ELIPTYCZNE FUNKCJE UŻYTECZNOŚCI I INNE „WYRÓWNANE” FUNKCJE UŻYTECZNOŚCI

Maria Ekes [*]
Szkoła Główna Handlowa
Andrzej Wieczorek [**]
Polska Akademia Nauk

W artykule chcemy przedstawić klasę funkcji użyteczności, których hiperpowierzchnie obojętności są w pewien sposób „wpisane” w hiperpowierzchnie będące przesunięciami brzegu orthantu dodatniego odpowiedniej przestrzeni Euklidesowej; te funkcje nazywamy wyrównanymi funkcjami użyteczności. Takie funkcje bardziej odpowiadają, zdaniem autorów, rzeczywistym preferencjom konsumentów, w szczególności w sytuacjach, kiedy przy ustalonych cenach wszystkich towarów oprócz jednego, numer i, i ceny tego towaru malejącej do zera, popyt na towar i przy dostatecznie niskim poziomie jego ceny jednostkowej ustala się na pewnym poziomie, a nie rośnie do nieskończoności, jak to jest w przypadku najczęściej używanych w literaturze funkcji użyteczności, jak na przykład funkcje Cobba-Douglasa, czy funkcje CES. Ponadto, właśnie wyrównane funkcje użyteczności często pojawiają się w wielu konstrukcjach pomocniczych, kiedy na przykład dowodu istnienia równowagi w jakimś modelu nie daje się przeprowadzić bezpośrednio dla danych funkcji użyteczności, więc odpowiednio się je modyfikuje, przeprowadza dowód dla takich funkcji zmodyfikowanych, a ostatecznie przeprowadza się jeszcze pewne przejście graniczne. Wyrównane funkcje użyteczności mają jeszcze jedną bardzo pożądaną własność: odpowiadające im (multi-) funkcje popytu są dobrze zdefiniowane również w przypadku, kiedy pewne ceny

[*] Maria Ekes, Katedra Ekonomii Matematycznej, Szkoła Główna Handlowa, al. Niepodległości 162, 02-554 Warszawa, maria.ekes@sgh.waw.pl
[**] Andrzej Wieczorek, Instytut Podstaw Informatyki, Polska Akademia Nauk, ul. Ordona 21, 01-237 Warszawa, andrzej.wieczorek@ipipan.waw.pl
Matematyczna klasyfikacja przedmiotowa 2000: 91D13, 91D10, 91B30.
Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2005-2007 jako projekt badawczy nr 1 H02B 016 29.

(jednak nie wszystkie) są równe 0, co jest bardzo ważne przy wykonywaniu obliczeń numerycznych. Przy dodatkowych założeniach, dotyczących wypukłości funkcji użyteczności, każdy zbiór popytowy zawiera element minimalny ze względu na częściowy porządek w R^n. Uzasadnieniem potrzeby zdefiniowania funkcji wyrównanych może być następujący cytat z klasycznej monografii Scarfa i Hansena [3], str. 20:

It is difficult to imagine that this technical problem has much economic content: consumers would not be expected to demand arbitrarily large quantities of any particular commodity even if its price were quite small. In the study of the existence of equilibrium prices this difficulty has been successfully overcome, but at the cost of somewhat more elaborate analysis than I would care to present here. Given our primary concern with computational techniques, we shall find it convenient to require that the demand functions be continuous on the entire unit simplex and not only in the interior. We shall make this assumption in our discussion of computational procedures even though many of our numerical examples will employ utility functions – such as the Cobb-Douglas function ... – for which the assumption is not valid. The reader should have no difficulty in adjusting to this slight ambiguity.

W artykule opisujemy, w jaki sposób zwykle stosowane funkcje użyteczności można, przez operację „obcięcia”, doprowadzić do funkcji wyrównanej. Konkretny przykład dotyczy funkcji Cobba-Douglasa. Wprowadzamy też, jak się wydaje, nową klasę funkcji, nazwanych przez nas funkcjami eliptycznymi, które z definicji są funkcjami wyrównanymi. Intuicji co do natury tych funkcji dostarcza kształt odpowiadających im krzywych i powierzchni obojętności przedstawionych na rysunkach 2 i 3.

