STRUKTURA CZĄSTKOWEJ JEDNOLITOŚCI GRACZY A ICH ZNACZENIE W ZGROMADZENIU. HYBRYDOWE INDEKSY SIŁY[1]

Marek Bożykowski[2]
Uniwersytet Warszawski

Mikołaj Jasiński[3]
Uniwersytet Warszawski

Streszczenie: *W artykule przedstawiamy probabilistyczną interpretację indeksu Shapleya-Shubika i wartości Banzhafa oraz koncepcję struktury bliskości (in. struktury cząstkowej jednolitości) graczy. Na podstawie opisanego modelu struktury można wyznaczyć prawdopodobieństwa krytyczności graczy – tego, że ich zachowania będą decydowały o wynikach głosowań. Prawdopodobieństwa te są podstawą do wyznaczania rodziny hybrydowych indeksów siły, których skrajnymi przypadkami są: indeks Shapleya-Shubika i indeks Banzhafa.*

Ponadto proponujemy koncepcję odtwarzania struktury cząstkowej jednolitości opartą na estymacji metodą najwyższej wiarygodności. Przedstawiona koncepcja wychodzi z tych samych założeń co indeksy hybrydowe.

Przedstawioną metodę ilustrujemy zarówno prostymi przykładami heurystycznymi, jak i wynikami badań rzeczywistych zachowań klubów parlamentarnych Sejmu RP 7. kadencji.

Słowa kluczowe: *gra prosta, indeks siły, indeks Shapleya-Shubika, wartość Banzhafa, gracz krytyczny, struktura cząstkowej jednolitości, metoda najwyższej wiarygodności.*

1 Autorzy dziękują za cenne uwagi prof. Grzegorzowi Lissowskiemu i dr. Marcinowi Malawskiemu oraz anonimowym recenzentom.

2 Marek Bożykowski, Zakład Statystyki, Demografii i Socjologii Matematycznej w Instytucie Socjologii Uniwersytetu Warszawskiego, ul. Karowa 18, 00-324 Warszawa; e-mail: m.bozykowski@is.uw.edu.pl

3 Mikołaj Jasiński, Zakład Statystyki, Demografii i Socjologii Matematycznej w Instytucie Socjologii Uniwersytetu Warszawskiego, ul. Karowa 18, 00-324 Warszawa; e-mail: mikoj@is.uw.edu.pl

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.20

PARTIAL HOMOGENEITY STRUCTURE AND ITS IMPACT ON PLAYERS' POWER. HYBRID POWER INDICES

Abstract: *The paper presents the probabilistic interpretation of Shapley-Shubik index and Banzhaf value and the concept of partial homogeneity structure. Probabilities of being critical can be calculated based on this structure. These probabilities constitute the basis for calculating hybrid power indices, Shapley-Shubik index and Banzhaf index being the extreme cases.*

The paper presents the idea of reconstruction of partial homogeneity structure based on maximum likelihood estimation. This method is based on the same assumptions as hybrid power indices.

The method is illustrated by simple heuristic examples and results of analysis of clubs' voting in 7th term of Sejm – the lower house of the Polish parliament.

Key words: *simple game, power index, Shapley-Shubik index, Banzhaf value, critical player, partial homogeneity structure, maximum likelihood estimation.*

Podejmowano dotychczas rozmaite próby uwzględnienia niesymetrycznych relacji (w postaci struktury bliskości lub przestrzeni ideologicznej) między uczestnikami zbiorowego podejmowania decyzji (m.in. Owen, 1971, 1977; Shapley, 1977; Grofman i in., 1987; Jasiński, 2003). W tych modelach relacje są traktowane jako dane. Straffin (1977) zaproponował interesującą, elegancką koncepcję hybrydowych indeksów niesymetrycznych, której szczególną zaletą jest interpretowalność wyników jako prawdopodobieństw posiadania decydującego głosu w podejmowaniu decyzji przez zgromadzenie.[4] Do zalet należy zaliczyć również to, że indeksy te w zależności od przyjętych dodatkowych założeń są równoważne powszechnie znanym: indeksowi Shapleya-Shubika i Banzhafa. W swojej propozycji Straffin zawarł ciekawe aksjomatyzacje indeksu Shapleya-Shubika i wartości Banzhafa. Sformułowano wiele nowych aksjomatyzacji tych miar (zob. m.in. Dubey, 1975; Dubey i Shapley, 1979; Lehrer, 1988; Feltkamp, 1995; Falsenthal i Machover, 1998; Laruelle i Valenciano, 2001). Porównanie zestawów aksjomatów badanych wielkości (np. indeksów siły) pozwala na ujawnienie i dogłębne opisanie ich własności. Celem tego artykułu jest jednak przede wszystkim opis ciekawego podejścia zaproponowanego przed laty przez Straffina i zbyt słabo, naszym zdaniem, wykorzystywanego w badaniu procesów decyzyjnych w zgromadzeniach politycznych. Dlatego koncentrujemy się przede wszystkim na przedstawieniu potencjału opisywanej koncepcji jako podstawy do badań dla socjologa polityki. W niniejszym artykule indeks

