętamy, wszystkim uporządkowaniom – sposobom tworzenia koalicji – przypisane są równe prawdopodobieństwa. Jeśli rozważymy zatem wszystkie, równie prawdopodobne, uporządkowania, wówczas wartość Shapleya (indeks Shapleya-Shubika) okaże się identyczna dla każdego z graczy i równa ¼. Wektorowi graczy [a, b, c, d] przyporządkujemy wektor siły [¼, ¼, ¼, ¼]. Jeśli naruszymy równość tego prawdopodobieństwa, umieszczając punkty idealne graczy w przestrzennym modelu, wynik może okazać się zgoła inny. W przykładzie zilustrowanym na rysunku 1 jedyne dopuszczalne uporządkowania, $a \prec b \prec c \prec d$ i $d \prec c \prec b \prec a$, przypiszą graczom b i c po 1 „punkcie" za przekształcenie koalicji przegrywających $\{a, b\}$ oraz $\{c, d\}$ w koalicje wygrywające, odpowiednio: $\{a, b, c\}$ i $\{b, c, d\}$. Oznacza to, że całość władzy w zgromadzeniu znajduje się po połowie u graczy b i c. Mamy więc wektor siły [0, ½, ½, 0]. Dwaj skrajnie usytuowani gracze

[14] Źródło: (Jasiński, 2003: 148).

DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.11

okazali się nieistotni w podejmowaniu decyzji w tym zgromadzeniu, pomimo identycznych wag co „środkowi" głosujący. Docenienie znaczenia graczy wyznaczających w przestrzeni jednowymiarowej medianę dobrze koresponduje z wnioskami ze słynnego twierdzenia Blacka o medianowym wyborcy[15]. Propozycja Shapleya-Owena pozwala na określenie znaczenia decydentów również w przestrzeni wielowymiarowej.

Rozważać będziemy dalej grę z udziałem tych samych czterech graczy z regułą bezwzględnej większości, zatem do wygrania głosowania (stworzenia koalicji wygrywającej) potrzeba 3 graczy. Równe prawdopodobieństwo uporządkowań graczy zakładane przy wartości Shapleya (symetrycznej) zostało w jej przestrzennej generalizacji zastąpione przez postulat równego prawdopodobieństwa wszystkich kierunków. Shapley zaproponował następującą interpretację tego postulatu: *„polityczne wiatry" wieją w poprzek przestrzeni politycznej w ściśle losowy sposób* (Shapley, 1977: 20). Zatem zgodnie z tym założeniem równe prawdopodobieństwo zostaje przypisane kierunkom-kryteriom budowania koalicji.

W modelach wielowymiarowych uporządkowanie punktów dla ustalonego kierunku dane jest przez uporządkowanie rzutów tych punktów na prostą wyznaczającą ów kierunek. Istnieją takie usytuowania przestrzenne punktów, dla których przy tej koncepcji nie wszystkie uporządkowania są dopuszczalne. Rysunek 2 przedstawia punkty idealne graczy a, b, c, d w przestrzeni dwuwymiarowej. Jak widać, niemożliwe są uporządkowania, w których gracz c znalazłby się na skraju, np. $c \prec b \prec a \prec d$. Dwa rozważane kierunki zostały zaznaczone na rysunku przerywanymi liniami. Według jednego kierunku (skierowanego bardziej pionowo) gracz a znajduje się najwyżej w uporządkowaniu, zaś według drugiego (bliższego osi poziomej) – najniżej.

Przestrzenną generalizacją wartości Shapleya[16] graczy jest wektor proporcji sum powierzchni sfery związanych z tymi uporządkowaniami, dla których poszczególni gracze są graczami decydującymi.

Dla przestrzeni dwuwymiarowej zbiory kierunków wyznaczające te same uporządkowania można przedstawić jako łuki (lub kąty) w dowolnym okręgu[17] umieszczonym w układzie współrzędnych. Długość poszczególnych łuków jest zatem miarą udziału odpowiednich uporządkowań wśród wszystkich dopuszczalnych ustawień graczy (przy założeniu równego prawdopodobieństwa wszystkich kierunków). Poniższy rysunek przedstawia wszystkie możliwe uporządkowania czwórki graczy w dwuwymiarowej przestrzeni. Dla naszej gry (czwórka graczy o wadze 1 i reguła decyzyjna wymagająca 3 głosów do przegłosowania wniosku) zawsze gracz trzeci w uporządkowaniu jest graczem decydującym.

