INDEKSY HYBRYDOWE W GRACH OCEANICZNYCH, CZYLI RACJONALNY TŁUM W STRUKTURZE IDEOLOGICZNEJ[1]

Mikołaj Jasiński[2]
Uniwersytet Warszawski

Streszczenie: *Zasadniczym celem artykułu jest przedstawienie koncepcji teoretycznej, umożliwiającej uwzględnienie zróżnicowania ideologicznego w zgromadzeniu z bardzo dużą liczbą głosujących. Przy analizie realiów politycznych nie do utrzymania jest bowiem przyjmowany dotychczas w modelach gier oceanicznych warunek o identycznej skłonności poszczególnych głosujących do budowania koalicji ze wszystkimi innymi głosującymi. W pracy rozwijam koncepcję „hybrydowych indeksów siły" dla przypadków gier oceanicznych. Analizuję gry oceaniczne ze strukturą cząstkowej jednolitości graczy.*

Artykuł jest zarazem podsumowaniem moich prac badawczych z ostatnich lat, związanych z analizą procesów decyzyjnych w dużych zgromadzeniach oraz modelowaniem zróżnicowania ideologicznego w zgromadzeniach decyzyjnych. W pracy podejmuję również próbę pokazania dobrego umocowania teoretycznego prezentowanych modeli w klasycznych teoriach socjologii.

Ostatnie części artykułu poświęcone są zarysowaniu możliwych interpretacji socjologicznych opisanych modeli oraz przedstawieniu planów dalszych badań przy wykorzystaniu opisanej koncepcji.

Słowa kluczowe: *ważona gra większości, gra oceaniczna, struktura cząstkowej jednolitości, wartość Shapleya, hybrydowy indeks siły.*

[1] Autor dziękuje za cenne uwagi, dyskusje i podpowiedzi Markowi Bożykowskiemu, prof. Grzegorzowi Lissowskiemu, dr. Markowi Styczniowi, dr. Marcinowi Malawskiemu, dr. hab. Jackowi Hamanowi, dr Joannie Koniecznej-Sałamatin i dr hab. Marcie Bucholc oraz anonimowym recenzentom.

[2] Mikołaj Jasiński, Zakład Statystyki, Demografii i Socjologii Matematycznej w Instytucie Socjologii Uniwersytetu Warszawskiego; e-mail: mikolaj.jasinski@is.uw.edu.pl

DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.47

HYBRID POWER INDICES IN OCEANIC GAMES OR A RATIONAL CROWD IN AN IDEOLOGICAL STRUCTURE

Abstract: *This paper aims to present a theoretical concept that allows to investigate decision-making in large and ideologically differentiated bodies. Former models of oceanic games were based on the assumption of equal disposition to cooperate with other players among all voters. It is impossible to hold this assumption in a political reality. The paper develops the concept of "hybrid power indices" for oceanic games. Oceanic games with a partial homogeneity structure are analysed in the paper.*

The paper is the result of my previous studies of decision-making processes in large assemblies and my efforts in modelling ideological differentiation in political bodies.

The paper also shows that presented formal models have solid foundations in classical sociological theories.

The last part presents several convenient and reliable sociological interpretations of the models as well as my plans for future studies using the models described.

Key words: *weighted voting game, oceanic game, partial homogeneity structure, Shapley value, hybrid power index.*

Wspólnota wyrasta ze współdziałania,
które jest jednocześnie współ-oddziaływaniem
odrębnych i różnych od siebie istot;
jest tym, co jest ***między*** *nimi,*
jest słowem „i" w wyrażeniu „ja ***i*** *ty* ***i*** *on".*
(Marody i Giza, 2004, s. 105)

1. Uwagi wstępne

Relacja jednostki i społeczności, którą tworzy wraz z innymi jednostkami, to temat nieustannie pobudzający umysły i wyobraźnie socjologów. W jaki sposób jednostki tworzą społeczności, jak zmienia się zbiorowość wraz z przybywaniem do niej nowych członków – to zagadnienia będące przedmiotem analiz zarówno dawnych klasyków socjologii, takich jak Ferdinand Tönnies czy Émile Durkheim, jak i współ-

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.47

czesnych badaczy rzeczywistości ponowoczesnej, jak Mirosława Marody czy Anna Giza-Poleszczuk. Proces tworzenia przez jednostki większych całości bywa uznawany za regres lub za drogę tworzenia nowej, lepszej jakości. *Tłum to nagromadzenie miernoty, nigdy zaś inteligencji* – twierdzi Gustave Le Bon (Le Bon, 2004, s. 18). Tönnies zdaje się mu odpowiadać, że jednak *wspólnota ludzka jest wspólnotą rozumną* (Tönnies, 2008, s. 48). Nie ulega jednak wątpliwości, że jednostka w grupie zachowuje się inaczej niż w odosobnieniu, że grupa nie jest *sumą i średnią swych składników* (Le Bon, 2004, s. 17), zaś jednostki *dostosowują się do siebie – jak mówimy potocznie „docierają się" w toku intensywnych interakcji; wcielają w siebie wspólnotę jako drugą naturę* (Marody i Giza, 2004, s. 106).

W pierwszym z moich tekstów poświęconych zagadnieniu podejmowania decyzji w dużych zbiorowościach, tzw. grom oceanicznym (Jasiński, 2009), przedstawiłem podstawy modelu dla sytuacji, w których rozważamy grupy decydentów, którzy nie są w stanie „ogarnąć wzrokiem swojego zgromadzenia". Pokazałem, że teoria gier kooperacyjnych zawiera propozycję modeli użytecznych do rozsądnych analiz mechanizmów decyzyjnych w takich dużych grupach, a nawet pozwalających formułować wiarygodne przewidywania rzeczywistych zjawisk zachodzących w czasie masowych zachowań decyzyjnych (zob. m.in. Straffin, 1977b, 1983, Jasiński, 2009, 2013). Przedstawione modele ponadto pozwoliły zaproponować wyjaśnienie, dlaczego należy odróżniać od siebie sytuacje decyzji zbiorowych z małą grupą decydentów od tłumu decydentów. Tłum decydentów, według przedstawionych modeli, pozostaje jednak racjonalnym tłumem podejmującym przewidywalne decyzje, w odróżnieniu od tłumu Le Bona, który *będąc zawsze bezimienny, jest tym samym i nieodpowiedzialny* (Le Bon, 2004, s. 18). Tłum Aumanna i Shapleya jest bliższy raczej *stowarzyszeniu-kalkulującemu społeczeństwu* (*Gesellschaft*) Tönniesa, które powodowane *wolą społeczną* jest miejscem rozumnych wyborów (por. Tönnies, 2008, s. 69). Nawet osiąganie jednomyślności jest w teorii Tönniesa procesem *rozumnym, słusznym, prawdziwym* (por. Tönnies, 2008, s. 70), zaś poszczególne wybory przedstawia on jako akty, w których wybierane strategie muszą dominować pozostałe. *Konieczne jest (...), by to, co można otrzymać w zamian, wydawało się lepsze od tego, co można ofiarować* (por. Tönnies, 2008, s. 67).

Czytając pisma autora *Gemeinschaft und Gesellschaft*, trudno powstrzymać się od przekonania, że jest to jedna z teorii normatywnych, która kilkadziesiąt lat później zostanie wypowiedziana w języku teorii gier. Pojęcie wiedzy wspólnej czy kryteria racjonalności członków społeczeństwa traktowanych jako kalkulujący gracze, to pojęcia konieczne do konstrukcji modeli dziewiętnastowiecznego klasyka socjologii. Racjonalność zbiorowych decyzji graczy dążących do maksymalizacji użyteczności osiąganych rezultatów, regulowana jest w teorii gier kooperacyjnych przez postulat superaddytywności koalicji. Głosi on, że wartość funkcji charakterystycznej dla

DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.47

połączonych koalicji (funkcję charakterystyczną koalicji można interpretować jako jej całkowity „utarg" w hipotetycznej rywalizacji przeciwko reszcie decydentów) nie może być mniejsza od sumy funkcji charakterystycznych dla koalicji rywalizujących osobno. Tak rozumiana racjonalność nadaje w teorii gier sens istnienia porozumień-koalicji. Jest to ta sama racjonalność, która powoduje, że członkowie kalkulującego społeczeństwa (*Gesellschaft*) *pozostają rozdzieleni mimo powiązań. Toteż nie ma w nim miejsca na działania wynikające z apriorycznej i koniecznej jedności, wyrażające wolę i ducha tej jedności (...). Nikt nie uczyni nic dla drugiego, nikt nikomu nic nie da, chyba że w oczekiwaniu równorzędnego rewanżu* (por. Tönnies, 2008, s. 67). Warunkiem osiągnięcia porozumienia (stworzenia koalicji) jest, zdaniem Tönniesa, powszechna zgoda tworzących koalicję osób, że akt będący przedmiotem decyzji jest dla nich korzystny. *W przeciwnym razie ogół może ten poszczególny akt zanegować, może głosić, że a = b, lecz a > b lub a < b, a rzeczy są wymieniane nie według swojej prawdziwej wartości. Prawdziwa wartość to wartość zaakceptowana przez wszystkich* (Tönnies, 2008, s. 69–70). Można powiedzieć, że zdaniem Tönniesa koalicja może zaistnieć tylko w razie, gdy wszyscy jej członkowie swój udział w niej uznają za bardziej opłacalny niż występowanie osobno. W przeciwnym razie nie mieliby motywu do łączenia się w porozumienia-koalicje.

Tłum modelowany za pomocą bardzo dużej liczby *drobnych* decydentów (*oceanu graczy*, np. drobnych akcjonariuszy) z gier Aumanna i Shapleya, pomimo wspomnianej odmienności swej sytuacji od sytuacji pojedynczych, *dużych* decydentów (*atomowych* graczy, np. akcjonariuszy o dużej liczbie akcji), nie traci swej racjonalności, jak tłum Le Bona. *Dusza tłumu* nie pozbawia tutaj graczy możliwości optymalizowania ich wyborów. Modele gier oceanicznych posiadają sensowne interpretacje w dużych zgromadzeniach decyzyjnych.

Dotychczasowe teksty dotyczące gier oceanicznych zawierały jednak mocne założenie o anonimowości-symetryczności graczy występujących w modelach. Jest ono szczególnie trudne do utrzymania w przypadku tzw. gier politycznych, w których gracze reprezentują decydentów „zanurzonych" w ideologii, a przez to przejawiających różne skłonności do budowania wspólnych porozumień. Trudno oczekiwać bowiem, aby dany głosujący był równie skłonny do zawierania koalicji z każdym innym głosującym – z tym, którego standardów oceny rzeczywistości nie podziela, jak i z innym podobnie postrzegającym rzeczywistość będącą przedmiotem zbiorowej decyzji.

W dwóch poprzednich publikacjach dotyczących podejmowania zbiorowych decyzji przez polityczne zgromadzenia przedstawiłem różne sposoby ujęcia tego zagadnienia. Oba prezentowały koncepcje modelowania ideologii na podstawie rzeczywistych zachowań głosujących: przestrzeni ideologicznej *ex post* (Jasiński,

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.47

2012) i *struktury cząstkowej jednolitości* graczy (Bożykowski i Jasiński, 2014). Druga z nich, opisana wspólnie z Bożykowskim, prowadzi do konstrukcji tzw. hybrydowych indeksów siły, pozwalających na określenie znaczenia uczestników zbiorowego podejmowania decyzji przy danej (np. wyestymowanej) strukturze ideologicznej zgromadzenia.