[4] Do tej propozycji odwołują się m.in. Napel i Widgren (2002) prezentujący koncepcję uogólnienia indeksów siły.

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.20

Shapleya-Shubika i wartość Banzhafa traktujemy przede wszystkim jako skrajne przypadki całej rodziny niesymetrycznych indeksów siły.

Osobną kwestią jest odtwarzanie struktury zgromadzenia. Znane są próby odtworzenia przestrzeni ideologicznej (zob. np. Rapoport i Golan, 1985; Jasiński, 2012). W niniejszym artykule przedstawiamy propozycję szacowania struktury zgromadzenia na podstawie głosowań. Propozycja ta oparta jest na tych samych założeniach, co hybrydowy indeks Straffina.

Gry proste

Zasadniczym pojęciem, na którym opiera się koncepcja zaproponowana przez Straffina, jest gra prosta. Przez grę prostą rozumiemy parę (N, W), gdzie N oznacza zbiór wszystkich głosujących (graczy). Podzbiory głosujących nazywamy koalicjami. Rozróżniać będziemy koalicje wygrywające i przegrywające. W oznacza zbiór wszystkich koalicji wygrywających. Gra prosta spełnia następujące warunki:

1. $N \in W$;
2. $\varnothing \notin W$;
3. jeżeli $S \in W$ oraz $S \subset T$, to $T \in W$.

W języku naturalnym można przedstawić je następująco:

1. koalicja składająca się ze wszystkich graczy jest koalicją wygrywającą;
2. koalicja niezawierająca żadnego gracza jest koalicją przegrywającą;
3. jeśli pewna koalicja jest koalicją wygrywającą, to wszystkie koalicje ją zawierające też są koalicjami wygrywającymi.

Przykładem gry prostej jest „gra o ustawę" w polskim systemie ustawodawczym z udziałem wszystkich posłów, senatorów i prezydenta. Przykładem koalicji wygrywającej w tej grze jest koalicja składająca się z co najmniej 3/5 posłów. Warto w tym miejscu podkreślić, że w dalszych rozważaniach przyjmować będziemy dychotomiczność zachowań głosujących – każde zachowanie, w tym nieobecność lub wstrzymanie się od głosu, da się zakwalifikować jako poparcie lub sprzeciw wobec wniosku. Na przykład, wstrzymanie się od głosu w głosowaniu w sprawie odrzucenia weta prezydenta oznacza faktycznie poparcie stanowiska prezydenta. Philip Straffin analizuje procesy decyzyjne podczas „gry o konstytucję Kanady" według schematu zaproponowanego na konferencji w Victorii w 1971 r. Procedurę tę przedstawia w postaci gry prostej z udziałem prowincji: Quebec, Ontario, Kolumbii Brytyjskiej, prowincji atlantyckich (Nowy Brunszwik, Nowa Szkocja, Wyspa Księcia Edwarda, Nowa Fundlandia) oraz prowincji centralnych (Alberta, Saskatchewan, Manitoba).

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.20

Na użytek tego artykułu, dla ułatwienia zrozumienia przedstawionego modelu, ograniczymy się do tzw. ważonych gier większości. Są to takie gry proste, do których opisania wystarczy informacja o wagach – nieujemnych liczbach rzeczywistych przypisanych poszczególnym głosującym oraz informacja o progu (tzw. kwocie), którego przekroczenie lub osiągnięcie przez sumę wag graczy popierających głosowaną kwestię jest równoważne z jej przyjęciem przez zgromadzenie.

Ważoną grę większości z graczami 1, ..., n, wagą w_i przyporządkowaną i-temu graczowi oraz kwotą q zapisywać będziemy jako $[q; w_1, ..., w_n]$.