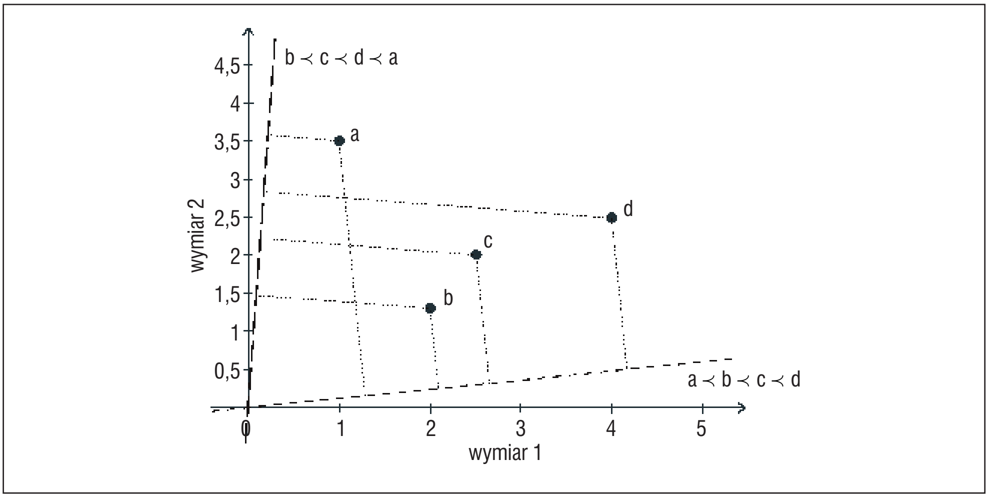
15 Szersze rozważania tego jednowymiarowego przypadku dostępne są m.in. w (Jasiński, 2003).

16 Por. (Shapley, 1977), (Jasiński, 2003).

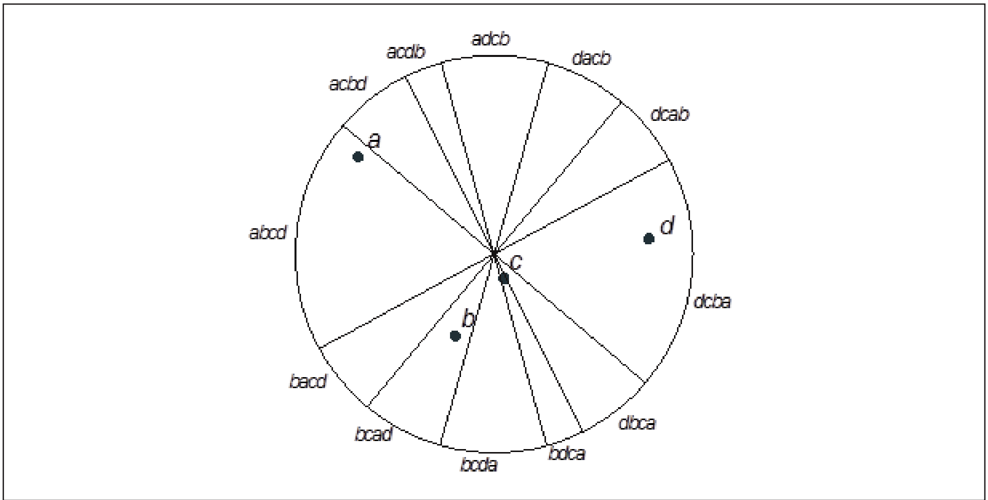
17 Usytuowanie okręgu na rysunku 3 wynika wyłącznie ze względów prezentacyjnych.

DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.11

Rysunek 2. Uporządkowania graczy *a, b, c, d* dla dwóch różnych kierunków w przestrzeni dwuwymiarowej[18]



Rysunek 3. Uporządkowania graczy *a, b, c, d* dla różnych kierunków w przestrzeni dwuwymiarowej[19]



Oto wartości przestrzennej generalizacji wartości Shapleya graczy *a, b, c, d* przedstawionych jak na rysunku 3 dla naszej gry:

$\varphi_a = 46^o/360^o \approx 0.13,$

$\varphi_b = 92^o/360^o \approx 0.26,$

18 Źródło: (Jasiński, 2003: 147).
19 Źródło: (Jasiński, 2003: 147).

DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.11

$\varphi_c = 180^o/360^o = 0.5,$
$\varphi_d = 42^o/360^o \approx 0.12.$[20]

Jak widać, największą siłę ma najbardziej „centrowy" gracz c. Gracz ten najczęściej występuje jako gracz decydujący o utworzeniu koalicji wygrywającej. Gdyby przedstawiona przestrzeń reprezentowała rzeczywistą przestrzeń ideologiczną, a zaznaczone na niej punkty reprezentowały stanowiska różnych partii, powiedzielibyśmy, że partia c jest, średnio rzecz biorąc, najbardziej dogodnym ideologicznie koalicjantem dla wszystkich innych partii, natomiast partie a oraz d (usytuowane skrajnie) – koalicjantami najmniej pożądanymi. Gracz-partia b zyskuje na bliskości centrum. Prowadzono wiele analiz i interpretacji wartości przestrzennej generalizacji wartości Shapleya i innych przestrzennych indeksów siły dla różnych zgromadzeń politycznych[21]. Okazała się użytecznym narzędziem do badania grupowych procesów decyzyjnych w warunkach rywalizacji, w której konieczne jest uwzględnienie czynnika ideologicznego.