Niniejszy artykuł zawiera propozycję opisu gier oceanicznych ze strukturą cząstkowej jednolitości, a więc modelu masowych decyzji (z bardzo dużą liczbą głosujących) w rzeczywistości ideologicznej. Koncepcja ta może być traktowana jako jeden z formalnych zapisów wspomnianej teorii Tönniesa – tym razem jednak w odniesieniu zarówno do pojęcia społeczeństwa-stowarzyszenia (*Gesellschaft*), jak i wspólnoty (*Gemeinschaft*). Jak u źródeł stowarzyszenia widzi on poszukującą zysków kalkulację, *wolę arbitralną*, tak podstaw wspólnoty doszukuje się w istnieniu *naturalnej woli*, *wspólnego ducha* łączącego jej członków. Owa współzależność przy tym *nie jest intencjonalnym wytworem członków wspólnoty. Nie jest tak, by jednostki mogły uświadomić sobie „racjonalność" życia we wspólnocie, a następnie zawiązać ją w celu osiągnięcia większych korzyści. Wspólnoty nie da się powołać do życia mocą postanowienia, które przynależy do dziedziny „woli arbitralnej"* (Marody i Giza, 2004, s. 106). Tym, co u Tönniesa, zdaniem Marody i Gizy-Poleszczuk, spaja wspólnotę, jest więź społeczna, jest *bycie-dzielone-z-innymi*, są wspólne upodobania, taki sam sposób patrzenia na rzeczywistość. Obie kategorie, *Gemeinschaft* i *Gesellschaft*, wprawdzie przeciwstawne, współistnieją w jednej rzeczywistości. Sam Tönnies stwierdził, że nie zna *żadnego stanu kultury czy społeczeństwa, w którym elementy Gemeinschaft i Gesellschaft nie byłyby jednocześnie obecne* (cyt. za Szacki, 1983, s. 504) (por. Tönnies, 2008, s. 329).

Można zatem zbiorowość decydentów, kalkulującą społeczność, przedstawić jako strukturę składającą się z podzbiorów, z których każdy charakteryzuje jakaś wspólnota recepcji rzeczywistości, wspólne standardy oceny głosowanych kwestii, odmienne dla różnych wspólnot-podzbiorów zgromadzenia. Operacjonalizacją tego opisu może być wspomniana struktura cząstkowej jednolitości graczy, opisana szczegółowo m.in. w tekście (Bożykowski i Jasiński, 2014) i zasygnalizowana w następnym podrozdziale.

Indeksy siły służące ocenie znaczenia uczestników zgromadzeń decyzyjnych zbudowane na bazie opisanych powyżej skrótowo założeń, zwane hybrydowymi indeksami siły, były dotychczas przedstawiane jedynie w odniesieniu do gier z niewielką liczbą graczy. W tym tekście przedstawiam konstrukcję hybrydowych indeksów siły dla gier z bardzo dużą liczbą graczy – gier oceanicznych ze strukturą cząstkowej jednolitości – *Gemeinschaft* i *Gesellschaft*.

DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.47

1.1. Oznaczenia, definicje i założenia

1.1.1. Ważona gra większości i struktura cząstkowej jednolitości graczy

Ważone gry większości. Pojęciem, do którego będę się odwoływał w poniższych rozważaniach, będzie ważona gra większości.

Ważone gry większości (zwane niekiedy ważonymi grami głosowania) są ważną kategorią w teorii gier kooperacyjnych. Służą do opisu sytuacji zbiorowej decyzji zgromadzenia, w którym każdy z głosujących (np. klub parlamentarny) ma przypisaną pewną wagę, nieujemną liczbę rzeczywistą (np. frakcję głosów, którymi dysponuje klub – wtedy wagi sumują się do liczby 1), zaś do podjęcia decyzji przez zgromadzenie potrzeba i wystarcza poparcie głosowanego wniosku przez graczy o łącznej wadze osiągającej lub przekraczającej pewien ustalony próg (oznaczam go dalej jako c). Ten próg wyznacza więc regułę decyzyjną w danym zgromadzeniu[3].

Ważoną grę większości ze zbiorem graczy $N = \{1,...,n\}$, z wagą w_i przyporządkowaną i-temu graczowi oraz progiem c zapisywać będę jako $[c;w_1,...,w_n]$. Swoje rozważania ograniczę do tzw. gier właściwych, czyli takich, że dopełnienie koalicji wygrywającej nie jest koalicją wygrywającą. Niespełnienie tego warunku w ważonej grze większości byłoby możliwe w sytuacji, gdyby próg był nie większy niż połowa sumy wag wszystkich graczy[4]. Wówczas możliwe byłoby zaistnienie dwóch rozłącznych koalicji wygrywających. Oznaczałoby to nieprzełamywalny impas, którego twórcy reguł zbiorowego podejmowania decyzji z zasady unikają, gdyż w przeciwnym razie paraliżowałoby to prace danego zgromadzenia. Ponadto rozważane będą tylko głosowania dychotomiczne – z możliwością poparcia lub sprzeciwu wobec głosowanego wniosku. Każde zachowanie, w tym nieobecność na sali podczas głosowania lub wstrzymanie się od głosu, da się – przy znajomości rozkładu głosów, które padły, sposobu sformułowania wniosku i reguły decyzyjnej – zakwalifikować jako poparcie lub sprzeciw wobec wniosku. Na przykład wstrzymanie się od głosu w głosowaniu w sprawie odrzucenia weta Prezydenta oznacza faktycznie poparcie stanowiska Prezydenta.

Struktura cząstkowej jednolitości graczy. W części wprowadzającej oraz w artykule (Bożykowski i Jasiński, 2014, ss. 11–14) przedstawione zostały szczegółowo założenia koncepcji struktury cząstkowej jednolitości zaproponowanej w 1977 roku przez Straffina (w pracy Straffin, 1977a). Poniżej przypomnę jedynie najważniejsze z nich i wprowadzę niezbędne oznaczenia.

---

3 Nie wszystkie procedury decyzyjne da się opisać przy pomocy ważonych gier większości. Na przykład w razie analizy złożonych mechanizmów decyzyjnych niejednokrotnie należałoby odwołać się do ogólniejszej kategorii – gier prostych, których podzbiór stanowią ważone gry większości. Charakterystykę gier prostych znajdzie Czytelnik w większości podręczników teorii gier. Na użytek tych rozważań wystarczy ograniczyć się do ważonych gier większości.

4 Można też żądać, by próg nie był mniejszy, jeśli jako warunek przejścia wniosku przyjęlibyśmy wymóg przekroczenia, a nie osiągnięcia progu przez sumę wag uczestników koalicji popierającej wniosek.

DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.47

U podstaw propozycji Straffina leży interesująca probabilistyczna interpretacja dwóch najbardziej chyba znanych indeksów siły, indeksu Shapleya-Shubika oraz indeksu Banzhafa[5].

Koncepcję tę można przedstawić w postaci dwuetapowego modelu podejmowania decyzji przez głosujących, którzy najpierw oceniają wniosek (ustala się wtedy ich skłonność do poparcia tego wniosku), a następnie podejmują decyzję o poparciu bądź sprzeciwie wobec niego.

W pierwszym etapie, zgodnie z modelem, z ustalonego rozkładu losowane jest prawdopodobieństwo tego, że dany gracz poprze głosowany projekt. Prawdopodobieństwo przypisane *i*-temu graczowi oznaczyć możemy przez q_i ($0 \leq q_i \leq 1$), którego wartość losowana jest z pewnego rozkładu ciągłej zmiennej losowej przyjmującej wartości od 0 do 1. Wykres przedstawiający rozkład zmiennej losowej q_i może mieć dowolny, teoretycznie lub empirycznie uzasadniony kształt. W razie sensownych przesłanek, że głosujący są z zasady bardziej skłonni do sprzeciwu wobec głosowanych wniosków, można by przyjąć jeden z rozkładów prawoskośnych, zaś w razie obserwowanej skłonności do popierania wniosków – jeden z rozkładów lewoskośnych. W rzeczywistości głosowań parlamentarnych wiele zależy od sformułowania wniosku. Głosując przeciw poprawkom do uchwały *de facto* głosuje się za uchwałą bez zmian. Czy oznacza to zatem negatywne głosowanie, czy pozytywne? Nie wnikając w psychologiczne aspekty reakcji na tak czy inaczej sformułowane pytanie przez przewodniczącego zgromadzenia, można przyjąć, że niewskazane byłoby przy omawianiu ogólnej konstrukcji modelu ustalanie jakiejkolwiek tendencji głosujących. Podobnie jak w przywoływanych tekstach (Straffin, 1977a, Bożykowski i Jasiński, 2014), będę przyjmował równomierne rozkłady zmiennych losowych reprezentujących prawdopodobieństwa. Rozkład równomierny w sposób jednakowy traktuje wszystkie wartości zmiennej losowej. W przypadku, gdy nie mamy żadnych podstaw do wyróżniania jakichkolwiek wartości prawdopodobieństwa poparcia kwestii, założenie to wydaje się naturalne.

W drugim etapie gracze, w sposób niezależny, głosują – dany gracz z prawdopodobieństwem q_i głosuje za wnioskiem i z prawdopodobieństwem $1 - q_i$ głosuje przeciw wnioskowi.

Możemy postawić pytanie o indywidualny wpływ gracza na zgromadzenie: jakie jest prawdopodobieństwo, że dany gracz będzie graczem krytycznym, tj. że głosowany przez zgromadzenie wniosek przejdzie w głosowaniu, jeśli ów gracz go poprze, ale przepadnie, jeśli gracz zagłosuje przeciw niemu?

[5] Charakterystykę indeksów siły oraz ich interpretację jako liczbowych miar znaczenia uczestników zgromadzeń decyzyjnych, ze względów redakcyjnych, pomijam. Czytelnika pragnącego uzupełnić swoją wiedzę w tej dziedzinie zachęcam do lektury niemal dowolnego podręcznika z teorii gier (np. Straffin, 2001) lub którejś z licznych publikacji zarówno w języku angielskim (np. Straffin, 1983), jak i w języku polskim (np. Mercik, 1999, Sosnowska, 1999, Jasiński, 2000).

DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.47

Straffin (1977a, 1983) pokazał, że odpowiedź na to pytanie zależy od jeszcze jednego założenia. Możemy bowiem albo założyć, że wartość q_i jest wspólna dla wszystkich graczy (i równa q), albo, że wartość q_i jest w pierwszym etapie „losowana" dla każdego gracza osobno. Pierwsza możliwość interpretowana jest jako przyjęcie istnienia wspólnych standardów wśród głosujących, zaś druga – jako przyjęcie założenia o braku wspólnych standardów (każdy z graczy ma własny, niezależny od innych sposób oceny głosowanych kwestii). Pierwszą opcję nazwał założeniem jednolitości, drugą – założeniem niezależności. Warto podkreślić, że przyjęcie założenia jednolitości nie oznacza, że gracze głosują jednomyślnie – mają jedynie równe prawdopodobieństwo głosowania za wnioskiem.

Okazuje się, że jeśli przyjmiemy założenie jednolitości, wówczas odpowiedzią na pytanie o indywidualny wpływ gracza na zgromadzenie jest indeks Shapleya-Shubika, zaś w przypadku założenia niezależności – wartość Banzhafa, która po unormowaniu daje indeks Banzhafa.

W przypadku postulowania struktury graczy, zwanej przez Straffina strukturą cząstkowej jednolitości, cały zbiór graczy dzieli się na rozłączne podzbiory. Dla każdego podzbioru (w pierwszym etapie wyimaginowanej procedury) w sposób niezależny losuje się prawdopodobieństwo poparcia danego wniosku. Wyrazem przynależności graczy do jednego podzbioru (wspólnoty) jest takie samo prawdopodobieństwo poparcia wniosku[6]. Wspólne prawdopodobieństwo poparcia wniosku przez graczy współtworzących jeden podzbiór w strukturze cząstkowej jednolitości – wspólne standardy oceny głosowanych opcji wewnątrz pewnego podzbioru graczy – jest wyrazem istnienia Tönniesowskiej *woli naturalnej,* charakteryzującej członków danej wspólnoty-podzbioru jako takich. Można by powiedzieć, że identyczne prawdopodobieństwo przypisywane w modelu członkom wspólnoty, to owo *„i" w wyrażeniu „ja **i** ty **i** on"*, wspomniane jako część motta niniejszego artykułu.

Formalnie rzecz ujmując, strukturą cząstkowej jednolitości C na zbiorze N jest podział tego zbioru na m ($m \leq n$) podzbiorów (niepustych, rozłącznych, których suma jest równa zbiorowi N). Każdemu (j-temu) podzbiorowi przyporządkowana jest liczba q_j. Dalej przez q_j będę rozumiał prawdopodobieństwo poparcia wniosku przez graczy należących do j-tego podzbioru zbioru N.