Nie wszystkie gry proste są ważonymi grami większości. Przykładem jest wspomniana gra o konstytucję Kanady wykorzystana przez Straffina. W grze tej do wprowadzenia zmian do konstytucji niezbędne było uzyskanie poparcia szeregu kanadyjskich prowincji: Quebec, Ontario, co najmniej dwu prowincji atlantyckich oraz Kolumbii Brytyjskiej i jednej z prowincji centralnych lub wszystkich trzech prowincji centralnych. W odróżnieniu od „polskiej gry o ustawę"[5] „gry o konstytucję Kanady" nie da się przedstawić w postaci ważonej gry większości.

Indeksy siły

Do opisu znaczenia uczestników podejmowania decyzji w zgromadzeniach wykorzystywane są liczbowe miary zwane indeksami siły. Każdemu graczowi przyporządkowują nieujemną wartość, a suma tych wartości jest równa 1. Do najpopularniejszych indeksów siły należą: indeks Shapleya-Shubika oraz indeks Banzhafa, który jest unormowaną wersją tzw. wartości Banzhafa.

Lloyd Shapley i Martin Shubik (1954) zaproponowali interesującą koncepcję wyznaczania siły gracza w zgromadzeniu odwołującą się do procesu budowania koalicji wygrywającej.

Rozpatrzmy wszystkie uporządkowania graczy. Dla zbioru n graczy jest $n!$ uporządkowań. Każde z nich można traktować jako kolejność dołączania graczy do koalicji. Skoro z definicji gry prostej wiadomo, że koalicja pusta jest przegrywająca, koalicja wszystkich graczy – wygrywająca, a poza tym dołączenie gracza do koalicji wygrywającej nigdy nie czyni jej przegrywającą, to w trakcie budowania koalicji dołączenie jakiegoś gracza przeważy szalę zwycięstwa na rzecz nowo tworzonej koalicji – zdecyduje o przekształceniu koalicji przegrywającej w wygrywającą. Takiego gracza będziemy nazywali graczem *decydującym* (ang. *pivotal*) w tym uporząd-

[5] Dociekliwych Czytelników zachęcamy do samodzielnego wyliczenia odpowiednich wag dla tej gry.

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.20

kowaniu. Wartość indeksu Shapleya-Shubika równa jest odsetkowi uporządkowań, w których gracz jest decydujący:

$$\varphi_i = \frac{\text{liczba uporządkowań, w których } i\text{-ty gracz jest decydujący}}{n!}$$

gdzie n to liczba graczy: $n = |N|$.

Przykład 1.

Rozważmy następującą ważoną grę większości: [3; 2, 1, 1]. Oznaczmy kolejnych graczy jako a, b, c.

Poniżej przedstawiamy wszystkie 6 uporządkowań trójki naszych graczy. Pogrubieniem zaznaczono gracza decydującego w danym uporządkowaniu.

a ***b*** *c*

a ***c*** *b*

b ***a*** *c*

b *c* ***a***

c ***a*** *b*

c *b* ***a***

Jak łatwo policzyć, gracz a okazał się decydujący w 4 uporządkowaniach, zaś pozostali gracze – każdy w jednym. Zatem pierwszemu graczowi przypiszemy wartość indeksu Shapleya-Shubika równą 2/3, zaś pozostałym – po 1/6. Wynik ten wygodnie zapisać w postaci wektora $\varphi = [2/3, 1/6, 1/6]$.

Indeks Shapleya-Shubika można wyznaczyć odwołując się do pojęcia gracza *krytycznego*. Graczem krytycznym dla danej koalicji wygrywającej nazywamy każdego gracza, którego wystąpienie przekształca ją w koalicję przegrywającą, a dla koalicji przegrywającej – gracza, który dołączając się do tej koalicji przekształciłby ją w koalicję wygrywającą. Pierwszy typ krytyczności nazwać można „negatywną krytycznością", zaś drugi – „pozytywną krytycznością" gracza. Każdy gracz jest tyle razy krytyczny pozytywnie, co negatywnie. Dla każdego gracza znajdujemy te koalicje wygrywające, dla których okazuje się on graczem krytycznym. Wartość indeksu Shapleya-Shubika i-tego gracza będzie równa:

$$\varphi_i = \sum_{\substack{S_i : S_i \in W \\ S_i - \{i\} \notin W}} \frac{(s_i - 1)!(n - s_i)!}{n!}$$

DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.20

gdzie:

S_i to koalicja wygrywająca, w której i-ty gracz jest krytyczny, $s_i = |S_i|$, $n = |N|$[6].