3. W poszukiwaniu mocnych punktów w chaosie ideologii

Shapley z Owenem wskazali jednak inną, nie mniej wartościową propozycję wykorzystania własności przestrzennej generalizacji wartości Shapleya. Odnosi się ona do dwuwymiarowych przestrzennych modeli głosowania. Propozycję tę można traktować jako wkład w poszukiwane stabilnych i jednoznacznych wyborów społecznych w przestrzennych modelach głosowania. Alternatywę wygrywającą w większościowych głosowaniach w parach z każdą inną alternatywą określa się mianem zwycięzcy w sensie Condorceta. W przypadku przestrzeni jednowymiarowych i głosujących posiadających jednoznaczne preferencje zawsze istnieje możliwość jednoznacznego wyboru społecznego. Dowiódł tego w 1958 roku Duncan Black (Black, 1958). Zgodnie z jego twierdzeniem[22], jeśli liczba wyborców jest nieparzysta, to alternatywa leżąca w punkcie idealnym głosującego wyznaczającego medianę zgromadzenia (medianowy wyborca) jest tzw. mocnym zwycięzcą w sensie Condorceta. Jeśli, jak w naszym przykładzie przedstawionym na rysunku 1, liczba członków zgromadzenia jest parzysta i mediana ich punktów idealnych nie jest wyznaczona jednoznacznie, wówczas alternatywa usytuowana w dowolnym miejscu między punktami graczy „środkowych" (w przykładzie są to punkty b i c) w konkurencji z każdą inną alternatywą uzyska głosy co najmniej połowy głosujących. W najgorszym razie głosowanie zakończy się remisem. Wówczas jednak nadal alternatywa ta nie przegrywa – nie znajduje się w mniejszości w rywalizacji – z żadną inną. W przypadku przestrzeni więcej niż

20 Wartości nie sumują się do 1 ze względu na zaokrąglenia.
21 M.in. (Rapoport, Golan, 1985), (Rabinovitz, Macdonald, 1986), (Jasiński, 2003), (Godfrey, 2005).
22 Bardziej precyzyjne omówienie twierdzenia Blacka znajdzie Czytelnik w tekście (Haman, 2003b).

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.11

jednowymiarowych problem określenia warunków stabilności oraz jednoznaczności dokonania wyboru przez zgromadzenie nie jest prosty. Nakreślę poniżej tylko zarys tej problematyki niezbędny do przedstawienia znaczenia propozycji Shapleya-Owena.

W sytuacji gdy przestrzenna konfiguracja punktów idealnych graczy charakteryzuje się znaczną symetrią i pozwala na znalezienie takiego punktu w przestrzeni, który byłby tzw. medianą we wszystkich kierunkach[23] (np. jeśli gracze usytuowani byliby w wierzchołkach kwadratu, wówczas medianą we wszystkich kierunkach byłby punkt przecięcia przekątnych kwadratu), wówczas wybór alternatywy o cechach sytuujących ją w tym punkcie będzie przy głosowaniu większościowym społecznie nie mniej korzystny od wyboru alternatyw usytuowanych w innych punktach przestrzeni. Alternatywa taka będzie tzw. słabym zwycięzcą w sensie Condorceta – w głosowaniu większościowym nie przegrywa z żadną inną alternatywą reprezentowaną w przestrzeni. Charles Plott (Plott, 1967) wykazał, że jest to jedyna sytuacja, gdy istnieje zwycięzca w sensie Condorceta w przestrzeni co najmniej dwuwymiarowej. W większości przypadków nie istnieje jednak mediana we wszystkich kierunkach. Rozwiązanie to jest ponadto bardzo niestabilne. Wystarczy lekko przesunąć punkt idealny jednego z graczy umieszczonych w wierzchołkach kwadratu, a nie da się znaleźć mediany we wszystkich kierunkach. Można więc powiedzieć, że istnienie zwycięzcy w sensie Condorceta w przestrzeniach wielowymiarowych jest bardzo mało prawdopodobne.

Uzupełnieniem tych rozważań jest wynik uzyskany przez McKelveya. W swoim twierdzeniu zwanym nieprzypadkowo *twierdzeniem o chaosie* pokazał, że jeśli nie istnieje mediana we wszystkich kierunkach, to dla każdej alternatywy można znaleźć taki ciąg głosowań metodą większościową, który doprowadzi do jej wyboru przez zgromadzenie. Oznacza to, że stosując sekwencyjne głosowanie większościowe decyzją społeczną może być wybór jakiejkolwiek alternatywy (dowolnego punktu przestrzeni), zależny jedynie od kolejności głosowań. Osoba mająca możliwość wprowadzania nowych opcji pod głosowanie zgromadzenia oraz określająca kolejność głosowań (np. przewodniczący zgromadzenia) może z powodzeniem przeprowadzać przez głosowania niektóre wygodne dla siebie wnioski, z drugiej zaś strony nawet uczciwie i szczerze wyrażana wola członków zgromadzenia może być narażona na zarzuty manipulacji.

Siła tego twierdzenia jest tym większa, że nie bazuje ono na wynikach empirycznych (rzeczywistość społeczna może się zmienić), lecz ma charakter normatywny. Ponadto opiera się na słabych założeniach (poza przedstawionymi już założeniami przestrzennych modeli głosowania założono wielowymiarowość przestrzeni oraz, częsty przecież, brak symetrii punktów idealnych graczy). Ma zatem charakter bardzo ogólny. Podejmowano szereg normatywnych i empirycznych prób poszukiwania

[23] Zob. m.in. (Haman, 2003b).

DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.11

stabilności w chaosie odkrytym przez McKelveya[24]. Wydaje się, że jedną z bardziej eleganckich, normatywną odpowiedzią na problemy ze znalezieniem stabilnego rozwiązania jest propozycja Shapleya-Owena (Shapley i Owen, 1989)[25]. Odwołali się oni w swoim twierdzeniu do koncepcji *mocnego punktu*[26] zdefiniowanego w 1987 (Grofman i in., 1987). Wobec nieistnienia stabilnych opcji do wyboru można poszukiwać w przestrzeni ideologicznej punktów najmniej niestabilnych. Jak pamiętamy, jeśli w przestrzeni nie istnieje mediana we wszystkich kierunkach, wówczas każdy punkt przestrzeni – alternatywa o cechach sytuujących ją w tym punkcie – przegrywa z jakąś inną alternatywą.

Mocny punkt w grze prostej w przestrzeni $\mathbf{R}^k$ to taki punkt x, dla którego zbiór alternatyw (punktów przestrzeni $\mathbf{R}^k$), z którymi alternatywa usytuowana w punkcie x przegrywa, jest najmniejszy[27].

Dwa lata po przedstawieniu przez Grofmana i współpracowników koncepcji *mocnego punktu* Shapley z Owenem przedstawili dowód twierdzenia pozwalającego jednoznacznie wyznaczyć *mocny punkt* w przestrzeni dwuwymiarowej.

Twierdzenie Shapleya-Owena

Współrzędne *mocnego punktu* w grze większości w Euklidesowej przestrzeni $\mathbf{R}^2$ są ważoną średnią współrzędnych idealnych punktów graczy, zaś wagami są wartości przestrzennej generalizacji wartości Shapleya.

Punkt ten określili jako „środek siły" w zgromadzeniu.

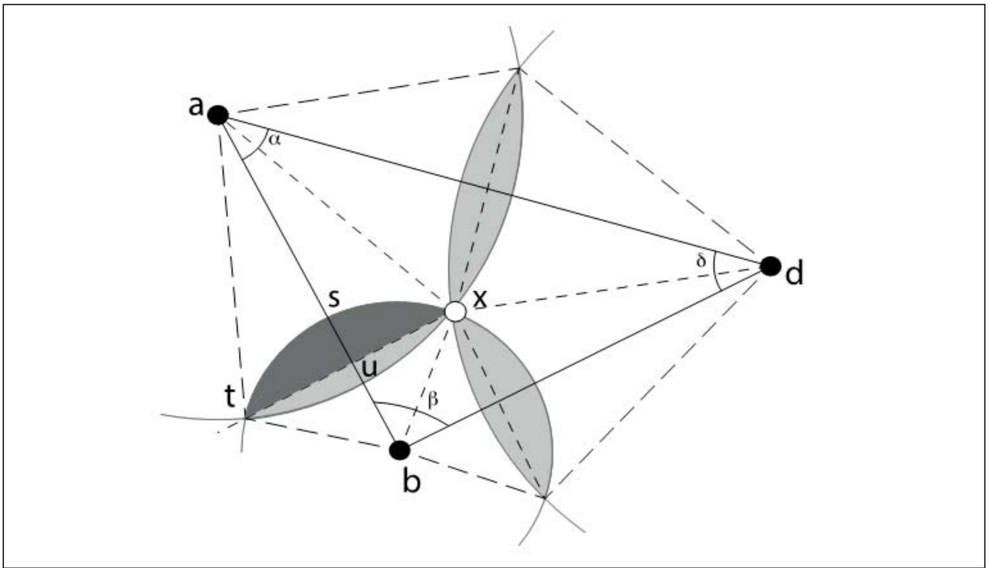
Shapley z Owenem pełny dowód swojego twierdzenia poprzedzili przekonującą ilustracją idei dowodu (Shapley i Owen, 1989: 340)[28], tok rozumowania prezentując na uproszczonym przykładzie zgromadzenia składającego się z trzech głosujących. Wykorzystam trójkę graczy (a, b, d) z przykładu wykorzystywanego w tym artykule. Figury zaznaczone na szaro na rysunku 4, o kształtach przypominających niesymetryczne soczewki (część wspólna trzech wycinków kół o środkach w punktach w punktach a, b oraz d, promieniach równych odległościom tych punktów od punktu x i kątach równych podwojonym kątom trójkąta abd przy odpowiednich wierzchołkach) przedstawiają zbiór alternatyw, z którymi przegrywa alternatywa

[24] Przegląd tych wysiłków znajdzie Czytelnik w tekście (Lissowski, 2003).
[25] Zob. również (Owen, 1990).
[26] Ang. *strong point*.
[27] Jeśli istnieje zwycięzca w sensie Condorceta, to alternatywa ta jest *mocnym punktem*. W ogólnym przypadku zbiór *mocnych punktów* tworzy zbiór alternatyw wybieranych metodą Copelanda. Zob. m.in. (Haman, 2003a: 94).
[28] Pełny dowód twierdzenia znajduje się w tym samym tekście. Idea dowodu opisana jest również w (Straffin, 1994: 1149).