$C = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_m\}$ – struktura cząstkowej jednolitości graczy,

$$\bigcup_{j=1}^{m} Z_j = N$$

$$Z_j \cap Z_k = \emptyset \text{ dla } j \neq k.$$

[6] Pamiętamy, że przy ustalonych w pierwszym etapie wartościach prawdopodobieństwa, gracze głosują jednak w sposób niezależny. Pamiętamy też, że gracze z jednego podzbioru oczywiście niekoniecznie głosują identycznie.

DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.47

Przy danej strukturze cząstkowej jednolitości graczy C można wyznaczyć prawdopodobieństwo ($P_{C,i}$), że dany (i-ty) gracz będzie graczem krytycznym. Unormowanie prawdopodobieństw prowadzi do tzw. hybrydowych indeksów siły. Hybrydowy indeks siły i-tego gracza przy strukturze cząstkowej jednolitości C oznaczany będzie jako HI_i^C. Dwie trywialne struktury cząstkowej jednolitości, $\{N\}$ oraz $\left\{\{1\}, \{2\},..., \{n\}\right\}$, odpowiadają, odpowiednio, założeniu jednolitości i założeniu niezależności. Zatem dwa „skrajne" indeksy hybrydowe, to, odpowiednio, indeks Shapleya-Shubika oraz indeks Banzhafa. Wartości prawdopodobieństw krytyczności graczy dla wszystkich „pośrednich" struktur, między pełną jednolitością a pełną niezależnością, określają, po unormowaniu, rodzinę indeksów – rodzaj hybrydy obu wielkości: indeksu Shapleya-Shubika i Banzhafa. Tak skonstruowane indeksy siły są indeksami niesymetrycznymi. Pozwalają uwzględnić niejednolitość relacji między głosującymi podczas podejmowania zbiorowej decyzji. Stanowią osobną propozycję modelowania zachowań decydentów w warunkach istnienia czynnika różnicującego ich stosunek do siebie nawzajem i do głosowanych kwestii.

Szczegółowe wyjaśnienie sposobu wyznaczania prawdopodobieństw krytyczności graczy przy danej strukturze cząstkowej jednolitości oraz wartości indeksów hybrydowych zainteresowany Czytelnik znajdzie m.in. w publikacji Straffina (Straffin, 1977a) oraz mojej i Bożykowskiego (Bożykowski i Jasiński, 2014). Poniższy przykład posłużyć ma jedynie dalszemu wyjaśnieniu oznaczeń oraz pokazaniu sposobu wyznaczania wielkości, które będą się pojawiały w dalszej części tekstu.

Przykład 1. Gra z trzema graczami i strukturą cząstkowej jednolitości

Rozważmy grę [3; 2,1,1], z udziałem trójki graczy tworzących zgromadzenie $N = \{a,b,c\}$ o wagach, odpowiednio, 2, 1 oraz 1, w której do podjęcia decyzji potrzeba co najmniej trzech głosów. Spośród pięciu[7] struktur cząstkowej jednolitości na użytek tego przykładu wybrałem strukturę $C = \{\{a\}, \{b,c\}\}$[8]. Gracz a tworzy pierwszy podzbiór – przyporządkować mu należy zatem prawdopodobieństwo q_1 poparcia wniosku. Gracze b i c tworzą drugi podzbiór – przyporządkowujemy im zatem takie samo prawdopodobieństwo q_2. Sposób wyznaczania wartości prawdopodobieństw krytyczności ($P_{C,i}$) dla poszczególnych graczy przedstawię poniżej.

Gracz a jest krytyczny w trzech sytuacjach: gdy wniosek popiera tylko jeden z małych graczy (b lub c – to dwie sytuacje) oraz gdy gracze b i c popierają wniosek. Każdy z pozostałych dwóch graczy jest krytyczny tylko wtedy, gdy wniosek popiera gracz a, zaś drugi spośród nich nie popiera wniosku.

7 Liczba podziałów zbioru dana jest przez liczbę Bella (zob. Bożykowski i Jasiński, 2014).

8 Obliczenia dla innych struktur w tej grze zainteresowany Czytelnik znajdzie w Bożykowski i Jasiński, 2014, ss. 16-18.

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.47

Prawdopodobieństwa krytyczności każdego z graczy przy strukturze cząstkowej jednolitości C dane są zatem następującymi wyrażeniami – funkcjami zmiennych losowych q_1 i q_2 (pamiętamy, że jeśli q_j oznacza prawdopodobieństwo poparcia wniosku, to $1 - q_j$ oznacza prawdopodobieństwo głosowania przeciwko wnioskowi):

$$\pi_{C,a} = q_2 (1 - q_2) + (1 - q_2) q_2 + q_2^2,$$

$$\pi_{C,b} = q_1 (1 - q_2),$$

$$\pi_{C,b} = q_1 (1 - q_2).$$

Prawdopodobieństwo tego, że dany gracz będzie graczem krytycznym, jest równe wartości oczekiwanej zmiennej losowej π, która jest równa całce tej funkcji po wszystkich wartościach q_1 i q_2 od 0 do 1.[9] Dla przedstawionych powyżej wyrażeń mamy zatem:

$$P_{C,a} = \int_0^1 (q_2(1-q_2) + (1-q_2)q_2 + q_2^2)\mathrm{d}q_2 = \frac{2}{3},$$

$$P_{C,b} = P_{C,c} = \int_0^1\int_0^1 q_1(1-q_2)\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2 = \frac{1}{4}.$$

Hybrydowe indeksy siły trójki graczy otrzymujemy po unormowaniu tych wartości:

$$HI_a^C = \frac{8}{14},$$

$$HI_b^C = HI_c^C = \frac{3}{14}.$$

1.1.2. Ważona oceaniczna gra większości

Shapley wraz z Shapiro w 1960 roku (tekstem Shapiro i Shapley, 1960) rozpoczęli cykl publikacji poświęconych grom z udziałem bardzo dużej liczby uczestników, które doprowadziły do sformułowania koncepcji gier oceanicznych. Grę z bardzo dużą liczbą uczestników przedstawili jako grę graniczną, do której zmierzać będziemy, gdy część zgromadzenia będziemy „dzielić" na coraz większą liczbę graczy o coraz mniejszych wagach przy jednoczesnej obecności graczy o niezmiennych wagach. Przedstawiona koncepcja została rozwinięta w postaci propozycji gier oceanicznych – gier z udziałem dwóch rodzajów graczy. Pierwszy z nich, to „ocean" graczy traktowanych jako kontinuum. Ocean graczy to taka zbiorowość, której każdy podzbiór można dowolnie dzielić na coraz mniejsze części, tak jak wodę w akwenie lub, co jest lepszym przybliżeniem, niezerowy odcinek na prostej rzeczywistej. Oznacza to, że w takich grach uczestniczy bardzo dużo bardzo małych graczy – takich, którzy pojedynczo nie

[9] Powinniśmy odróżnić prawdopodobieństwo krytyczności gracza, które jest prawdopodobieństwem *a priori* i które właśnie wyliczamy, a prawdopodobieństwem poparcia wniosku, które jest wynikiem losowania zmiennej losowej q_j w pierwszym etapie procedury przedstawiającej schemat podejmowania decyzji.

DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.47

posiadają faktycznie żadnej znaczącej wagi (w języku matematyki powiemy, że każdy z nich jest miary zero). Drugi rodzaj graczy to tzw. gracze atomowi, czyli tacy, którzy posiadają niezerową wagę i występują w grze jako jednostki niepodzielne, jak atomy Demokryta[10]. Autorzy zbadali własności indeksu Shapleya-Shubika w takich grach. Udowodnili niezwykle ważne twierdzenie graniczne, w którym wskazali granicę, do jakiej zmierza indeks Shapleya-Shubika, gdy zwiększamy coraz bardziej liczbę coraz „mniejszych" małych graczy, zachowując bez zmian łączną wagę zbioru małych graczy (w sytuacji granicznej – oceanu) oraz wagi dużych graczy. Twierdzenie to pozwala na wyznaczanie wartości tego indeksu dla gier z dowolną liczbą dużych graczy i „oceanem małych graczy". W kolejnych tekstach Shapley z Milnorem (Milnor i Shapley, 1961) oraz Shapley samodzielnie (Shapley, 1961) przedstawili założenia formalne oraz własności gier oceanicznych. Przedstawili m.in. wnioski dotyczące możliwości analizy gier oceanicznych z więcej niż jednym oceanem – oceany mogą mieć różne „udziały" w całym zbiorze małych graczy. Publikacje te zrodziły szereg rozwinięć. Wymienienia wymaga obszerne i bardzo precyzyjne dzieło dwóch przyszłych noblistów, Aumanna i Shapleya (Aumann i Shapley, 1974), poświęcone charakterystyce oraz prezentacji zastosowań tzw. gier bezatomowych – z udziałem graczy „oceanicznych". Autorzy przedstawili zarówno aksjomatyczne ujęcie swojej koncepcji, jak i ekonomiczne interpretacje. Zwraca jednak uwagę nie tylko ekonomiczny, ale również politologiczny oraz socjologiczny potencjał prezentowanej teorii. Wśród publikacji, które zostały zainspirowane koncepcją gier z udziałem kontinuum graczy, znaleźć można zarówno teksty ściśle teoretyczne (zob. m.in. Hart, 1973, Malawski, 2000), jak i przedstawiające możliwe zastosowania teorii gier oceanicznych w naukach społecznych (zob. m.in. Straffin, 1983, Ekes, 2003, Wieczorek, 2005). Niektóre z nich opisałem w moich wcześniejszych publikacjach (Jasiński, 2009, 2012), jednak to zaledwie fragment propozycji, które powstały pod wpływem koncepcji Aumanna i Shapleya.

Prezentując koncepcję gier oceanicznych, Shapley wraz ze współpracownikami rozważał tzw. ważone oceaniczne gry większości. Poniżej przedstawiam oznaczenia i uwagi niezbędne do dalszych rozważań:

$P = \{1, 2, 3, \ldots, p\}$ – zbiór p oceanów,

I_i – jednostkowy (jak wiadomo, mierzalny w sensie Lebesgue'a) odcinek: $I_i = [0,1]$, reprezentujący i-ty ocean,

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ – wagi oceanów (liczby nieujemne)[11],

$M = \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ – zbiór dużych, niepodzielnych graczy (atomowych) o nieujemnych wagach, odpowiednio, $w_1, w_2, \ldots, w_m$[12],

[10] Słowo atom pochodzi z greckiego ἄτομος – átomos, oznaczającego coś, czego nie da się przeciąć ani podzielić.

[11] Symbol α_i bedzie oznaczał zarazem zbiór graczy należących do i-tego oceanu.

[12] Symbol w_i bedzie oznaczał zarazem i-tego gracza atomowego.

DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.47

$$\sum_{i=1}^{m} w_i + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j = 1,$$

$w(S) = \sum_{i \in S} w_i$ – waga podzbioru S dużych graczy,

$u(R) = w(R \cap M) + \sum_{j \in P} \alpha_j \lambda(R \cap I_j)$ – wagą koalicji R w grze oceanicznej będzie suma wag dużych graczy wchodzących w skład koalicji R oraz sumy odpowiednich proporcji miar Lebesgue'a λ mierzalnych podzbiorów oceanów (I_j) wchodzących w skład koalicji R,

c – próg określający regułę decyzyjną w danej grze.

Ważoną oceaniczną grę większości oznaczać będę dalej jako:
$[c; w_1, w_2, ..., w_m; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p]$.

1.2. Zarysowanie problemu – gra bezatomowa z jednym, jednolitym oceanem

Przyjmijmy na początek, że mamy do czynienia z n-osobowym skończonym zbiorem graczy o takim samym prawdopodobieństwie poparcia wniosku równym q. Powiemy zatem, że nasz zbiór graczy jest jednolity ideologicznie.

Każdy gracz głosuje niezależnie, ale z tym samym prawdopodobieństwem poparcia wniosku równym q. Mamy więc do czynienia z serią n prób Bernoulliego. Odsetek graczy Q_n, którzy poprą wniosek, ma rozkład Bernoulliego o wartości oczekiwanej $E(Q_n) = q$, która nie zależy od liczebności, i wariancji $D^2(Q_n) = \frac{q(1-q)}{n}$ odwrotnie proporcjonalnej do liczebności.