Wprowadzenie do tematyki poruszanej w tej pracy mogą stanowić pozycje bibliografii [1-7].

Słowa kluczowe: funkcja (multifunkcja) popytu, funkcja użyteczności, funkcje Cobba-Douglasa, eliptyczne funkcje użyteczności, krzywe (powierzchnie) obojętności.

Definicje

Jeżeli $x,y \in R^n$, to piszemy $x \le y$ gdy $x_i \le y_i$ dla $i = 1, 2,...,n$; piszemy $x < y$ gdy $x_i < y_i$ dla $i = 1, 2,..., n$.

Przez *funkcję użyteczności* rozumiemy funkcję u: $R^n_+ \to R$, ograniczymy się przy tym do funkcji *ciągłych* i *monotonicznych* w tym sensie, że spełniają warunki:

a. jeżeli dla wektorów x,y$\in \mathrm{R}_+^n$ zachodzi x < y, to u(x) < u(y); oraz
b. jeżeli dla wektorów x,y$\in \mathrm{R}_+^n$ zachodzi x ≤ y, to u(x) ≤ u(y).

Dla funkcji użyteczności u i nieujemnej liczby a, *hiperpowierzchnia obojętności* odpowiadająca poziomowi a jest zdefiniowana jako zbiór $\mathrm{Ind}(u, a) = \{\mathrm{x} \in \mathrm{R}_+^n \mid u(\mathrm{x})=a\}$.

Powiemy, że monotoniczna (spełniająca warunki (a) i (b)) funkcja użyteczności u jest *wyrównana,* gdy ma następującą własność: dla dowolnej nieujemnej liczby a istnieje zbiór domknięty i ograniczony $C_a \subset \mathrm{R}_+^n$ taki, że Ind (u, a) jest brzegiem (topologicznym) zbioru

$$C_a^+ = \{\mathrm{x} \in \mathrm{R}_+^n \mid \text{istnieje } y \in C_a \text{ takie, że y} \leq \mathrm{x} \}.$$

Zauważmy, że również $C_a^+ = \{\mathrm{x} \in \mathrm{R}_+^n \mid u(\mathrm{x}) \geq a \}$, a więc $\mathrm{Ind}(u, a) = C_a^+ \setminus \bigcup_{b>a} C_b^+$.

Dla funkcji użyteczności u określamy, jak zwykle, odpowiadającą jej *multifunkcję popytu* $D : \mathrm{R}_+ \times (\mathrm{R}_+^n \setminus \{0\}) \multimap \mathrm{R}_+^n$ wzorem (przez multifunkcję rozumiemy tu funkcję, która każdej wielkości argumentu przyporządkowuje nie pojedynczą wartość, ale zbiór możliwych wartości):

$$D(I,\pi) := \{\mathrm{x} \in R_+^n \big| \langle \pi, \mathrm{x} \rangle \leq I \text{ oraz jeśli dla innego z} \in \mathrm{R}_+^n \text{ jest } \langle \pi, \mathrm{z} \rangle \leq I, \text{to } u(\mathrm{z}) \leq u(\mathrm{x})\}$$

(przy dochodzie I i układzie cen π, $D(I,\pi)$ jest to zbiór finansowo dostępnych i najbardziej pożądanych wiązek towarowych, we wzorze pojawia się iloczyn skalarny $\langle \pi, \mathrm{x} \rangle = \pi_1 x_1 + \ldots + \pi_n x_n$).

Uwaga. Jeżeli funkcja użyteczności u jest wyrównana to wszystkie wartości odpowiadającej jej multifunkcji popytu są zbiorami niepustymi.

Jeżeli multifunkcja popytu D jest taka, że każdy zbiór albo zawiera dokładnie jeden element, albo jest w nim element najmniejszy ze względu na częściowy porządek ≤ w R_+^n, to przez $\overline{D}$ oznaczymy (jednowartościową) funkcję popytu $\overline{D}: \mathrm{R}_+ \times (\mathrm{R}_+^n \setminus \{0\}) \to \mathrm{R}_+^n$ określoną tak, że dla dowolnych I oraz π, $\overline{D}(I,\pi)$ jest jedynym elementem $D(I,\pi)$ lub najmniejszym elementem $D(I,\pi)$ w sensie częściowego porządku ≤ w R_+^n.