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.11

znajdująca się w punkcie *x*. Na przykład „soczewka" między punktami *x* i *t* określa te alternatywy, które leżą bliżej zarówno punktu *a*, jak i *b*. Zatem gracze *a* i *b* mają powód, by zgodnie głosować przeciwko alternatywie *x* na rzecz którejkolwiek alternatywy ze wspomnianego obszaru.

Rysunek 4. Znajdowanie *mocnego punktu x* dla trójki graczy *a, b, d*[29]



Mamy pokazać, że suma pól figur z rysunku, ograniczonych łukami, jest najmniejsza wtedy, gdy współrzędne punktu *x* wyznaczone są przez średnią współrzędnych punktów *a*, *b*, *d* ważoną przez wartości Shapleya-Owena graczy usytuowanych w tych punktach.

Dodać należy na początku, że Shapley (1977) pokazał, że dla każdych trzech rozłącznych punktów idealnych graczy w przestrzeni, przy głosowaniu większościowym, wartość Shapleya-Owena każdego gracza jest proporcjonalna do kąta przy odpowiednim wierzchołku trójkąta[30]. Wartości Shapleya-Owena graczy *a*, *b*, *d* są zatem równe, odpowiednio, $\frac{\alpha}{\pi}, \frac{\beta}{\pi}, \frac{\delta}{\pi}$ (używam dalej zapisów kątów w radianach).

Wyznaczymy teraz pole powierzchni będącej miarą wrażliwości alternatywy *x* na porażkę – pole figury będącej zbiorem alternatyw, z którymi przegrywa alternatywa *x*. Oznaczymy ten zbiór jako *W*(*x*). Pole figury *xstu* zaznaczonej na rysunku 4 ciem-

[29] Por. (Straffin, 1994: 1149).

[30] Dla punktów usytuowanych na prostej (w $\mathbf{R}^1$) kąt przy punkcie idealnym gracza środkowego jest równy 180°, czyli w radianach π, zaś graczy skrajnych – 0°, zatem, zgodnie z przedstawionymi w tekście wynikami, wartość Shapleya-Owena gracza środkowego jest równa 1, a pozostałych – 0.

DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.11

niejszym odcieniem jest dwukrotnością różnicy pola wycinka koła *bsx* o środku w punkcie *b* i promieniu *bx* oraz trójkąta *bux*. Zarazem pole trójkąta *bux* (fragmentu trójkąta *abd*) jest równe polu trójkąta *but* będącego jego lustrzanym odbiciem przez odcinek *ab*. Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla pozostałych segmentów figury przedstawionej na rysunku. Poszukiwane pole otrzymamy, odejmując dwukrotność pola trójkąta *abd* (pole sześciokąta zaznaczonego na rysunku przerywaną linią) od dwukrotności sumy pól wszystkich wycinków kół o środkach w punktach *a, b, d* i promieniach, odpowiednio, *ax*, *bx*, *dx* oraz katach, odpowiednio, α, β, δ:[31]

$$W(x) = \alpha(\overline{ax})^2 + \beta(\overline{bx})^2 + \delta(\overline{dx})^2 - 2\Delta abd.$$

W $\mathbf{R}^2$ wyrażenie $W(x)$ można traktować jako funkcję dwóch zmiennych – współrzędnych punktu x, które oznaczyłem jako x_1 oraz x_2:

$$W(x_1, x_2) = \alpha[(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2] + \beta[(x_1 - b_1)^2 + (x_2 - b_2)^2] + \\ + \delta[(x_1 - d_1)^2 + (x_2 - d_2)^2] - 2\Delta abd.$$

Współrzędne punktów *a*, *b* oraz *d* to stałe, które oznaczyłem jako, odpowiednio, $[a_1, a_2]$, $[b_1, b_2]$, $[d_1, d_2]$. Pole trójkąta *abd* jest, rzecz jasna, również stałą, niezależną od położenia punktu *x*.

Aby znaleźć minimum[32] tego wyrażenia, wystarczy wyznaczyć pochodną cząstkową po każdej ze współrzędnych x_i i przyrównać ją do zera[33]:

$$\frac{\partial W}{\partial x_i} = 2\alpha(x_i - a_i) + 2\beta(x_i - b_i) + 2\delta(x_i - d_i) = 0,^{34}$$

by, po prostych przekształceniach, otrzymać (pamiętamy, że suma kątów trójkąta o kątach α, β oraz δ jest równa $\alpha + \beta + \delta = \pi$):

$$x_i = \frac{\alpha a_i + \beta b_i + \delta d_i}{\alpha + \beta + \delta} = \frac{\alpha}{\pi} a_i + \frac{\beta}{\pi} b_i + \frac{\delta}{\pi} d_i.$$

$W(x)$ osiąga zatem minimum dla punktu *x* danego jako:

$$x = \frac{\alpha}{\pi} a + \frac{\beta}{\pi} b + \frac{\delta}{\pi} d.$$

Wagi przy punktach *a*, *b* oraz *d* to właśnie wartości przestrzennej generalizacji wartości Shapleya dla gier prostych.

---

31 Pole wycinka koła o promieniu *r* kącie środkowym α jest równe $\frac{1}{2}\alpha r^2$, zatem w naszym przykładzie np. $\alpha(\overline{ax})^2$ określa dwukrotność pola wycinka koła o promieniu α (albo pole wycinka koła o promieniu 2α) i promieniu równym długości odcinka *ax*.