Wartość Banzhafa (β') oraz indeks Banzhafa (β) bazują na pojęciu gracza krytycznego. Wartość Banzhafa dla i-tego gracza można przedstawić jako odsetek koalicji, dla których jest on krytyczny (pozytywnie lub negatywnie) wśród wszystkich koalicji:

$$\beta_i' = \frac{2\eta_i}{2^n}$$

gdzie η_i oznacza liczbę koalicji, dla których i-ty gracz jest krytyczny pozytywnie. Liczba ta jest równa liczbie koalicji, dla których i-ty gracz jest krytyczny negatywnie. Każda koalicja, dla której i-ty gracz jest krytyczny pozytywnie, po „uzupełnieniu" ją o tego gracza staje się koalicją, dla której jest on krytyczny negatywnie. Jak łatwo zauważyć, łączna liczba koalicji, dla których i-ty gracz jest krytyczny pozytywnie lub negatywnie, jest równa $2\eta_i$.

Suma wartości Banzhafa dla wszystkich graczy w danej grze nie musi być równa 1. Dlatego, aby uzyskać indeks siły potrzeba unormować te wartości. Unormowaną wartość Banzhafa nazywamy indeksem Banzhafa:

$$\beta_i = \frac{\beta_i'}{\sum_{j=1}^{n} \beta_j'}$$

Przykład 2.

Rozważymy tę samą grę co w poprzednim przykładzie, tj. [3; 2, 1, 1]. Trzyelementowy zbiór graczy ma osiem podzbiorów (koalicji). Poniższa tabela przedstawia listy graczy krytycznych (osobno pozytywnie i negatywnie) dla każdego podzbioru:

Tabela 1.

Koalicja	Gracze krytyczni pozytywnie	Gracze krytyczni negatywnie
$\varnothing$	–	–
$\{a\}$	b, c	–
$\{b\}$	a	–
$\{c\}$	a	–
$\{a, b\}$	–	a, b
$\{a, c\}$	–	a, c
$\{b, c\}$	a	–
$\{a, b, c\}$	–	a
η_a	3	3
η_b	1	1
η_c	1	1

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.20

Zatem liczba koalicji, dla których gracze a, b, c są krytyczni w określony sposób, (pozytywnie albo negatywnie) dana jest przez wektor:

$$\eta = [3, 1, 1],$$

zaś wartość Banzhafa:

$$\beta' = [6/8, 2/8, 2/8] = [3/4, 1/4, 1/4],$$

która po unormowaniu daje indeks Banzhafa:

$$\beta = [3/5, 1/5, 1/5].$$

Probabilistyczna interpretacja indeksu Shapleya-Shubika i wartości Banzhafa

Philip Straffin (1977) zaproponował ciekawe ujęcie indeksu Shapleya-Shubika i wartości Banzhafa jako prawdopodobieństwa, że dany gracz będzie graczem krytycznym. Innymi słowy, jakie jest prawdopodobieństwo, że jeśli ten gracz poprze wniosek, to ten wniosek zostanie przyjęty przez zgromadzenie, ale zostanie odrzucony, jeśli ten gracz nie poprze wniosku.

Propozycję Straffina da się przedstawić w postaci dwuetapowego modelu podejmowania decyzji przez głosujących, którzy najpierw oceniają projekt (ustala się wtedy ich skłonność do poparcia tego projektu), a następnie podejmują decyzję o poparciu bądź sprzeciwie wobec niego.

W pierwszym etapie z ustalonego rozkładu losowane jest prawdopodobieństwo tego, że dany gracz poprze głosowany projekt. Prawdopodobieństwo dla i-tego gracza oznaczymy przez p_i ($0 \leq p_i \leq 1$). W drugim etapie gracze głosują – i-ty gracz z prawdopodobieństwem p_i głosuje za projektem i z prawdopodobieństwem $1–p_i$ głosuje przeciw projektowi.

Przyjmijmy dwa dodatkowe założenia:

1. Prawdopodobieństwa p_i są wartościami zmiennej losowej o rozkładzie równomiernym od 0 do 1.

Rozkład równomierny w sposób jednakowy traktuje wszystkie wartości zmiennej losowej. W przypadku gdy nie mamy żadnych podstaw do wyróżniania jakichkolwiek wartości prawdopodobieństwa poparcia kwestii, założenie to wydaje się być naturalne.