Operacja „obcinania” funkcji użyteczności

Dla danej ciągłej i monotonicznej funkcji użyteczności $u\colon \mathrm{R}_+^n \longrightarrow \mathrm{R}_+$ oraz ciągłej funkcji $\varphi\colon \mathrm{R}_+ \to \mathrm{R}_+^n$ takiej, że

φ jest rosnąca, tzn. $a < b$ implikuje $\varphi(a) < \varphi(b)$,
dla każdego x $\in \mathrm{R}_+^n$ istnieje $a \in \mathrm{R}_+$ takie, że $x \le \varphi(a)$ oraz
dla każdego $a \in \mathrm{R}_+$ zbiór x $\in \mathrm{R}_+^n$ takich, że $u(\varphi(a)) < u(\mathrm{x}) = a$ jest niepusty i ograniczony,

definiujemy obcięcie u wyznaczone przez φ, $u_\varphi : \mathrm{R}_+^n \to \mathrm{R}$, w następujący sposób:

$$u_\varphi(\mathrm{x}) = \begin{cases} u(\mathrm{x}) & \text{jeżeli } x \ge \varphi(u(x)), \\ u(\varphi(u(\mathrm{x}))) & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

W tym kontekście funkcję φ można nazwać „funkcją wiodącą".

Dla dowolnego x $\in \mathrm{R}_+^n$ oznaczmy $\mathrm{x}^{\uparrow} := \{\mathrm{y} \in \mathrm{R}_+^n \,|\, \mathrm{x} \le \mathrm{y}$ oraz $x_i = y_i$ dla pewnego $i\}$. Nietrudno zauważyć, że hiperpowierzchnia obojętności funkcji u_φ na poziomie a składa się z tych elementów x zbioru

$$Z = \mathrm{Ind}(u, a) \cup \varphi(a)^{\uparrow},$$

dla których nie istnieje z $\in Z$ takie, że x < z.

Przykład: obcięte funkcje Cobba-Douglasa

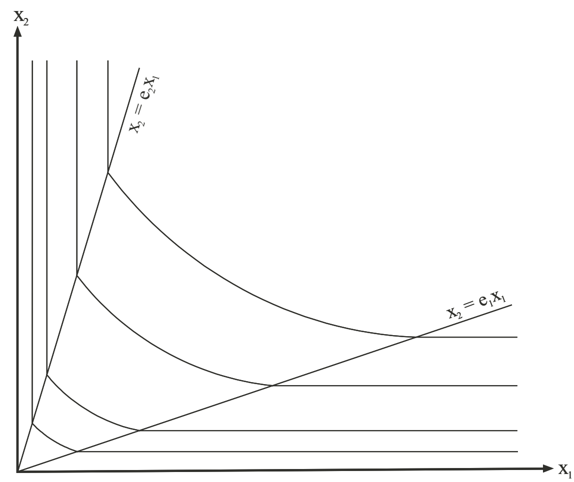
W praktyce procedura „obcinania" użyteczności może przebiegać, ze względów czysto technicznych, w sposób odmienny od opisanego wcześniej, ale oczywiście równoważny. W poniższym przykładzie zajmiemy się funkcjami typu Cobba-Douglasa przy $n = 2$. Punkty modyfikacji na poszczególnych krzywych obojętności wyznaczono za pomocą stożka, ponieważ mamy $n = 2$, w tym przypadku faktycznie są to dwie proste ograniczające stożek. Oczywiście odpowiednią funkcję wiodącą można tu bez trudu zdefiniować, jednak nie jest to konieczne.