32 Badana funkcja jest wypukła.

33 Przekształcenia dla każdej ze współrzędnych, x_1 i x_2, są identyczne, więc nie przedstawiam ich osobno.

34 Pochodna pola trójkąta *abd* po współrzędnych x_i jest równa 0, ponieważ pole to jest stałą, niezależną od położenia punktu *x*.

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.11

W tym miejscu warto dodać, że dla zbioru czterech graczy (*a*, *b*, *c* oraz *d*) rozważanego w artykule *mocny punkt* znajduje się bardzo blisko punktu idealnego gracza *c*[35].

Twierdzenie odnosi się wprawdzie jedynie do przypadków przestrzeni dwuwymiarowych, jednakże wiele modeli przestrzeni ideologicznych[36] jest właśnie dwuwymiarowych. Dwa wymiary okazują się na ogół wystarczające do skutecznego opisu zjawisk decyzyjnych w polityce.

Poniższy przykład jest ogólną prezentacją interpretacji *mocnego punktu* w rzeczywistości politycznej naszego kraju.

Przykład. Sejm VII kadencji

W jednym z moich artykułów (Jasiński, 2012) przedstawiłem koncepcję rekonstrukcji tzw. przestrzeni ideologicznej *ex-post*, czyli na podstawie głosowań – rzeczywistych zachowań posłów. Na podstawie analizy głosowań posłów lub całych klubów parlamentarnych można oszacować odległości między posłami czy też klubami. Wówczas można wyznaczyć dogodną przestrzenną reprezentację oszacowanych odległości. Zaproponowane rozwiązanie, choć nie pozbawione ograniczeń, pozwala jednak na oddzielenie ustaleń bazujących jedynie na niestabilnych deklaracjach polityków oraz spekulatywnych dyskusjach komentatorów polityki od wyników opierających się na rzeczywistości dostępnej badaniom empirycznym. We wspomnianym artykule przedstawiłem rekonstrukcję przestrzeni ideologicznych w szóstej i siódmej kadencji Sejmu.

Poniższy przykład bazuje na wynikach uzyskanych przez moją magistrantkę, Aleksandrę Kozaczuk (Kozaczuk, 2013), która zdecydowała się zastosować moją koncepcję do własnych badań. Wyniki te zostały opisane w finalizowanej obecnie pracy dyplomowej. Za zgodą Autorki przedstawiam uzyskane rezultaty. Rekonstrukcja dotyczy 5 i 6 posiedzenia Sejmu siódmej (obecnej) kadencji. W tym okresie przeprowadzono 48 głosowań. Głosowano szereg ważnych kwestii, mocno dzielących polską scenę polityczną. Były to m.in. głosowania w sprawie wydłużenia okresu, w którym rodzice mieliby decydować o posłaniu sześcioletniego dziecka do szkoły (ustawa o zmianie ustawy o systemie oświaty oraz o zmianie niektórych innych ustaw), w sprawie projektu ustawy o składkach na ubezpieczenie zdrowotne rolników za 2012 r., w sprawie refundacji leków (ustawa o zmianie ustawy o refundacji leków, środków spożywczych specjalnego przeznaczenia żywieniowego oraz wyrobów medycznych oraz niektórych innych ustaw) oraz wniosek o wyrażenie wotum nieufności wobec ministra zdrowia Bartosza Arłukowicza.

[35] Czytelnik może samodzielnie wyznaczyć jego współrzędne. Wartości Shapleya-Owena dla poszczególnych graczy zostały przedstawione w artykule, zaś współrzędne punktów graczy są następujące: *a* [1, 3.5], *b* [2, 1.3], *c* [2.5, 2], *d* [4, 2.5].

[36] M.in. (Rapoport, Golan, 1985), (Rabinovitz, Macdonald, 1986), (Straffin, 1994), (Haman, 2001), (Jasiński, 2003), (Godfrey, 2005), (Jasiński, 2012).

DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.11

Na podstawie głosowań przeprowadzonych podczas 5 i 6 posiedzenia Kozaczuk oszacowała odległości między klubami parlamentarnymi, odtworzyła przestrzeń ideologiczną i wyznaczyła wartości zarówno symetrycznego indeksu Shapleya-Shubika jak i jego przestrzennej generalizacji – wartości Shapleya-Owena.

Poniżej przedstawiam podział mandatów w Sejmie VII kadencji podczas 5 i 6 posiedzenia oraz wartości obu indeksów siły.