2. Przy ustalonych w pierwszym etapie wartościach p_i decyzje graczy są podejmowane w sposób niezależny.

[6] Powyższe wyrażenie odwołuje się do negatywnej krytyczności gracza. Analogicznie można wyznaczyć wartość indeksu Shapleya-Shubika, odwołując się do pozytywnej krytyczności gracza.

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.20

Nie oznacza to koniecznie, że biorąc pod uwagę oba etapy gracze głosują w sposób niezależny. Gracze głosowaliby w sposób zależny w sytuacji, gdyby wartości p_i w pierwszym etapie losowane były w sposób zależny. Przykładowo, gdyby dwóm graczom przypisać niezależnie prawdopodobieństwa poparcia wniosku równe p_1 i p_2, to gracze ci głosowaliby w sposób niezależny, a szansa na to, że zagłosują identycznie będzie równa 1/2. Gdyby jednak wylosować dla nich obu to samo prawdopodobieństwo p (w tej sytuacji mamy do czynienia ze skrajną zależnością prawdopodobieństw), to szansa na to, że zagłosują identycznie, jest równa $p^2 + (1 - p)^2$.

Rozważmy konsekwencje przyjęcia ponadto jednego z dwóch poniższych, wzajemnie wykluczających się założeń:

3. **Założenie jednolitości.** W pierwszym etapie losowana jest jedna wartość prawdopodobieństwa p, wspólna dla wszystkich graczy: $\forall i\ p_i = p$.
4. **Założenie niezależności.** W pierwszym etapie wartość prawdopodobieństwa jest losowana dla każdego gracza osobno, w sposób niezależny.

Straffin interpretuje dwa ostatnie założenia w kategoriach istnienia wspólnych wzorców, kryteriów oceny głosowanych opcji:

- Przyjęcie założenia 3. jest równoważne uznaniu istnienia wspólnych standardów wśród głosujących – skoro w identyczny sposób oceniają rzeczywistość, to będą tak samo skłonni do poparcia poszczególnych projektów. Nie oznacza to jednak, że zawsze głosują jednomyślnie – mają jedynie równe prawdopodobieństwo zagłosowania za projektem.
- Założenie niezależności oznacza brak wspólnych wzorców – każdy z graczy ma własny, niezależny od innych sposób oceny głosowanych kwestii.

Jakie jest zatem prawdopodobieństwo tego, że w tym modelu i-ty gracz okaże się w danym głosowaniu graczem krytycznym? Straffin pokazał, że jeśli przyjmiemy założenia 1., 2. i 3., prawdopodobieństwo to jest równe wartości indeksu Shapleya-Shubika. Przy przyjęciu założeń 1., 2. i 4. prawdopodobieństwo to jest równe wartości Banzhafa[7].

Przykład 3.

Rozważmy tę samą grę, co w przykładzie 1., tj. [3; 2, 1, 1]. Gracz a będzie krytyczny w trzech sytuacjach:

- gdy wniosek popiera gracz b, a gracz c nie popiera,
- gdy wniosek popiera gracz c, a gracz b nie popiera,
- gdy obaj gracze b i c popierają wniosek.

[7] Dowody obu twierdzeń Czytelnik znajdzie w (Straffin, 1977: 112-113).

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.20

Każdy z pozostałych dwóch graczy jest krytyczny tylko wtedy, gdy wniosek popiera gracz *a*, zaś drugi spośród nich nie popiera.

Niech p_a, p_b, p_c oznaczają prawdopodobieństwa poparcia wniosku przez graczy, odpowiednio, *a*, *b*, *c*, przy czym zmienne losowe p_a, p_b, p_c mają rozkłady równomierne od 0 do 1. Prawdopodobieństwa tego, że gracze ci będą graczami krytycznymi w danym głosowaniu będą zatem dane wyrażeniami:

$$\pi_{\mathrm{a}}(p_a, p_b, p_c) = p_b(1-p_c) + (1-p_b)p_c + p_b\, p_c$$

$$\pi_{\mathrm{b}}(p_a, p_b, p_c) = p_a(1-p_c)$$

$$\pi_{\mathrm{c}}(p_a, p_b, p_c) = p_a(1-p_b)$$

Po przyjęciu założenia jednolitości ($\forall i\ p_i = p$) wyrażenia upraszczają się do postaci:

$$\pi_{\mathrm{a}}(p) = p(1-p)+(1-p)p + p^2$$

$$\pi_{\mathrm{b}}(p) = p(1-p)$$

$$\pi_{\mathrm{c}}(p) = p(1-p).$$

Prawdopodobieństwo tego, że w grze *i*-ty gracz będzie graczem krytycznym, jest równe wartości oczekiwanej zmiennej losowej $\pi_{\mathrm{i}}(p)$, która jest równa całce tej funkcji po wszystkich wartościach *p* od 0 do 1. Przy założeniu jednolitości wynoszą one:

$$\int_0^1 \pi_a(p)dp = \int_0^1 \left(p\,(1-p) + (1-p)\,p + p^2\right) dp = \frac{2}{3}$$

$$\int_0^1 \pi_b(p)dp = \int_0^1 p\,(1-p)dp = \frac{1}{6}$$

$$\int_0^1 \pi_c(p)dp = \int_0^1 p\,(1-p)dp = \frac{1}{6}$$

Przy założeniu niezależności prawdopodobieństwo tego, że w grze *i*-ty gracz będzie graczem krytycznym jest równe wartości oczekiwanej zmiennej losowej $\pi_{\mathrm{i}}(p_a, p_b, p_c)$, która jest równa całce wielokrotnej tej funkcji po wszystkich wartościach jej argumentów od 0 do 1. Wynoszą one:

$$\int_0^1\!\!\int_0^1 \pi_a(p_b, p_c)\, dp_b dp_c = \int_0^1\!\!\int_0^1 \left(p_b\,(1-p_c) + (1-p_b)\,p_c + p_b\,p_c\right) dp_b dp_c = \frac{3}{4}$$

$$\int_0^1\!\!\int_0^1 \pi_b(p_a, p_c)\, dp_a dp_c = \int_0^1\!\!\int_0^1 p_a\,(1-p_c)\, dp_a dp_c = \frac{1}{4}$$

$$\int_0^1\int_0^1 \pi_c(p_a, p_b)\, dp_a dp_b = \int_0^1\int_0^1 p_a\,(1-p_b)\, dp_a dp_b = \frac{1}{4}$$

Jak łatwo zauważyć, wyniki te są równe, odpowiednio, indeksowi Shapleya-Shubika i wartości Banzhafa.

Struktura cząstkowej jednolitości. Koncepcja hybrydowego indeksu siły

Przedstawione założenia jednolitości i niezależności traktują wszystkich graczy jednakowo – prowadzą do symetrycznych (anonimowych) indeksów siły. Jednak w realiach społecznych, w szczególności w zgromadzeniach o charakterze politycznym, często obserwujemy grupy głosujących podobnie postrzegających rzeczywistość. Grupy te bywają względnie spójne wewnętrznie, ale posiadają odmienne standardy niż inne grupy. Nie jest to ani sytuacja jednolitości, gdzie wszyscy gracze są do siebie podobni, ani sytuacja niezależności, gdzie każdy jest „samotną wyspą".

Na bazie przedstawionego probabilistycznego modelu indeksów siły Straffin (1977) zaprezentował koncepcję struktury bliskości głosujących – strukturę cząstkowej jednolitości. Gracze są podzieleni na grupy. Przyjmujemy, że graczy wewnątrz każdej z grup charakteryzuje ta sama skłonność do poparcia głosowanej kwestii. Zarazem każda z grup ma standardy niezależne od standardów innych grup.

Dla każdej z wyodrębnionych grup losowane jest prawdopodobieństwo poparcia danej kwestii, niezależnie od innych grup. Wszyscy gracze wewnątrz pojedynczej grupy mają to samo prawdopodobieństwo poparcia wniosku.