Obcięta funkcja użyteczności wyraża się wzorem:

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x_1 x_2 = 0, \text{ w pozostałych przypadkach:} \\ e_2^{a_2} x_1^{a_1 + a_2}, & \text{gdy } x_2 > e_2 x_1; \\ e_1^{-a_1} x_2^{a_1 + a_2}, & \text{gdy } x_2 < e_1 x_1; \\ x_1^{a_1} x_2^{a_2}, & \text{gdy } e_1 x_1 \le x_2 \le e_2 x_1, \end{cases}$$

gdzie parametry a_1, a_2, e_1, e_2 są dodatnie, przy czym $e_1 < e_2$. W tym wypadku wyjściowe użyteczności są funkcjami typu Cobba–Douglasa $x_1^{a_1} x_2^{a_2}$ (nie zakładamy tu, że wykładniki a_1 i a_2 sumują się do 1, więc mówimy o funkcjach „typu Cobba-Douglasa”, a nie po prostu o funkcjach „Cobba-Douglasa”). Pukty modyfikacji krzywych obojętności leżą na prostych $x_2=e_1x_1$ oraz $x_2=e_2x_1$.

Rysunek 1. Przykładowe krzywe obojętności dla obciętych funkcji użyteczności typu Cobba-Douglasa.



Funkcja popytu $\overline{D}$ odpowiadająca powyższej funkcji użyteczności wyraża się wzorami:

$$\overline{D}(I,\pi)=\begin{cases}(I\cdot\dfrac{1}{\pi_1+\pi_2e_1}, I\cdot\dfrac{e_1}{\pi_1+\pi_2e_1}), & \text{gdy}\dfrac{\pi_1}{\pi_2}<\dfrac{a_1e_1}{a_2},\\ (I\cdot\dfrac{a_1}{\pi_1(a_1+a_2)}, I\cdot\dfrac{a_2}{\pi_2(a_1+a_2)}), & \text{gdy}\dfrac{a_1e_1}{a_2}\le\dfrac{\pi_1}{\pi_2}\le\dfrac{a_1e_2}{a_2},\\ (I\cdot\dfrac{1}{\pi_1+\pi_2e_2}, I\cdot\dfrac{e_2}{\pi_1+\pi_2e_2}), & \text{gdy}\dfrac{\pi_1}{\pi_2}>\dfrac{a_1e_2}{a_2}\ \text{albo}\,\pi_2=0.\end{cases}$$

Analogiczną konstrukcję można też przeprowadzić dla $n \geq 3$. W tym wypadku odpowiednie wzory są bardziej skomplikowane; punkty modyfikacji mogą być wyznaczone przez odpowiednio dopasowany stożek wypukły.

Eliptyczne funkcje użyteczności

Eliptyczną funkcję użyteczności w R^n_+ wyznaczają dwa wektory a, b $\in R^n_+$ takie, że a > 0 i b > 0 (liczbą niezależnych parametrów jest tu faktycznie $2n - 1$).

Formalnie, eliptyczną funkcję użyteczności wyznaczają hiperpowierzchnie obojętności skonstruowane w następujący sposób. Elipsoida E jest wpisana w równoległościan P o wierzchołkach $\{c^1, \ldots, c^{2^n}\}$, gdzie kolejne c^i to wszystkie wektory postaci $a + (2\delta_1 b_1, \ldots, 2\delta_n b_n)$, przy $(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ będących wszystkimi możliwy ciągami o wyrazach 0 lub 1. Równaniem E jest:

$$\left(\frac{a_1 - x_1}{b_1} + 1\right)^2 + \ldots + \left(\frac{a_n - x_n}{b_n} + 1\right)^2 = 1.$$

Środkiem tej elipsoidy jest a + b, natomiast długością jej j-tej osi ($j = 1, \ldots, n$) jest $2b_j$.[1] *Hiperpowierzchnia definiująca* L to, z definicji, brzeg zbioru $E + R^n_+$, który oczywiście jest równy:

$$\left(E \cap \left\{x \in R^n_+ \mid a \le x \le a + b\right\}\right) + R^n_+.$$

Zbiór L można przedstawić jako sumę mnogościową następujących zbiorów L^T, indeksowanych niepustymi podzbiorami T zbioru $\{1, \ldots, n\}$:

$$L^T := \{x \in R^n_+ \mid x_j \le a_j + b_j \text{ dla } j \in T, x_j \ge a_j + b_j \text{ dla } j \notin T \text{ oraz } \tilde{x} \in E\}$$

(w powyższej definicji $\tilde{x}$ określają wzory $\tilde{x}_j = x_j$ dla $j \in T$ oraz $\tilde{x}_j = a_j + b_j$ dla $j \notin T$).