Tabela 1. Podział mandatów i wartości indeksów siły podczas 5 i 6 posiedzenia Sejmu VII kadencji

Klub/Poseł	Liczba głosów	Indeks Shapleya-Shubika	Wartość Shapleya-Owena
Platforma Obywatelska (PO)	207	0,6	0,16
Prawo i Sprawiedliwość (PiS)	136	0,1	0,02
Polskie Stronnictwo Ludowe (PSL)	28	0,1	0,82
Sojusz Lewicy Demokratycznej (SLD)	26	0,1	0
Ruch Palikota (RP)	41	0,1	0
Solidarna Polska (SP)	20	0	0
Ryszard Galla (RG)	1	0	0
Jarosław Jagiełło (JJ)	1	0	0

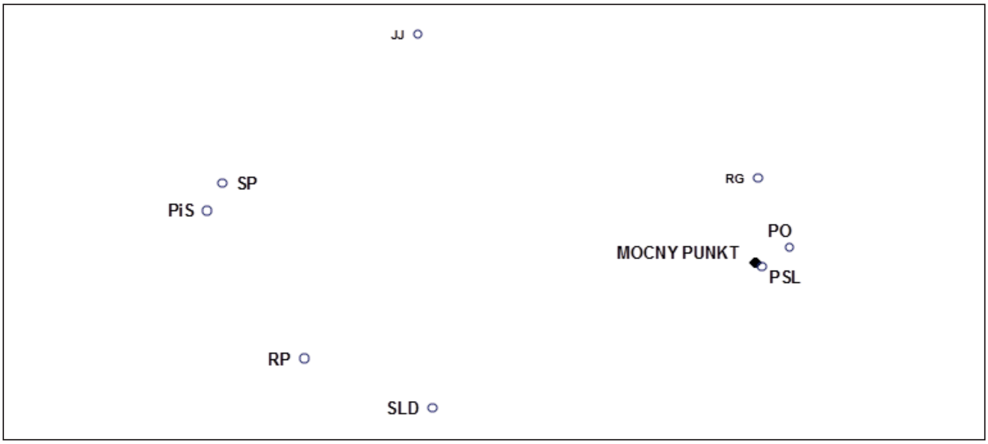
Jak widać, wartości przestrzennej generalizacji znacznie odbiegały wówczas od wartości symetrycznego indeksu siły, abstrahującego od konfiguracji graczy. Jak zobaczymy na następnym rysunku, tak znaczna wartość Shapleya-Owena dla PSL spowodowana jest jego niezwykle korzystnym usytuowaniem, które było konsekwencją podjętej efektywnej strategii w głosowaniach. Szokujące w pierwszej chwili wyniki okazują się dobrze interpretowalne i zgodne z „miękkim" opisem ówczesnej rzeczywistości politycznej. PSL okazał się graczem bardzo atrakcyjnym przy tworzeniu wszelkich porozumień, również z opozycją. Duże kluby – Platformy Obywatelskiej oraz Prawa i Sprawiedliwości – „traciły" zaś jako gracze wyznaczający bieguny przestrzeni ideologicznej. Tak znaczna wartość Shapleya-Owena dla PSL jest odpowiedzialna zarazem za to, że *mocny punkt* tej gry znalazł się tak blisko punktu idealnego PSL. Klubowi PSL opłaciło się wchodzić w rozmaite „flirty" z PiS (jedynym graczem istotnym w tej przestrzeni) i zupełnie ignorować Solidarną Polskę oraz kluby lewicowe, by usytuować punkt najbardziej akceptowalny dla wszystkich znaczących graczy – najmniej niestabilną z alternatyw, czyli *mocny punkt* – blisko swojej pozycji. W tym sensie *mocny punkt* wyznaczałby opcję o największej szansie na konsensus w zgromadzeniu.

Nieco mniejszymi literami zaznaczyłem na rysunku inicjały dwóch posłów niezrzeszonych: Ryszarda Galli (RG) z Mniejszości Niemieckiej i byłego posła PiS Jarosława Jagiełły (JJ). Widać znaczną skłonność posła Galli do zachowań bliskich koalicji, co zresztą nie miało dla koalicjantów żadnego znaczenia strategicznego – poseł ten, podobnie jak poseł Jagiełło, a nawet klub Solidarnej Polski nie mieli żadnego „potencjału koalicyjnego" – nie było na nich zapotrzebowania przy two-

DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.11

rzeniu jakiejkolwiek koalicji wygrywającej, nawet abstrahując od przestrzennego usytuowania graczy.

Rysunek 5. Usytuowanie punktów idealnych graczy i *mocnego punktu* w przestrzeni ideologicznej Sejmu VII kadencji podczas 5 i 6 posiedzenia



Z pewnością wiele ciekawych obserwacji można by poczynić, analizując zmiany przestrzeni ideologicznej w ciągu kadencji oraz badając „wędrowanie” *mocnego punktu* po tej przestrzeni. Jest to temat na osobne opracowanie. Powyższy przykład miał za zadanie jedynie zilustrować zaprezentowaną koncepcję najmniej niestabilnego punktu w chaosie ideologii.

Wartość Shapleya-Owena znajduje się na marginesie działalności naukowej Lloyda Shapleya. Nie została przecież nawet wspomniana przy okazji przyznania mu Nagrody Nobla w 2012 roku. Trudno jednak przecenić jej wkład w rozważania fundamentalnych problemów, zarówno normatywnych, jak i opisowych, przestrzennej teorii głosowania.

DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.11

Bibliografia

Banzhaf, J.F. 1965. *Weighted voting does not work: a mathematical analysis*. „Rutgers Law Review" 19: 317-343.

Black, D. 1958. *The theory of committees and elections*. Cambridge: Cambridge University Press.