Dla nieskończonej liczby graczy w oceanie ($Q_\infty \overset{ozn.}{=} Q$):

$$E(Q) = q,$$

$$D^2(Q) = \lim_{n \to \infty} \frac{q(1-q)}{n} = 0.$$

Oczywiście ocean graczy o nieskończonej liczebności to konstrukt teoretyczny modelujący bardzo duże, ale skończone, zgromadzenie decyzyjne. W dalszej części będę traktował oceany właśnie jako zbiorowości nieskończone. Należy jednak pamiętać, że w rzeczywistości należy mówić jedynie o bardzo dużych grupach, zaś wariancja Q, przeze mnie traktowana jako zerowa, jest w istocie bardzo bliska zeru, ale od zera większa. Podkreślając to zastrzeżenie, można zatem powiedzieć, że w jednolitym oceanie szansa na to, że frakcja co najmniej G poprze głosowany wniosek, wynosi $P(Q \geq G) = 1 - G$.

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.47

Prowadzi to do wniosku, że ocean graczy zachowuje się w jakimś sensie deterministycznie (w rzeczywistości należałoby powiedzieć „w przewidywalny sposób") – przy danym q dokładnie odsetek równy q poprze wniosek.

2. Gry oceaniczne z jednym graczem atomowym i jednym, jednolitym oceanem

Gra oceaniczna z jednym dużym graczem i jednym oceanem to najprostsza wersja tzw. mieszanych gier oceanicznych. Zapisywać takie gry będziemy jako $[c; w; \alpha]$. W dalszej części rozważań przez w będę oznaczał zarówno gracza atomowego, jak i jego wagę, zaś przez α, α_1, α_2 zarówno zbiory graczy oceanicznych, jak i ich łączne wagi. Rozważać będziemy dwa warianty:

1) ocean i gracz atomowy mają odmienne standardy,
2) ocean i gracz atomowy mają wspólne standardy.

W przypadku odmiennych standardów dużego gracza i oceanu przyjmować będziemy, że każdy mały gracz w oceanie ma identyczne prawdopodobieństwo poparcia wniosku równe q_1, a gracz atomowy – prawdopodobieństwo poparcia wniosku równe q_2. Przy danym q_1 spodziewamy się, że q_1-część oceanu poprze wniosek, a więc wniosek ten poprze wówczas $\alpha\, q_1$-część całego zgromadzenia. Gracz atomowy poprze wniosek (z prawdopodobieństwem $0 \leq q_2 \leq 1$) lub nie poprze (z prawdopodobieństwem $1 - q_2$).

W razie założenia wspólnych standardów dużego gracza i oceanu prawdopodobieństwo poparcia wniosku przez każdego małego gracza oraz przez gracza atomowego jest takie samo i równe q. Przy danym q spodziewamy się, że q-ta część oceanu popiera wniosek, zaś gracz atomowy poprze wniosek (z prawdopodobieństwem q) lub nie (z prawdopodobieństwem $1 - q$).

W każdym z tych wariantów odróżnimy:

- tzw. gry wewnętrzne, w których ocean ma wagę większą niż próg ($w < c < \alpha$) od sytuacji, w których
- zarówno ocean, jak i duży gracz mają wagi mniejsze niż próg ($w < c$ i $\alpha < c$).

Powyższe rozróżnienie nie obejmuje, rzecz jasna, wszystkich relacji między wagami oceanu i gracza atomowego oraz progiem. Jak wspomniałem w podrozdziale 1.1.1, nie będę zajmował się w tym opracowaniu grami niewłaściwymi, czyli grami z bardzo niskim progiem, dla którego możliwe są rozłączne koalicje wygrywające.

DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.47

Takie przypadki, jako posiadające słabe interpretacje społeczne, pomijam. Pomijam również rozważanie przypadku gracza atomowego jako jedynego mającego wagę większą niż próg, a więc gracza-dyktatora. W takiej sytuacji jego siła jest równa 1, zaś pozostali gracze (ocean) mają siłę równą zero.

2.1. Ocean i gracz atomowy mają odmienne standardy

Rozważmy strukturę cząstkowej jednolitości: $C_1 = \{\{w\}, \alpha\}$.

Niech prawdopodobieństwo poparcia wniosku przez dowolnego gracza oceanicznego będzie równe q_1, zaś prawdopodobieństwo poparcia wniosku przez gracza atomowego – równe q_2.

2.1.1. Gry wewnętrzne

Przykład 2. Gra z regułą bezwzględnej większości: [0,5; 0,4; 0,6]

Prawdopodobieństwo krytyczności gracza atomowego wyznaczyć można jako[13]:

$$P_{C_1,w} = \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{5}{6}} 1 \mathrm{d}q_1 = \frac{2}{3},$$

Tabela 1
Warunki krytyczności gracza atomowego dla c = 0,5, w = 0,4 i α = 0,6 w zależności od q_1

Oczekiwana część popierającego oceanu (q_1)	Oczekiwane łączne poparcie oceanu w zgromadzeniu ($u = \alpha q_1$)	Czy gracz atomowy jest graczem krytycznym?
$q_1 \leq \frac{1}{6}$	$u \leq 0{,}1$	nie
$\frac{1}{6} < q_1 \leq \frac{5}{6}$	$0{,}1 < u \leq 0{,}5$	tak
$\frac{5}{6} < q_1$	$0{,}5 < u$	nie

lub za Straffinem (Straffin, 1977a) zauważyć, że prawdopodobieństwo krytyczności gracza w jest równe różnicy warunkowych prawdopodobieństw: „tak" zgromadzenia pod warunkiem „tak" gracza i „tak" zgromadzenia pod warunkiem „nie" gracza:

$$P(Kryt = w) = P(T \mid T_w) - P(T \mid N_w).$$

W naszym przykładzie:

$$P_{C_1,w} = \int_{\frac{1}{6}}^{1} 1 \mathrm{d}q_1 - \int_{\frac{5}{6}}^{1} 1 \mathrm{d}q_1 = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

[13] Funkcja gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej q_1, podobnie jak pozostałych zmiennych charakteryzujących w prezentowanych modelach prawdopodobieństwo poparcia wniosku, jest, zgodnie z założeniem, równomierna i w przedziale [0,1] przyjmuje stałą wartość równą 1. Dlatego pod znakiem całki występuje wartość 1.

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.47

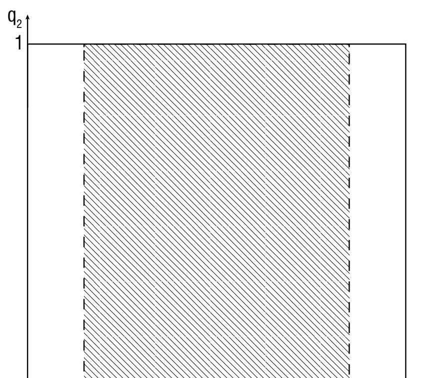
Ocean zaś jest krytyczny zawsze – niezależnie od zachowania gracza atomowego ocean może „zebrać” odpowiednią większość, by przeforsować lub zablokować wniosek. Zatem to zachowanie graczy oceanicznych zdecyduje o przejściu bądź przepadnięciu wniosku. Jeśli gracz atomowy zagłosuje „tak”, wówczas wyłącznie od graczy oceanicznych zależy, czy wniosek przejdzie, czy nie. Jeśli gracz atomowy zagłosuje przeciw wnioskowi, wtedy również o przejściu bądź przepadnięciu wniosku znów decyduje ocean, mający większość w zgromadzeniu. Korzystając z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym, możemy napisać:

$$P_{C_1,\alpha} = P(Kryt = \alpha \mid T_w) \cdot P(T_w) + P(Kryt = \alpha \mid N_w) \cdot P(N_w) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Dla każdej wartości q_2 gracza atomowego i dowolnego jego zachowania możliwe jest takie „zachowanie” oceanu (z rozkładem głosów określonym[14] przez q_1, niezależnie od aktualnych zachowań graczy oceanicznych – realizacji zmiennej losowej q_1), że przeforsowana zostanie dowolna decyzja zgromadzenia (przyjęcie lub odrzucenie wniosku) – o stworzeniu lub nie koalicji wygrywającej zawsze decyduje ocean.

Po unormowaniu otrzymujemy wartości hybrydowych indeksów siły:

$$HI_w^{C_1} = \frac{2}{5},$$
$$HI_\alpha^{C_1} = \frac{3}{5}.$$



Rysunek 1. **Obszar krytyczności gracza atomowego dla $c = 0{,}5$, $w = 0{,}4$ i $\alpha = 0{,}6$**

[14] Zob. podrozdział 1.2.

DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.47

Rysunek 1 przedstawia układ współrzędnych, którego osie reprezentują wartości q_1 i q_2, zaś punkty płaszczyzny – wszystkie możliwe konfiguracje tych prawdopodobieństw. Zakreskowany prostokąt przedstawia takie konfiguracje, dla których mamy do czynienia z krytycznością gracza atomowego. Pole tej figury przedstawia geometryczne prawdopodobieństwo krytyczności gracza atomowego. W tym przykładzie stanowi ono $\frac{2}{3}$ całego pola.

Tabela 2 przedstawia warunki krytyczności gracza atomowego dla dowolnej gry wewnętrznej z jednym dużym graczem i jednym oceanem, czyli dla takiej ważonej gry oceanicznej $[c; w; \alpha]$, że $w < c < \alpha$.

Prawdopodobieństwo krytyczności gracza atomowego wyznaczamy jako:

$$P_{C_1,w} = \int_{\frac{c-w}{\alpha}}^{\frac{c}{\alpha}} 1 \mathrm{d}q_1 = \frac{c}{\alpha} - \frac{c-w}{\alpha} = \frac{w}{\alpha},$$

Tabela 2
Warunki krytyczności gracza atomowego dla w < c < α

Oczekiwana część popierającego oceanu (q_1)	Oczekiwane łączne poparcie oceanu w zgromadzeniu ($u = \alpha q_1$)	Czy gracz atomowy jest graczem krytycznym?
$q_1 \leq \frac{c-w}{\alpha}$	$u \leq c - w$	nie
$\frac{c-w}{\alpha} < q_1 \leq \frac{c}{\alpha}$	$c - w < u \leq c$	tak
$\frac{c}{\alpha} < q_1$	$c < u$	nie

lub, analogicznie jak w przykładzie:

$$P_{C_1,w} = \int_{\frac{c-w}{\alpha}}^{1} 1 \mathrm{d}q_1 - \int_{\frac{c}{\alpha}}^{1} 1 \mathrm{d}q_1 = (1 - \frac{c-w}{\alpha}) - (1 - \frac{c}{\alpha}) = \frac{c}{\alpha} - \frac{c-w}{\alpha} = \frac{w}{\alpha}.$$

Na tej samej zasadzie co w przykładzie ocean jest zawsze krytyczny, zatem

$$P_{C_1,\alpha} = 1.$$

Jak widać, dla gier wewnętrznych, przy zadanej strukturze cząstkowej jednolitości, podobnie jak w przypadku pełnej jednolitości (mamy wówczas do czynienia z wartością Shapleya), wartości prawdopodobieństw krytyczności graczy nie zależą od wielkości progu[15].

[15] Charakterystykę wewnętrznych gier oceanicznych z pełną jednolitością, które zostały szczegółowo zbadane i opisane przez Milnora i Shapleya (Milnor i Shapley, 1961), zainteresowany Czytelnik może znaleźć również w moim tekście (Jasiński, 2009).

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.47

Po unormowaniu otrzymujemy wartości hybrydowych indeksów siły:

$$HI_w^{C_1} = \frac{w}{w+\alpha} \overset{w+\alpha=1}{=} w,$$

$$HI_\alpha^{C_1} = \frac{\alpha}{w+\alpha} \overset{w+\alpha=1}{=} \alpha,$$

czyli wartości indeksów siły dla gier wewnętrznych ze strukturą cząstkowej jednolitości przypisującą graczowi atomowemu i oceanowi różne prawdopodobieństwa popacia wniosku okazały się równe frakcjom wag, odpowiednio, gracza atomowego i oceanu.