Wartością definiowanej funkcji użyteczności u dla dowolnych x $\in L$ jest $u(x) := \frac{1}{2n}\sum_{j=1}^n (a_j + b_j)$ dla x $\in t \cdot L$, $t > 0$; $u(x) := \frac{t}{2n}\sum_{j=1}^n (a_j + b_j)$; $u(x) := 0$ kiedy $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = 0$ (dla liczby rzeczywistej t i zbioru $L \subseteq R^n$, $t \cdot L$ oznacza $\{tx \mid x \in R^n\}$). Tę funkcję użyteczności oznaczymy przez u^{ab}. Zauważmy, że $u^{ab} = t \cdot u^{ta, tb}$ dla wszystkich $t > 0$.

Funkcja użyteczności u^{ab} jest dobrze określona, jednak potrzebny może być jawny wzór na $u(x)$. Powyższy rozkład zbioru L będzie w tym pomocny.

Wyprowadzimy najpierw bezpośredni wzór, w przypadku kiedy a = b = (1,1,… , 1); zajmiemy się tylko przypadkiem $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ (z symetrii wynika, że przypadki innych uporządkowań są analogiczne). Jeżeli $x_1 = 0$ to $u(x) = 0$. W przeciwnym wypadku nazwiemy dokładnie jeden spośród wskaźników $2, \ldots, n, n + 1$ *krytycznym*: 1 nie jest krytyczny, dla $t = 1,\ldots,n - 1$, $t + 1$ jest krytyczny, gdy t nie jest krytyczny oraz $x_{t+1} \geq 2g(x_1, x_2, \ldots, x_t)$, gdzie $g(x_1, x_2, \ldots, x_t)$ jest większym spośród dwóch rozwiązań równania:

$$(2g - x_1)^2 + (2g - x_2)^2 + \ldots + (2g - x_t)^2 = g^2,$$

czyli,

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_t) = \frac{1}{4t-1}\left[2(x_1 + \ldots + x_t) + \sqrt{4(x_1 + \ldots + x_t)^2 - (4t-1)\left(x_1^2 + \ldots + x_t^2\right)}\right].$$

Jeżeli 1, 2,… oraz n nie są krytyczne, to przyjmiemy, że $n + 1$ jest krytyczne. Definiujemy u(x) jako $g(x_1, x_2, \ldots, x_t)$, gdzie $t + 1$ jest krytyczne.

Dla uproszczenia powyższą konstrukcję przeprowadziliśmy dla a = b = (1,1,..., 1); jest ona jednak analogiczna w ogólnym przypadku, z tym tylko, że powyższy wzór na $g(x_1, x_2, \ldots, x_t)$ musi zostać odpowiednio zmodyfikowany. Z konstrukcji wynika, że zdefiniowane funkcje użyteczności są wyrównane.

Wyznaczymy teraz funkcje popytu indukowane przez eliptyczne funkcje popytu. Dla dowolnego układu cen π oraz dochodu I znajdujemy punkt x $\in L$ taki, że hiperpłaszczyzna budżetowa $\{\mathrm{z} \in \mathrm{R}^n \mid \langle \pi, \mathrm{z} \rangle = I\}$ jest równoległa do hiperpłaszczyzny stycznej do L w punkcie x. Przy $\pi > 0$ jest dokładnie jeden taki punkt, w przeciwnym wypadku takich punktów jest nieskończenie wiele, wybieramy wówczas punkt minimalny w sensie częściowego porządku $\leq$ w R_+^n. W obu przypadkach wybrany punkt x należy do elipsoidy E. Popyt $\overline{D}(I, \pi)$ jest proporcjonalny do x (mnożymy x przez $I \cdot \langle \mathrm{x}, \pi \rangle^{-1}$).