Formalnie rzecz ujmując, strukturą cząstkowej jednolitości C na zbiorze N będzie podział tego zbioru na m ($m \leq n$) podzbiorów (niepustych, rozłącznych, których suma jest równa zbiorowi N). Każdemu (j-temu) podzbiorowi przyporządkowana jest liczba q_j, której wartość losowana jest z rozkładu równomiernego od 0 do 1:

$C = \{Z_1, Z_2, \ldots, Z_m\}$

$Z_j \cap Z_k = \emptyset$, dla $j \neq k$

$\bigcup_{j=1}^{m} Z_j = N$

q_j ($j = 1, \ldots, m$) – prawdopodobieństwo przyporządkowane Z_j

$\forall i \in Z_j\; p_i = q_j$

DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.20

Dla trzech graczy a, b, c wyróżnić można pięć podziałów[8]:

$C_1=\{\{a, b, c\}\}$

$C_2=\{\{a, b\}, \{c\}\}$

$C_3=\{\{a, c\}, \{b\}\}$

$C_4=\{\{a\}, \{b, c\}\}$

$C_5=\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$

Jak widać, pierwszy i ostatni podział wyznaczają skrajne przypadki: pierwszy reprezentuje pełną jednolitość (wszyscy gracze należą do jednego podzbioru – zbioru wszystkich graczy), zaś ostatni – pełną niezależność (każdy z graczy stanowi jednoelementowy podzbiór).

Prawdopodobieństwo tego, że i-ty gracz będzie graczem krytycznym w grze G o zadanej strukturze cząstkowej jednolitości C jest funkcją dwóch zmiennych: G oraz C. Oznaczymy je jako: $V_i'(G, C)$.

Dla ustalonego głosowania, a zatem danego wektora prawdopodobieństw poparcia wniosku przez n-kę graczy $[p_1, p_2, \ldots, p_n]$, prawdopodobieństwo tego, że i-ty gracz będzie graczem krytycznym (prawdopodobieństwo to oznaczymy przez π_i) jest funkcją tych prawdopodobieństw:

$$\pi_i(p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

Konsekwencją przyjęcia struktury cząstkowej jednolitości C jest możliwość przedstawienia tego prawdopodobieństwa jako funkcji wektora $[q_1, q_2, \ldots, q_m]$. Oznaczać ją będziemy przez:

$$\overline{\pi}_i(q_1, \ldots, q_m)$$

Określa ona prawdopodobieństwo tego, że i-ty gracz będzie graczem krytycznym przy danej strukturze jednolitości:

$$\overline{\pi}_i(q_1, \ldots, q_m) = \pi_i(p_1, \ldots, p_n), \text{ przy czym } p_i = q_j \text{ jeśli } i \in Z_j$$

Zatem prawdopodobieństwo tego, że i-ty gracz będzie graczem krytycznym w grze G o strukturze cząstkowej jednolitości C jest wartością oczekiwaną – całką funkcji:

$$V'(G, C) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 \overline{\pi}_i(q_1, \ldots, q_m) dq_1 \ldots dq_m$$

[8] Liczba podziałów zbioru jest równa liczbie Bella. Przykładowo, dla zbiorów o liczebnościach 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 liczba Bella wynosi, odpowiednio, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877. Warto podkreślić bardzo szybki przyrost liczby Bella dla zbiorów o coraz większej liczebności (liczba Bella dla zbioru 100-elementowego jest 116-cyfrowa).

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.20

Indeks siły będzie unormowaną wartością $V_i'(G, C)$:

$$V_i(G,C) = \frac{V_i'(G,C)}{\sum_{l=1}^{n} V_l'(G,C)}$$

Zainteresowany Czytelnik bez trudu sprawdzi, że przedstawione miary siły – indeks Shapleya-Shubika i wartość Banzhafa – są skrajnymi przypadkami tak zdefiniowanej wielkości. Dla $C = \{N\}$ szukane prawdopodobieństwo krytyczności gracza jest równe wartości indeksu Shapleya-Shubika. Do wartości Banzhafa zaś prowadzi przyjęcie struktury cząstkowej jednolitości równej podziałowi na jednoelementowe podzbiory pojedynczych graczy.