2.1.2. Gry pozostałe – z wysokim progiem ($w < c$ i $\alpha < c$)

Przykład 3. Graz regułą kwalifikowanej większości: [0,7; 0,4; 0,6]

Tabela 3
Warunki krytyczności gracza atomowego dla $c = 0,7$, $w = 0,4$ i $\alpha = 0,6$

Oczekiwana część popierającego oceanu (q_1)	Oczekiwane łączne poparcie oceanu w zgromadzeniu ($u = \alpha q_1$)	Czy gracz atomowy jest graczem krytycznym?
$q_1 \le \frac{1}{2}$	$u \le 0,3$	nie
$\frac{1}{2} < q_1 \le 1$	$0,3 < u \le 0,6$	tak

Prawdopodobieństwo krytyczności gracza atomowego wyznaczyć można jako:

$$P_{C_1,w} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} 1 \mathrm{d}q_1 = \frac{1}{2}.$$

Jeśli duży gracz zagłosuje „nie", wtedy wniosek nie przejdzie w zgromadzeniu – dlatego oba wykorzystywane sposoby wyznaczania prawdopodobieństwa jego krytyczności tu ujednolicają się:

$$P_{C_1,w} = P(T \mid T_w) - P(T \mid N_w) = P(T \mid T_w) - 0 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} 1 \mathrm{d}q_1 = \frac{1}{2}.$$

Ocean jest krytyczny tylko jeśli gracz atomowy zagłosuje „tak". Zatem:

$$P_{C_1,\alpha} = P(Kryt = \alpha \mid T_w) \cdot P(T_w) + P(Kryt = \alpha \mid N_w) \cdot P(N_w) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Jest to wartość stała, niezależna od wagi gracza atomowego i oceanu (przy ograniczeniu $w < c$ i $\alpha < c$).

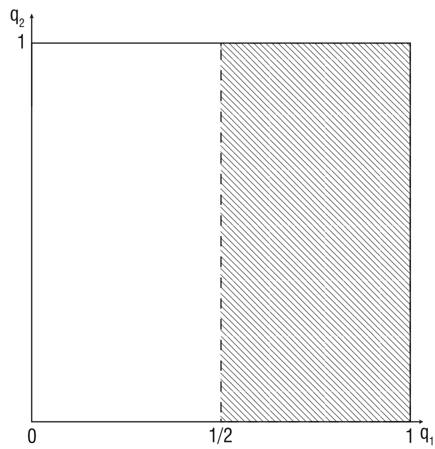
Wartości hybrydowych indeksów siły są w naszym przykładzie równe prawdopodobieństwom:

DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.47

$$HI_w^{C_1} = \frac{1}{2},$$

$$HI_\alpha^{C_1} = \frac{1}{2}.$$

Rysunek 2 przedstawia układ współrzędnych, którego osie reprezentują wartości q_1 i q_2, zaś punkty płaszczyzny – wszystkie możliwe konfiguracje prawdopodobieństw. Obszar zakreskowany przedstawia takie konfiguracje, dla których mamy do czynienia z krytycznością gracza atomowego. Pole przedstawia geometryczne prawdopodobieństwo krytyczności gracza atomowego. W tym przykładzie obszar ten stanowi połowę całego pola.



Rysunek 2. **Obszary krytyczności gracza atomowego dla $c = 0{,}7$, $w = 0{,}4$ i $\alpha = 0{,}6$**

Warunki krytyczności graczy dla dowolnej ważonej gry oceanicznej z jednym dużym graczem i jednym oceanem spełniającej warunek $w < c$ i $\alpha < c$ przedstawia tabela 4.

Tabela 4
Warunki krytyczności gracza atomowego dla $w < c$ i $\alpha < c$

Oczekiwana część popierającego oceanu (q_1)	Oczekiwane łączne poparcie oceanu w zgromadzeniu ($u = \alpha q_1$)	Czy gracz atomowy jest graczem krytycznym?
$q_1 \leq \frac{c-w}{\alpha}$	$u \leq c - w$	nie
$\frac{c-w}{\alpha} < q_1 \leq 1$	$c - w < u \leq \alpha$	tak

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.47

Prawdopodobieństwo krytyczności gracza atomowego wyznaczamy jako:

$$P_{C_1,w} = \int_{\frac{c-w}{\alpha}}^{1} 1\mathrm{d}q_1 = 1 - \frac{c-w}{\alpha} = \frac{a-c+w}{\alpha} \overset{w+\alpha+1}{=} \frac{1-c}{\alpha}$$

lub

$$P_{C_1,w} = P(T \mid T_w) - P(T \mid N_w) = P(T \mid T_w) - 0 = \int_{\frac{c-w}{\alpha}}^{1} 1\mathrm{d}q_1 = \frac{1-c}{\alpha},$$

zaś prawdopodobieństwo krytyczności oceanu jako:

$$P_{C_1,\alpha} = P(Kryt = \alpha \mid T_w)\cdot P(T_w) + P(Kryt = \alpha \mid N_w)\cdot P(N_w) = 1\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

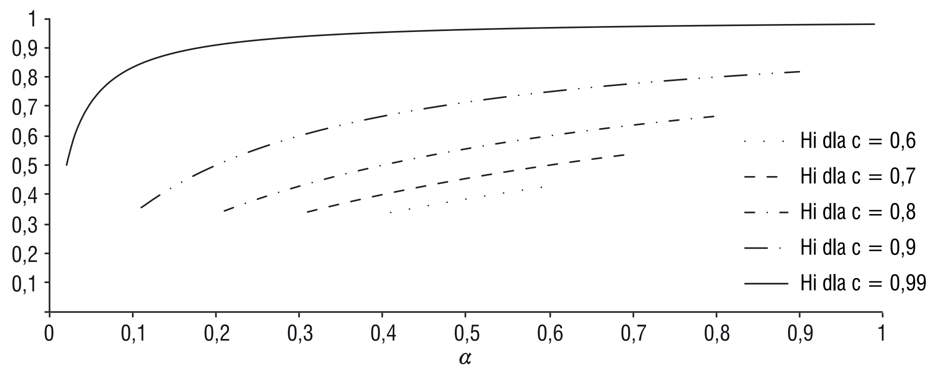
W grach z większością kwalifikowaną przekraczającą zarówno wagę gracza atomowego, jak i oceanu, niezależnie od wag, prawdopodobieństwo krytyczności oceanu jest równe $\frac{1}{2}$, a gracza atomowego – odwrotnie proporcjonalne do wagi oceanu i, wraz z przybliżaniem się c do α, zbieżne do wartości $\frac{w}{\alpha}$ (prawdopodobieństwa krytyczności gracza atomowego dla gier wewnętrznych):

$$\lim_{c\to\alpha} \frac{1-c}{\alpha} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \overset{1-\alpha=w}{=} \frac{w}{\alpha}.$$

Po unormowaniu otrzymujemy wartości hybrydowych indeksów siły:

$$HI_w^{C_1} = \frac{1-c}{1-c+\frac{\alpha}{2}},$$

$$HI_\alpha^{C_1} = \frac{\frac{\alpha}{2}}{1-c+\frac{\alpha}{2}}.$$



***Rysunek 3.* Hybrydowe indeksy siły oceanu w zależności od wagi oceanu α dla następujących progów: $c = 0{,}6$, $c = 0{,}7$, $c = 0{,}8$, $c = 0{,}9$, $c = 0{,}99$**

Rysunek 3 przedstawia wartości hybrydowego indeksu siły oceanu w zależności od jego wagi α w grze oceanicznej z wysokim progiem (przewyższającym zarówno

DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.47

wagę oceanu, jak i gracza atomowego) dla różnych progów – wartości c. Wartości hybrydowego indeksu siły gracza atomowego dopełniają wskazania dla oceanu do 1. Wartości wag oceanu α na wykresie należą za każdym razem do przedziału $[1 - c, c]$[16]. Jak widać, w grach z wysokim progiem, pomimo stałej wartości prawdopodobieństwa krytyczności oceanu (równej $\frac{1}{2}$), wartość hybrydowego indeksu siły oceanu wzrasta ze względu na malejącą wartość prawdopodobieństwa krytyczności gracza atomowego (odwrotnie proporcjonalną do wagi oceanu).

2.2. Ocean i gracz atomowy mają wspólne standardy

Jeśli przyjmiemy „wspólne standardy" dla wszystkich graczy (w szczególności gracza atomowego i oceanu), czyli jedną zmienną losową q określającą skłonność graczy do poparcia wniosku, wówczas prawdopodobieństwo krytyczności graczy będzie równe dla ważonych gier większości indeksowi Shaplya-Shubika (zob. m.in. Straffin, 1977a, Bożykowski i Jasiński, 2014). Rozważamy więc jedną z trywialnych struktur cząstkowej jednolitości, $\{N\} = \big\{\{w\} \cup \alpha\big\}$, którą oznaczymy przez C_2. Ten przypadek jest dobrze znany i opisany przez Shapleya wraz z Shapiro (Shapiro i Shapley, 1960) i Milnorem (Milnor i Shapley, 1961). Przy wykorzystaniu przyjetej formalizacji przedstawię znane już wyniki określające prawdopodobieństwo krytyczności gracza atomowego dla ważonych oceanicznych gier większości. Rozważać będę ważoną oceaniczną grę większości z jednym graczem atomowym i jednym oceanem oraz progiem c: $[c; w; \alpha]$.

2.2.1. Gry wewnętrzne ($w < c < \alpha$)

W grach wewnętrznych i przy jednolitym q gracz atomowy jest krytyczny w tych samych sytuacjach, co dla struktury cząstkowej jednolitości wykorzystywanej w podrozdziale 2.1.1.

Tabela 5
Warunki krytyczności gracza atomowego dla $w < c < \alpha$

Oczekiwana część popierającego oceanu i skłonność gracza atomowego do poparcia (q)	Oczekiwane łączne poparcie oceanu w zgromadzeniu ($u = \alpha q$)	Czy gracz atomowy jest graczem krytycznym?
$q \le \frac{c-w}{\alpha}$	$u \le c - w$	nie
$\frac{c-w}{\alpha} < q \le \frac{c}{\alpha}$	$c - w < u \le c$	tak
$\frac{c}{\alpha} < q$	$c < u$	nie

16 Dla małych wartości wag oceanu ($\alpha < 1 - c$) waga gracza atomowego byłaby większa od progu, a to oznaczałoby jego dyktaturę w zgromadzeniu, zaś dla dużych wartości wag oceanu ($\alpha > c$) mielibyśmy do czynienia z grami wewnętrznymi.

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.47

Prawdopodobieństwo krytyczności gracza atomowego wyznaczamy jako:

$$P_{C_2,w} = \int_{\frac{c-w}{\alpha}}^{\frac{c}{\alpha}} 1\mathrm{d}q = \frac{c}{\alpha} - \frac{c-w}{\alpha} = \frac{w}{\alpha},$$

lub

$$P_{C_2,w} = \int_{\frac{c-w}{\alpha}}^{1} 1\mathrm{d}q - \int_{\frac{c}{\alpha}}^{1} 1\mathrm{d}q = (1-\frac{c-w}{\alpha}) - (1-\frac{c}{\alpha}) = \frac{c}{\alpha} - \frac{c-w}{\alpha} = \frac{w}{\alpha}.$$

Straffin (Straffin, 1977a) pokazał, że dla wspólnego prawdopodobieństwa poparcia wniosku przez wszystkich graczy prawdopodobieństwo krytyczności graczy jest równe wartości Shapleya dla odpowiednich gier prostych (indeksowi Shapleya-Shubika). Shapley wraz z Shapiro (Shapiro i Shapley, 1960), udowadniając twierdzenie graniczne, wyznaczyli wartości Shapleya dla graczy atomowych (φ_w) dla oceanicznych ważonych gier większości. Dla gier wewnętrznych jest to wynik zgodny z uzyskanym powyżej:

$$P_{C_2,w} = \varphi_w.$$

Suma wartości Shapleya wszystkich graczy w dowolnej grze prostej jest równa 1 (ze względu na aksjomat efektywności, równa $v(N)$, (zob. Shapley, 1953)). Dlatego wartość Shapleya dla oceanu jest dopełnieniem do 1 sumy wartości Shapleya graczy atomowych. Dla gry $[c; w; \alpha]$ prawdopodobieństwo krytyczności oceanu jest równe wartości indeksu siły oceanu (Φ) dla oceanicznych ważonych gier większości:

$$P_{C_2,\alpha} = \Phi = 1 - \varphi_w = 1 - P(Kryt = w) = 1 - \frac{w}{\alpha}.$$

Przedstawione wyrażenia są unormowane. Dlatego $HI_w^{C_2} = \varphi_w$ oraz $HI_\alpha^{C_2} = \Phi$.