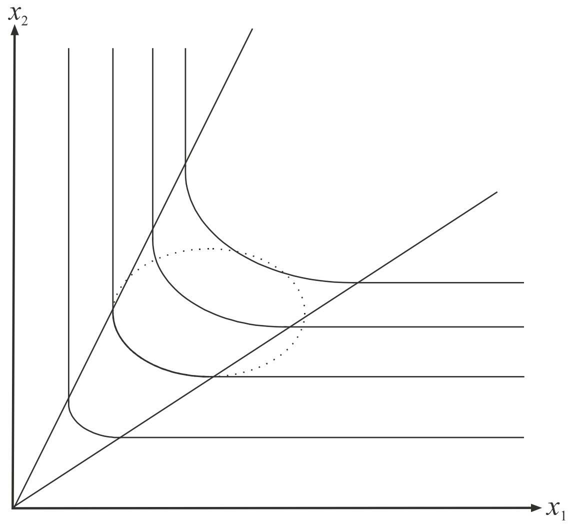
Funkcja popytu dla naszej funkcji użyteczności wyraża się więc jako

$$\overline{D}(I, \pi) = \left(\overline{D_1}(I, \pi), \ldots, \overline{D}_n(I, \pi)\right)$$

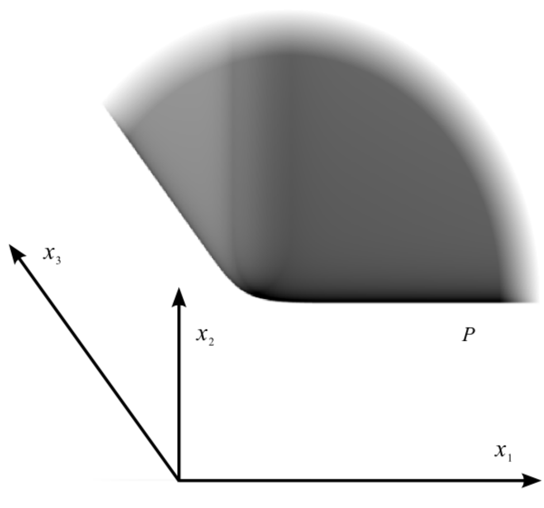
gdzie:

$$\overline{D}_j(I, \pi) = I \cdot \frac{\left(a_j + b_j - b_j^2 \pi_j \left(\sum_{m=1}^{n} \pi_m^2 b_m^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(a_j + b_j - b_j^2 \pi_j \left(\sum_{m=1}^{n} \pi_m^2 b_m^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \pi_i}.$$

Rysunek 2. Przykładowe krzywe obojętności dla eliptycznej funkcji użyteczności w przypadku $n = 2$ i elipsa służąca do jej konstrukcji.



Rysunek 3. Przykładowa powierzchnia obojętności P dla eliptycznej funkcji użyteczności w przypadku $n = 3$. Pozostałe powierzchnie obojętności mają postać $\alpha P = \{\alpha \cdot \mathrm{x} \mid \mathrm{x} \in P\}$, $\alpha \geq 0$; przy $\alpha = 0$ powierzchnia degeneruje się do punktu (0,0,0).



Przypisy

[1] W zastosowaniach często wygodnie jest stosować alternatywną parametryzację $(e_1x_1 - f_1)^2 + ... + (e_nx_n - f_n)^2 = 1$. Nowe parametry wyrażają się przy pomocy poprzednich parametrów wzorami $e_j = \frac{1}{b_j}$ oraz $f_j = 1 + \frac{a_j}{b_j}$, dla $j = 1,\dots,n$. Środkiem elipsoidy przy tej notacji jest $\left(\frac{f_1}{e_1},\dots,\frac{f_n}{e_n}\right)$, długością j-tej osi jest $\frac{2}{e_j}$

Bibliografia

[1] Chipman, J. S. (red.). 1971. *Preferences, Utility and Demand.* Minnesota Symposium, Harcourt, Brace, Jovanovich.

[2] Katzner, D.W. 1970. *Static Demand Theory.*

[3] Scarf, H., Hansen, T. 1973. *The Computation of Economic Equilibria.* Yale University Press.

[4] Theil, H. 1975. *Theory and Measurement of Consumer Demand.* North-Holland.

[5] Thomas, R.L. 1987. *Applied Demand Analysis.* Longman.

[6] Trockel, W. 1984. *Market Demand: an Analysis of Large Economies with Non-Convex Preferences.* Springer Verlag.

[7] Wold, H. (with Jureen, L.). 1953. *Demand Analysis. A Study in Econometrics.* Wiley.