Deegan, J. i E. Packel. 1978. *A New index of power for simple n-person games*. „International Journal of Game Theory" 7: 113-123.

Enelow, J.M. i M.J. Hinich. 1984. *The spatial theory of voting. An introduction*. Cambridge: Cambridge University Press.

Enelow, J.M. i M.J. Hinich. 1989. *A general probabilistic spatial theory of elections*. „Public Choice" 61: 101-113.

Godfrey, J. 2005. *Shapley-Owen values for the political parties in the Duma 2000-2003*. Working paper.

Grofman, B., G. Owen, N. Noviello, G. Glazer. 1987. *Stability and centrality of legislative choice in the spatial context*. „American Political Science Review" 81: 539-552.

Haman, J. 2001. *Czy w sejmie jest lewica i prawica?* W: *Obciążeni polityką*. W. Wesołowski (red.) Warszawa. IFiS PAN, s. 61-76.

Haman, J. 2003a. *Demokracja, decyzje, wybory*. Warszawa. Wydawnictwo Naukowe „Scholar".

Haman, J. 2003b. *Stabilność i zmienność w przestrzennych modelach głosowania*. „Studia Socjologiczne" 1: 39-78.

Jasiński, M. 2000. *Czy zawsze większy jest silniejszy, czyli jak zmierzyć siłę uczestników ciał decyzyjnych?*. „Studia Socjologiczne" 1-2: 49-77.

Jasiński, M. 2003. *Stanowisko ideologiczne a znaczenie uczestnika zgromadzenia decyzyjnego*. „Studia Socjologiczne" 1: 139-174.

Jasiński, M. 2004. *Nicea, Konstytucja, kompromis… – o znaczeniu procedur w zgromadzeniach decyzyjnych*. „Decyzje" 1: 81-118.

Jasiński, M. 2009. *Decyzje w dużych grupach – gry oceaniczne*. „Decyzje" 12: 25-52.

Jasiński, M. 2012. *Przestrzeń ideologiczna oparta na politycznych faktach*. „Decyzje" 17: 5-28.

Kozaczuk, A. 2013. *Wartość interpretacyjna przestrzennych generalizacji indeksów siły w przestrzeni ideologicznej ex-post Sejmu VII kadencji*. Praca dyplomowa. W przygotowaniu.

Lissowski, G. 2003. *Wprowadzenie do przestrzennej teorii głosowania*. „Studia Socjologiczne" 1: 9-38.

Malawski, M. 2008. *Wartość Shapleya*. „Decyzje" 10: 27-58.

Malawski, M. 2013. *Lloyd Shapley*. „Decyzje" 19: 109-118.

Malawski, M., H. Sosnowska, A. Wieczorek. 1997. *Konkurencja i kooperacja. Teoria gier w ekonomii i naukach społecznych*. Warszawa. Wydawnictwo Naukowe PWN.

McKelvey, R. 1976. *Intransitivities in multidimensional voting bodies and some implications for the agenda control*. „Journal of Economic Theory" 12: 472-482.

Mercik, J.W. 1999. *Siła i oczekiwania. Decyzje grupowe*. Warszawa – Wrocław. Wydawnictwo Naukowe PWN.

Owen, G. 1971. *Political games*. „Naval Research Logistics Quarterly" 18: 345-355.

Owen, G. 1977. *Values of games with a priori unions*. w: „Mathematical economics and game theory", R. Hein, O. Moeschlin (red.) New York. Springer, s. 76-88.

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.11

Owen, G. 1990. *Stable outcomes in spatial voting games*. „Mathematical Social Sciences" 19: 269-279.

Plott, C. 1967. *A notion of equilibrium and its possibility under majority rule*. „American Economic Review" 57: 787-806.

Rabinovitz, G. i S. Macdonald. 1986. *The power of the states in US Presidential elections*. „American Political Science Review" 80: 65-87.

Rapoport, A. i E. Golan. 1985. *Assessment of political power in the Israeli Knesset*. „American Political Science Review" 79: 673-692.

Shapley, L.S. 1977. *A Comparison of power indices and a non-symmetric generalization*. RAND Paper. Santa Monica. Rand Corporation. P-5872.

Shapley, L.S. i G. Owen. 1989. *Optimal location of candidates in ideological space*. „International Journal of Game Theory" 18: 339-356.

Shapley, L.S. i M. Shubik. 1954. *A method of evaluating the distribution of power in a committee system*. „American Political Science Review" 48: 787-792.

Sosnowska, H. 1995. *Analiza programów wyborczych i wyników wyborów za pomocą wartości Shapleya z prekoalicjami na przykładzie wyborów do Sejmu z 19.09.1993*. „Roczniki Kolegium Analiz Ekonomicznych" nr 2/1998. Warszawa. Oficyna Wydawnicza SGH, s. 181-188.

Sosnowska, H. 1999. *Indeksy siły*. W: „Grupowe podejmowanie decyzji". H. Sosnowska (red.) Warszawa. Wydawnictwo Naukowe „Scholar", s. 103-122.

Straffin, P. D. 1994. *Power and stability in politics*. W: „Handbook of Game Theory" t.2, R.J. Aumann i S. Hart (red.) Elsevier Science BA, s. 1128-1151.

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.11