Porównując ten wynik z wynikami uzyskanymi przy założeniu różnych „standardów” gracza atomowego i oceanu (różnych zmiennych q_i), można powiedzieć, że ocean, ze względu na wspólne q z graczem atomowym, jest w tym przypadku „rzadziej” krytyczny. W modelu teoretycznym, przyjmując nieskończoną liczbę małych graczy oceanicznych, przy danym zachowaniu gracza atomowego, dla ustalonej wartości q (wspólnego dla wszystkich), „zachowanie” oceanu jako całości jest zdeterminowane (w rzeczywistości, dla bardzo dużych zbiorowości decyzyjnych – przewidywalne). Przykładowo, dla względnie małych wartości q ($< \frac{c-w}{\alpha}$) zachowanie oceanu decyduje o negatywnym wyniku głosowania. Podobnie – dla względnie dużych q ($> \frac{c}{\alpha}$) – o pozytywnym wyniku głosowania. Jednak dla $\frac{c-w}{\alpha} < q < \frac{c}{a}$ tylko gracz atomowy jest graczem krytycznym – ze względu na wspólne q jego zachowanie decyduje o (pozytywnym lub negatywnym) wyniku głosowania.

DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.47

2.2.2. Gry pozostałe – z wysokim progiem ($w < c$ i $\alpha < c$)

W grach z wysokim progiem i przy jednolitym q gracz atomowy jest krytyczny w tych samych sytuacjach co dla struktury cząstkowej jednolitości wykorzystywanej w podrozdziale 2.1.2. Tabela 6 przedstawia warunki krytyczności graczy dla dowolnej ważonej gry oceanicznej z jednym graczem atomowym i jednym oceanem, spełniającej warunek $w < c$ i $\alpha < c$.

Tabela 6
Warunki krytyczności gracza atomowego dla $w < c$ i $\alpha < c$

Oczekiwana część popierającego oceanu i skłonność gracza atomowego do poparcia (q)	Oczekiwane łączne poparcie oceanu w zgromadzeniu ($u = \alpha q$)	Czy gracz atomowy jest graczem krytycznym?
$q \le \frac{c-w}{\alpha}$	$u \le c - w$	nie
$\frac{c-w}{\alpha} < q \le 1$	$c - w < u \le \alpha$	tak

Prawdopodobieństwo krytyczności gracza atomowego wyznaczamy jako:

$$P_{C_2,w} = \int_{\frac{c-w}{\alpha}}^{1} 1\mathrm{d}q = 1 - \frac{c-w}{\alpha} = \frac{\alpha - c + w}{\alpha} \overset{w+\alpha=1}{=} \frac{1-c}{\alpha}$$

lub

$$P_{C_2,w} = P(T \mid T_w) - P(T \mid N_w) = \int_{\frac{c-w}{\alpha}}^{1} 1\mathrm{d}q - 0 = \frac{1-c}{\alpha}.$$

Wyrażenie to jest zgodne z wynikiem otrzymanym na podstawie twierdzenia granicznego Shapleya i Shapiro (Shapiro i Shapley, 1960) dla ważonej gry oceanicznej z wysokim progiem z jednym graczem atomowym i jednym oceanem ($w < c$ i $\alpha < c$): $P_{C_2,w} = \varphi_w$.

Rozważania dla oceanu, analogiczne do opisu z podrozdziału 2.2.1, prowadzą do wniosku, że prawdopodobieństwo krytyczności oceanu dopełnia prawdopodobieństwo krytyczności gracza atomowego do wartości 1. Zatem dla gier z wysokim progiem:

$$P_{C_2,\alpha} = \Phi = 1 - \varphi_w = 1 - \frac{1-c}{\alpha}.$$

Przedstawione wyrażenia są unormowane. Dlatego:

$$HI_w^{C_2} = \varphi_w = P_{C_2,w} \text{ oraz } HI_\alpha^{C_2} = \Phi = P_{C_2,\alpha}.$$

Wnioski na temat zbieżności uzyskanych wyników do wartości dla gier wewnętrznych wraz z przybliżaniem się c do α są takie same, jak w przypadku odmiennych standardów oceanu i gracza atomowego:

$$\lim_{c \to \alpha} \frac{1-c}{\alpha} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \overset{1-\alpha=w}{=} \frac{w}{\alpha}.$$

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.47

3. Gry bezatomowe z wieloma oceanami o różnych standardach

Sytuacja, gdy w grze nie występują gracze atomowi, oznacza, że mamy do czynienia z jednym lub wieloma oceanami. Jest to sytuacja zasadniczo odmienna od rozważanych powyżej. Tym razem wszyscy gracze mają „taką samą naturę" – stanowią podzielne kontinuum. Zmieni to, jak się przekonamy, sposób opisu modeli oraz wyniki.

Przypadek, gdy wszystkie oceany mają „wspólny standard oceny rzeczywistości" – wszyscy mali gracze mają identyczne prawdopodobieństwo poparcia wniosku – pominę jako opisany przez Shapleya i Milnora w (Milnor i Shapley, 1961) przy okazji rozważań o wartości Shapleya dla wielu oceanów. W poniższych rozważaniach ograniczę się do gier z oceanami, z których każdy ma „inny standard oceny rzeczywistości" – każdy mały gracz należący do j-ego oceanu ma takie samo prawdopodobieństwo poparcia wniosku równe q_j, inne niż dowolny gracz z innego oceanu. Szczegółowo przedstawię rozwiązania dla gier z dwoma oceanami. Dla gier z większą liczbą oceanów omówię wyniki i przewidywania jedynie ogólnie. Rozważać zatem będę gry postaci $[c; \alpha_1, \alpha_2]$ o strukturze cząstkowej jednolitości $C_3 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$. Podobnie jak dla gier oceanicznych z graczami atomowymi przedstawię rozwiązania dla dwóch typów sytuacji:

- gier wewnętrznych, w których jeden ocean ma wagę większą niż próg, zaś drugi mniejszą ($\alpha_2 < c < \alpha_1$),
- gier z wysokim progiem, w których oba oceany mają wagi mniejsze niż próg ($\alpha_1 < c$ i $\alpha_2 < c$).

3.1. Gry wewnętrzne ($\alpha_2 < c < \alpha_1$)

Przykład 4. Gra bezatomowa z większością bezwzględną [0,5; 0,6, 0,4], czyli $c = 0{,}5$, $\alpha_1 = 0{,}6$, $\alpha_2 = 0{,}4$.

Rysunek 4 przedstawia układ współrzędnych, którego osie reprezentują wartości q_1 i q_2, zaś punkty płaszczyzny – wszystkie możliwe konfiguracje prawdopodobieństw poparcia wniosku. Jak napisałem, frakcje oceanów popierające wniosek są równe tym prawdopodobieństwom. W zaznaczonym prostokątnym obszarze wyróżnione zostały dwa trójkątne obszary – pod przekątną i nad przekątną. Obszar pod przekątną prostokąta przedstawia konfiguracje q_1 i q_2, dla których ocean α_2 jest krytyczny pozytywnie. Pozytywna krytyczność oceanu α_2 w tym obszarze oznacza, że punkty te wyznaczają konfiguracje, w których części oceanów popierające wniosek tworzą wprawdzie koalicje przegrywające, jednak dla tych konfiguracji odpowiednie zwiększenie frakcji oceanu α_2 popierającej wniosek mogłoby przekształcić koalicję przegrywającą w wygrywającą. Obszar nad przekątną przedstawia konfiguracje

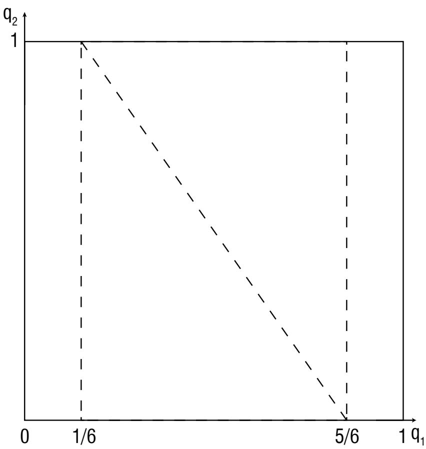
 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.47

q_1 i q_2, dla których ocean α_2 jest krytyczny negatywnie. Tym razem mamy do czynienia z konfiguracjami, dla których frakcje oceanów popierające wniosek tworzą koalicje wygrywające. Dla tych konfiguracji wycofanie poparcia odpowiedniej frakcji oceanu α_2 mogłoby sprawić, że koalicje te stałyby się koalicjami przegrywającymi. Cały obszar układu współrzędnych (dla wszystkich wartości q_1 i q_2 od 0 do 1) przedstawia konfiguracje q_1 i q_2, dla których ocean α_1 jest krytyczny – negatywnie (nad przekątną) lub pozytywnie (pod przekątną).

Pole prostokąta ograniczonego prostymi $q_1 = \frac{1}{6}$, $q_1 = \frac{5}{6}$ oraz $q_2 = 0$ i $q_2 = 1$ przedstawia geometryczne prawdopodobieństwo krytyczności oceanu α_2, równe $\frac{2}{3}$. Pole kwadratu o boku 1 (dla q_1 i q_2 przyjmujących wartości od 0 do 1) przedstawia geometryczne prawdopodobieństwo krytyczności oceanu α_1.

Ocean α_2 jest krytyczny dla $\frac{1}{6} < q_1 < \frac{5}{6}$. Dla tych wartości q_1 możliwe jest takie „zachowanie” oceanu α_2 (z rozkładem głosów określonym[17] przez q_2, niezależnie od aktualnych zachowań graczy oceanicznych z α_2), że przeforsowana zostanie dowolna decyzja zgromadzenia (przyjęcie lub odrzucenie wniosku). W przypadku oceanu α_1 sytuacja ta jest możliwa przy dowolnych wartościach q_2. Dlatego ocean α_1 jest zawsze krytyczny. Mamy zatem następujące wartości prawdopodobieństw krytyczności oceanu α_2 i α_1:

$$P_{C_3,\alpha_1} = \int_0^1 1 \mathrm{d}q_2 = 1,$$



Rysunek 4. **Obszary krytyczności oceanów dla $c = 0{,}5$, $\alpha_1 = 0{,}6$ i $\alpha_2 = 0{,}4$**

[17] Zob. podrozdział 1.2.

DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.47

$$P_{C_3,\alpha_2} = \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{5}{6}} 1 \mathrm{d}q_1 = \frac{2}{3}.$$

Zatem, po unormowaniu, hybrydowe indeksy siły oceanów przyjmują wartości:

$$HI_{\alpha_1}^{C_3} = \frac{3}{5},$$

$$HI_{\alpha_2}^{C_3} = \frac{2}{5}.$$

W ogólnym przypadku, dla $\alpha_2 < c < \alpha_1$:

$$P_{C_3,\alpha_1} = \int_0^1 1 \mathrm{d}q_2 = 1,$$

$$P_{C_3,\alpha_2} = \int_{\frac{c-\alpha_2}{\alpha_1}}^{\frac{c}{\alpha_1}} 1 \mathrm{d}q_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

Hybrydowe indeksy siły oceanów będą zawsze równe ich wagom:

$$HI_{\alpha_1}^{C_3} = \alpha_1,$$

$$HI_{\alpha_2}^{C_3} = \alpha_2.$$

3.2. Gry z wysokim progiem ($\alpha_1 < c$ i $\alpha_2 < c$)

Przykład 5. Gra bezatomowa z większością kwalifikowaną [0,7; 0,6, 0,4], czyli $c = 0,7$, $\alpha_1 = 0,6$, $\alpha_2 = 0,4$.

Rysunek 5 przedstawia układ współrzędnych, którego osie reprezentują wartości q_1 i q_2, zaś punkty płaszczyzny – wszystkie możliwe konfiguracje prawdopodobieństw równych frakcjom oceanów popierającym wniosek. W prawym górnym rogu rysunku, w zaznaczonym trójkątnym obszarze, mamy konfiguracje q_1 i q_2, dla których oba oceany są krytyczne negatywnie. Dwa obszary w kształcie trapezów przedstawiają te konfiguracje q_1 i q_2, dla których poszczególne oceany są krytyczne pozytywnie: mniejszy (zakreskowany) trapez reprezentuje te sytuacje, dla których krytyczny pozytywnie jest ocean α_2, zaś większy (kropkowany) – te, dla których krytyczny pozytywnie jest ocean α_1. Jak widać, trójkątna część wspólna obu trapezów wyznacza obszar równoczesnej pozytywnej krytyczności obu oceanów. O przewadze α_1 decyduje większa możliwość przekształcania koalicji przegrywających w wygrywające, czego wyrazem jest większe pole odpowiadajace krytycznosci pozytywnej. Odpowiednie pola poszczególnych figur przedstawiają prawdopodobieństwa krytyczności oceanu α_1, równe $\frac{3}{4}$ i oceanu α_2, równe $\frac{1}{2}$.

Ocean α_2 jest krytyczny dla $q_1 > \frac{1}{2}$, zaś ocean α_1 jest krytyczny dla $q_2 > \frac{1}{4}$. Dla tych wartości, odpowiednio, q_1 i q_2 możliwe jest takie „zachowanie" danego oceanu

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.47

(odpowiednio, α_2 i α_1), że przeforsowana zostanie dowolna decyzja zgromadzenia (przyjęcie lub odrzucenie wniosku). Mamy zatem:

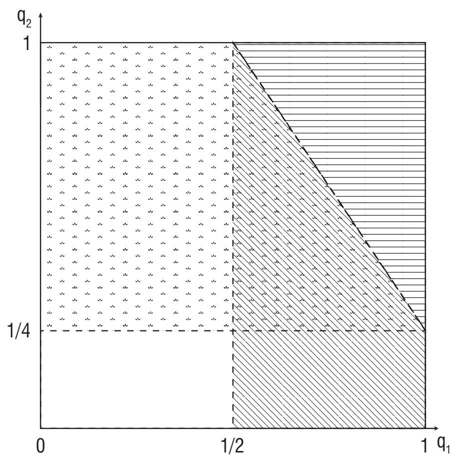
$$P_{C_3,\alpha_1} = \int_{\frac{1}{4}}^{1} 1 \mathrm{d}q_2 = \frac{3}{4},$$

$$P_{C_3,\alpha_2} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} 1 \mathrm{d}q_1 = \frac{1}{2},$$

zaś hybrydowe indeksy siły oceanów:

$$HI_{\alpha_1}^{C_3} = \frac{3}{5},$$

$$HI_{\alpha_2}^{C_3} = \frac{2}{5}.$$



Rysunek 5. **Obszary krytyczności oceanów dla c = 0,7, α_1 = 0,6 i α_2 = 0,4**

W ogólnym przypadku, dla $\alpha_1 < c$ i $\alpha_2 < c$:

$$P_{C_3,\alpha_1} = \int_{\frac{c-\alpha_1}{\alpha_2}}^{1} 1 dq_2 = 1 - \frac{c-\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{1-c}{\alpha_2},$$

$$P_{C_3,\alpha_2} = \int_{\frac{c-\alpha_2}{\alpha_1}}^{1} 1 dq_1 = 1 - \frac{c-\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{1-c}{\alpha_1}.$$

Hybrydowe indeksy siły oceanów będą zawsze równe ich wagom:

$$HI_{\alpha_1}^{C_3} = \alpha_1,$$

$$HI_{\alpha_2}^{C_3} = \alpha_2.$$

DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.47

Wyniki te, jak widać, pozostają w zgodności z wnioskiem Milnora i Shapleya (Milnor i Shapley, 1961) o wartości Shapleya dla wielu oceanów, w którym wskazywali na proporcjonalność siły oceanu do jego udziału w całym zbiorze małych graczy (była to w istocie proporcja miary danej frakcji oceanu do miary całego zbioru małych graczy). W tym przypadku jednak mamy do czynienia z oceanami dodatkowo różniącymi się między sobą prawdopodobieństwem poparcia wniosku, interpretowanymi za Straffinem jako odmienne standardy oceny rzeczywistości.

Jak pokazałem, w przypadku gier oceanicznych z udziałem graczy atomowych wyniki zależą od przyjętej struktury cząstkowej jednolitości. Okazuje się, że w przypadku gier bezatomowych nie zależą. Ta własność prezentowanych modeli wydaje się mieć dość sensowne interpretacje społeczne. Powrócę do tej kwestii w następnych sekcjach artykułu.

Wyniki opisane w niniejszym artykule skłoniły mnie do prac nad bardziej złożonymi modelami – z liczbą oceanów większą niż dwa. Pokazałem, że dla trzech oceanów, niezależnie od przyjętego progu, ich siła jest również proporcjonalna do wag. Opis ogólnego modelu – z wieloma oceanami i wieloma graczami atomowymi, przy różnych strukturach cząstkowej jednolitości – to temat planowanych, osobnych analiz, których owocem będzie osobna publikacja. Zawierać będzie zarówno wnioski o charakterze czysto teoretycznym, normatywnym, ale również propozycję sposobu opisu i interpretacji zjawisk społecznych modelowanych przy użyciu narzędzi bazujących na tej koncepcji.

4. Zastosowania i interpretacje społeczne

Przedstawione powyżej rozważania skłaniają do szeregu społecznych interpretacji, próby opisu masowych zjawisk decyzyjnych, z którymi spotykamy się w rzeczywistości społecznej. W moich poprzednich artykułach (Jasiński, 2009, 2013) z powodzeniem przedstawiłem zastosowania modeli bazujących na koncepcji gier oceanicznych do wyjaśnienia zjawisk zachodzących w kilkutysięcznym zgromadzeniu elektorów podczas prawyborów prezydenckich w Stanach Zjednoczonych oraz nawet w naszym, zaledwie 460-osobowym Sejmie. Wspomniałem wówczas o ważnym ograniczeniu stawianym przed modelami gier oceanicznych traktowanych jako narzędzia służące opisowi rzeczywistych zjawisk. Oczekujemy bowiem, że decydenci nie tylko muszą stanowić duże zgromadzenie, ale spodziewamy się, że w swoich decyzjach kierują się konsekwentnie ustalonymi kryteriami i muszą posiadać wiedzę o możliwych konsekwencjach podejmowanych decyzji. Ten warunek dość prosto spełniają na ogół „zawodowo kalkulujący” gracze – działacze polityczni, akcjonariusze. Trudno jednak ocze-

DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.47

kiwać, że słabo zmobilizowany wyborca, który nie śledzi na bieżąco zmieniających się układów sił, będzie podejmował decyzje wyborcze, kierując się spójnymi, zwrotnymi i przechodnimi preferencjami, a nie odruchem chwili czy ulotnymi wrażeniami.

Z drugiej jednak strony naturalnym przedmiotem analizy przy wykorzystaniu modeli gier oceanicznych, ze względu na liczbę decydentów, którzy z pewnością „nie mogą ogarnąć wzrokiem" ogółu, są referenda. Wydaje się, że należy zachować wątpliwości, które wyraziłem (w artykule Jasinski, 2009) w stosunku do wyborów referendalnych dotyczących kwestii złożonych, sformułowanych w skomplikowany sposób. Wyborcy, mogący gubić się przecież w zawiłościach sformułowań prawnych i ekonomicznych, w większości zignorowali referendum przeprowadzone w naszym kraju w 1996 roku na temat powszechnego uwłaszczenia i „niektórych kierunków wykorzystania majątku państwowego". Pomimo intensywnej kampanii informacyjnej, trudno oczekiwać od ogółu zrozumienia szczegółów merytorycznych i posiadania konsekwentnych preferencji w odniesieniu do czterech pytań zadanych w tym referendum.

Z reguły referenda dotyczą jednak spraw znacznie prostszych do rozstrzygnięcia i poruszających opinię publiczną (np. referendum z 2003 roku w sprawie akcesji Polski do Unii Europejskiej), a przez to mobilizujących wyborców do osobistego zainteresowania głosowaną materią i „kalkulowania" – nawet pomimo tego, że komplet konsekwencji decyzji poddawanej referendum wymaga zawsze wiedzy fachowej. W kwestiach względnie prostych, możliwych do sformułowania w jednym, krótkim zdaniu, a zarazem poruszających opinię publiczną, łatwo identyfikowalnych w świadomości, przed referendum toczy się intensywny dyskurs publiczny – w mediach, w codziennych rozmowach – któremu towarzyszą systematyczne badania rozmaitych ośrodków badania opinii publicznej. Umożliwia to śledzenie rozwoju sytuacji niemal na bieżąco. Można więc powiedzieć, że w razie jasnego sformułowania w referendum prostej alternatywy do wyboru, na dodatek w kwestiach istotnie poruszających wyborców, można oczekiwać użyteczności przedstawionych modeli do opisu i wyjaśniania zjawisk referendalnych.

4.1. Referenda – gry bezatomowe czy gry oceaniczne z graczami atomowymi?

Przypadkiem szczególnie interesującym w kontekście zaprezentowanych powyżej modeli są referenda, w których możemy oczekiwać w zbiorowości wyborców niejednolitej struktury postrzegania rzeczywistości będącej przedmiotem głosowania. Różne standardy oceny wybieranych opcji mogą wynikać z różnych doświadczeń historycznych, różnic kulturowych, np. językowych, etnicznych itp. dzielących różniące się w ten sposób, jednolite regiony. Dobrym przykładem mogą być szwajcar-

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.47

skie kantony, gdzie obowiązują aż cztery języki urzędowe. Na dodatek, Konfederacja Szwajcarska jest miejscem najczęściej chyba przeprowadzanych referendów[18]. Innym przykładem, dobrze poddającym się koncepcji struktury cząstkowej jednolitości, jest Kanada, której dwujęzyczność (mam na myśli języki urzędowe)[19] dzieli ten kraj na zasadniczo dwie części: prowincję Quebec i resztę Kanady. Przygniatająca większość mieszkańców prowincji Quebec posługuje się językiem francuskim, zaś *Karta Języka Francuskiego* Quebecu ustanawia ten język jako oficjalny na jej terytorium. Znane są nieustanne spory, w których Quebec zabiega o zachowanie swojej odrębności od reszty Kanady. Kwestia ta stała się nawet przedmiotem analiz teoriogrowych i podstawą do zilustrowania użyteczności modeli formalnych do opisu zjawisk społecznych (zob. m.in. Straffin, 1977a, 2001).

Analizy przedstawione w niniejszym artykule skłaniają do wniosku, że pozycja wyborców referendalnych z różnych regionów traktowanych jak oceany o różnych prawdopodobieństwach poparcia głosowanych kwestii – podzbiory tworzące strukturę cząstkowej jednolitości – nie będzie inna od sytuacji, gdyby przyjąć wspólne prawdopodobieństwo głosowania za tą kwestią. W obu przypadkach ich znaczenie zależeć będzie wyłącznie od udziału ich regionów-podzbiorów zbioru graczy w całej zbiorowości.

Na tym jednak nie koniec możliwości interpretacyjnych przedstawionych modeli. Otóż wyobraźmy sobie bardzo zdeterminowany region, o którym wiadomo, że w referendum będzie głosował z zasady jednomyślnie, zgodnie z jasno sformułowanym, czytelnym interesem. To sytuacja znacznie bliższa rzeczywistości wzbudzających kontrowersje referendów dotyczących spraw dotykających regionalnych interesów społeczności lokalnych. W tej sytuacji należałoby taki podzbiór traktować jako „skoordynowany fragment oceanu", a więc w istocie gracza atomowego. To zasadniczo zmienia wnioski. Okazuje się, że można wskazać obszary, w których taki „skoordynowany ocean" rozumiany jako gracz atomowy zyskuje oraz obszary, w których traci na odmiennych standardach od reszty zgromadzenia-oceanu.

Tabela 7 przedstawia zestawienie wyrażeń hybrydowych indeksów siły oceanu i gracza atomowego (rozumianego tym razem jako skoordynowany fragment oceanu) w grze $[c; w; \alpha]$, w zależności od typu gry (gra wewnętrzna i gra z wysokim progiem) oraz przyjętej struktury cząstkowej jednolitości: $C_1 = \{\{w\}, \alpha\}$ oraz $C_2 = \{N\}$.

[18] Podział Szwajcarii według języków jest *de facto* nieco bardziej złożony, ponieważ w niektórych regionach Szwajcarii ludność posługuje się kilkoma językami naraz. Podczas analizy należałoby więc wyróżnić więcej oceanów niż języków urzędowych Szwajcarii.

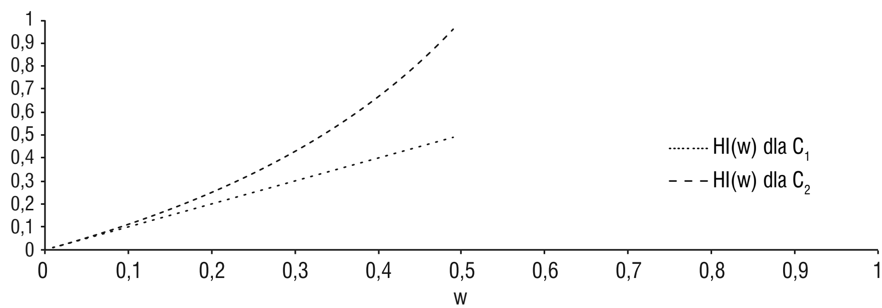
[19] Mieszkańcy Kanady są, rzecz jasna, znacznie bardziej zróżnicowani językowo. Wśród licznych języków uznawanych przez Kanadyjczyków za ojczysty jest również język polski.

DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.47

Tabela 7
Hybrydowe indeksy siły w grze [c; w; α] w zależności od typu gry oraz struktury cząstkowej jednolitości

Gracz	Różne standardy (C_1)		Wspólne standardy (C_2)	
	$w < c < \alpha$	$w < c \wedge \alpha < c$	$w < c < \alpha$	$w < c \wedge \alpha < c$
gracz atomowy	w	$\frac{1-c}{1-c+\frac{\alpha}{2}}$	$\frac{w}{\alpha}$	$\frac{1-c}{\alpha}$
ocean	α	$\frac{\frac{\alpha}{2}}{1-c+\frac{\alpha}{2}}$	$1-\frac{w}{\alpha}$	$1-\frac{1-c}{\alpha}$

Rysunki 6 i 7 przestawiają wartości hybrydowych indeksów siły gracza atomowego w zależności od jego wagi[20] dla bezwzględnej większości (próg $c = 0{,}5$) oraz większości kwalifikowanej (z wyższym progiem $c = 0{,}7$).



Rysunek 6. **Hybrydowe indeksy siły gracza atomowego w zależności od struktury cząstkowej jednolitości dla gier z większością bezwzględną**

W przypadku gier ze strukturą cząstkowej jednolitości wskazującą na odmienne standardy, gracz atomowy ma przy większości bezwzględnej, jak widać na rysunku 6, zawsze mniejszą siłę.

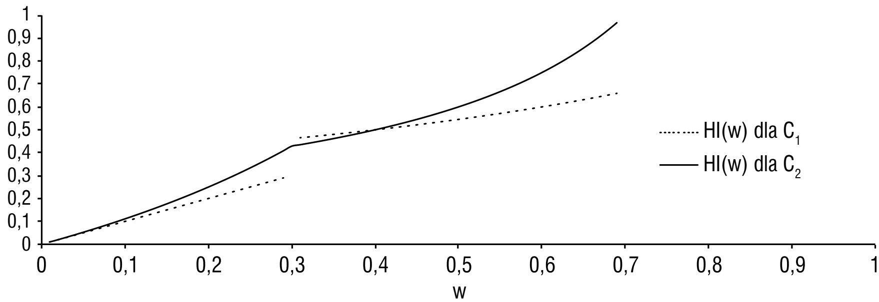
Wraz ze wzrostem progu wyznaczającego regułę decyzyjną pojawia się rosnący obszar takich udziałów gracza atomowego i oceanu, w których „opłaca się" graczowi atomowemu mieć inne standardy niż ocean. Pokazuje to obszar, w którym na rysunku 7 linia ciągła znajduje się poniżej linii przerywanej[21].

[20] W grze z jednym oceanem i jednym graczem atomowym zachodzi związek $\alpha + w = 1$. Zainteresowany Czytelnik bez trudu przekształci wyrażenia w tabelce do postaci funkcji zależnej od progu c i wagi gracza atomowego w.

[21] Przy odmiennych standardach gracza atomowego i oceanu, wraz z przejściem od gier wewnętrznych do gier z wysokim progiem, mamy do czynienia z nieciągłością indeksów hybrydowych. Stąd „skok" linii przerywanej na wykresie.

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.47

Powyższe rozważania pozwalają na określenie warunków, w których zwarte grupy wyborców dbających o swoją odrębność (skoordynowany fragment oceanu o odmiennych standardach oceny rzeczywistości) mogą być poszkodowane w sytuacji masowych decyzji wyborczych („obcym" trudniej oddziaływać na grupę niż „swoim") i warunków pozwalających przewidywać pożytki płynące z ich odrębności. Wnioski te otwierają pole do dalszych rozważań, uwzględniających wiele oceanów i wielu graczy atomowych traktowanych jako skoordynowane fragmenty oceanu. Będzie to temat osobnej publikacji.



Rysunek 7. **Hybrydowe indeksy siły gracza atomowego w zależności od struktury cząstkowej jednolitości dla gier z większością kwalifikowaną (c = 0,7)**

5. Zakończenie

Przedstawiłem w niniejszym artykule propozycję gier oceanicznych uwzględniających niejednolitą strukturę graczy w nich uczestniczących. Może być ona wykorzystana do modelowania sytuacji masowych decyzji społecznych w realiach struktury ideologicznej bądź istnienia więzi wyodrębniających osobne wspólnoty w zgromadzeniu podejmującym zbiorową decyzję. Przedstawione rozważania wydają się niesprzeczne z ogólnymi intuicjami dotyczącymi zbiorowych decyzji w dużych grupach. Wyniki uzyskiwane drogą analityczną kontrolowałem przy pomocy symulacji z udziałem oceanu liczącego do 2000 małych graczy. Wyniki okazały się zgodne z dokładnością do części tysięcznych. Pominąłem w moich rozważaniach ten wątek, ponieważ analiza opisanych modeli przy użyciu metod numerycznych to osobny temat do rozważań rozbudowanych gier ze złożonymi strukturami cząstkowej jednolitości. Na użytek tego artykułu symulacje komputerowe traktowałem jako narzędzie kontrolne, wspomagające nie zawsze oczywiste wnioski analityczne.

DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.47

Wątkami pominiętymi przeze mnie w niniejszym artykule są również dynamiczne ujęcia gier oceanicznych z zadaną strukturą cząstkowej jednolitości. Podejmowałem je w niektórych moich wcześniejszych publikacjach (Jasiński, 2009, 2013). Kwestia przepływu graczy oceanicznych między elektoratami rywalizujących konkurentów (*bandwagon effect*) oraz kwestia stabilności bloków to również tematy, które, jak się wydaje, otwiera niniejsze opracowanie.

Dostępnych jest wiele opracowań (zob. m.in. Roth, 1988, Malawski, 2008) pokazujących wartość wkładu Lloyda Shapleya w naukę. Rozpoczynając kilka lat temu moją „przygodę" z grami oceanicznymi nie sądziłem, że konstrukcje zaproponowane przez niego i jego współpracowników okażą się tak interesujące i cenne dla rozważań na temat społeczeństwa i uwarunkowań decyzji zbiorowych. Z tym większym szacunkiem myślę więc teraz o jego wkładzie w rozwój myśli teoretycznej nie tylko w dziedzinie ekonomii, ale również w dziedzinie nauk politycznych i socjologii.

Bibliografia

Aumann, R. J., Shapley, L. S. (1974). *Values of non-atomic games*. Princeton. New Jersey: Princeton University Press.

Bożykowski, M., Jasiński, M. (2014). Struktura cząstkowej jednolitości graczy a ich znaczenie w zgromadzeniu. Hybrydowe indeksy siły. *Decyzje, 21,* 5-29.

Ekes, M. (2003). General elections modelled with infinitely many voters. *Control and Cybernetics, 32,* 163-173.

Hart, S. (1973). Values of Mixed Games. *International Journal of Game Theory, 2,* 69-85.

Jasiński, M. (2000). Czy zawsze większy jest silniejszy, czyli jak zmierzyć siłę uczestników zgromadzeń decyzyjnych?. *Studia socjologiczne, 1-2,* 49-77.

Jasiński, M. (2009). Decyzje w dużych grupach – gry oceaniczne w naukach społecznych. *Decyzje, 12,* 25-51.

Jasiński, M. (2012). Przestrzeń ideologiczna oparta na politycznych faktach. *Decyzje, 17,* 5–28.

Jasiński, M. (2013). The Terms of Cooperation's Stability. What is the Reason of Flow Between Coalitions? *Roczniki Kolegium Analiz Ekonomicznych, 32,* 55-76.

Le Bon, G. (2004). *Psychologia tłumu*. Warszawa: Wydawnictwo Antyk.

Malawski, M. (2000). *„Oceanic" probabilistic values*. Warszawa: IPI PAN. Working paper.

Malawski, M. (2008). Wartość Shapleya. *Decyzje, 10,* 27-58.

Marody, M., Giza-Poleszczuk, A. (2004). *Przemiany więzi społecznych*. Warszawa: WN Scholar.

Mercik, J. W. (1999). *Siła i oczekiwania. Decyzje grupowe*. Warszawa-Wrocław: WN PWN.

Milnor, J. W., Shapley, L. S. (1961). Values of Large Games II: Oceanic Games. RM-2649. Rand Corporation. Reprint *Mathematics of Operations Research (1978), 3,* 290-299.

Roth, A. E. (red.) (1988). *The Shapley value: Essays in honor of Lloyd S. Shapley*. Cambridge: Cambridge University Press.

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.47

Shapiro, N. Z., Shapley, L. S. (1960). Values of Large Games I: A Limit Theorem. RM-2648. Rand Corporation. Reprint *Mathematics of Operations Research (1978), 3*, 1-9.

Shapley, L. S. (1953). A Value for n-Person Games. W: Kuhn, H.W., Tucker, A.W. (red.), *Contributions to the Theory of Games*. Princeton: Princeton University Press, t. 2, 69-79.

Shapley, L. S. (1961). Values of Large Games III: A Corporation with Two Large Stockholders. RM-2650-PR. Rand Corporation. Reprint *Mathematics of Operations Research (1978), 3*, 299-307.

Sosnowska, H. (1999). *Indeksy siły*. W: Sosnowska, H. (red.), *Grupowe podejmowanie decyzji* Warszawa: WN Scholar, 103-122.

Straffin, P. D. (1977a). Homogeneity, independence, and power indices. *American Journal of Political Science, 21*(4), 695-709.

Straffin, P. D. (1977b). The Bandwagon Curve. *Public Choice, 30,* 107-118.

Straffin, P. D. (1983). Power Indices in Politics. W: Brams, S. J., Lucas, W., Straffin, P. D. (red.), *Political and related models*. New York: Springer Verlag, 256-321.

Straffin, P. D. (2001). *Teoria Gier*. Warszawa: WN „Scholar".

Szacki, J. (1983). *Historia myśli społecznej*. Warszawa: WN PWN, t. 2.

Tönnies, F. (2008). *Wspólnota i stowarzyszenie. Rozprawa o komunizmie i socjalizmie jako empirycznych formach kultury*. Warszawa: WN PWN.

Wieczorek, A. (2005). Large Games with Only Small Players and Strategy Sets in Euclidean Spaces. *Applicationes Mathematicae, 32,* 183-193.

DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.47