Wartości prawdopodobieństw krytyczności graczy dla wszystkich „pośrednich" struktur, między pełną jednolitością a pełną niezależnością, określają, po unormowaniu, rodzinę indeksów – rodzaj hybrydy obu wielkości: indeksu Shapleya-Shubika i wartości Banzhafa. Tak skonstruowane indeksy siły są indeksami niesymetrycznymi – pozwalającymi uwzględnić niejednolitość relacji między głosującymi podczas podejmowania zbiorowej decyzji. Stanowią osobną propozycję modelowania zachowań decydentów w warunkach istnienia czynnika różnicującego ich stosunek do siebie nawzajem i głosowanych kwestii. Uzupełniają one tzw. przestrzenne generalizacje indeksów siły (zob. m.in. Shapley, 1977, Jasiński, 2003) oraz koncepcję indeksów siły z prekoalicjami (zob. m.in. Owen, 1971, Owen, 1981, Ekes, 2006). Porównanie własności tych podejść to osobny temat rozważań. W tym miejscu podkreślić warto, że zaprezentowane podejście jest odrębne. Jego zasadniczą zaletą jest jasna interpretowalność wszystkich elementów modelu – w szczególności struktury cząstkowej jednolitości – jako określającej zróżnicowaną skłonność do poparcia głosowanych wniosków. Ponadto, w odróżnieniu od większości przestrzennych generalizacji indeksów siły oraz indeksów siły z prekoalicjami, hybrydowe indeksy siły spełniają postulat gracza istotnego – jeśli gracz należy do jakiejkolwiek minimalnej koalicji wygrywającej, to indeks siły tego gracza ma wartość większą od zera.

Przykład 4.

Rozważmy grę [3; 2, 1, 1] przy strukturze cząstkowej jednolitości $\{\{a, b\}, \{c\}\}$. Graczom a i b z pierwszego podzbioru przyporządkowujemy zatem takie samo prawdopodobieństwo q_1 poparcia danego wniosku, zaś graczowi c – prawdopodobieństwo równe q_2. Wartości V' dla poszczególnych graczy wyznaczymy następująco:

$$V_a' = \int_0^1\int_0^1 \Big(q_1\,(1-q_2) + q_2\,(1-q_1) + q_1\,q_2\Big)dq_1 dq_2 = \frac{3}{4}$$

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.20

$$V_b' = \int_0^1 \int_0^1 q_1 \, (1 - q_2) dq_1 dq_2 = \frac{1}{4}$$

$$V_c' = \int_0^1 q_1 \, (1 - q_1) dq_1 = \frac{1}{6}$$

Indeks siły poszczególnych graczy dany jest wektorem V = [9/14, 3/14, 2/14]. Jak widać, gracz b „zyskał" na podobieństwie do gracza a w porównaniu do gracza c dysponującego tą samą wagą. Przykład ten ilustruje niesymetryczność indeksów hybrydowych.

Przyjęcie określonej struktury cząstkowej jednolitości określa prawdopodobieństwo poparcia wniosku przez poszczególne koalicje (podzbiory graczy). Każdej koalicji można przypisać jednoznacznie listę graczy dla niej krytycznych (pozytywnie i negatywnie). Zatem struktura cząstkowej jednolitości określa zarazem prawdopodobieństwo bycia graczem krytycznym. Pierwsza z poniższych tabel przedstawia rodzinę rozkładów prawdopodobieństwa poparcia wniosku przez poszczególne koalicje (i tylko przez nie) dla wszystkich podziałów zbioru graczy. Dla trójki graczy mamy 8 typów głosowań – tyle samo, ile typów koalicji mogą utworzyć gracze a, b, c[9].

Tabela 2.

Koalicja	Gracze krytyczni	Prawdopodobieństwo dla struktury cząstkowej jednolitości				
		$\{a, b, c\}$	$\{a, b\}, \{c\}$	$\{a, c\}, \{b\}$	$\{a\}, \{b, c\}$	$\{a\}, \{b\}, \{c\}$
$\varnothing$	–	1/4	1/6	1/6	1/6	1/8
$\{a\}$	b, c	1/12	1/12	1/12	1/6	1/8
$\{b\}$	a	1/12	1/12	1/6	1/12	1/8
$\{c\}$	a	1/12	1/6	1/12	1/12	1/8
$\{a, b\}$	a, b	1/12	1/6	1/12	1/12	1/8
$\{a, c\}$	a, c	1/12	1/12	1/6	1/12	1/8
$\{b, c\}$	a	1/12	1/12	1/12	1/6	1/8
$\{a, b, c\}$	a	1/4	1/6	1/6	1/6	1/8

Jak widać, na przykład popieranie wniosków przez koalicję graczy $\{a, b\}$ jest bardziej prawdopodobne przy strukturze $C_2 = \{\{a,b\}, \{c\}\}$ niż przy strukturze $C_3 = \{\{a,c\}, \{b\}\}$ (i każdej innej strukturze). W pierwszym przypadku jest ono równe:

$$P_{C_2}(\{a, b\}) = \int_0^1 \int_0^1 q_1^2 \, (1 - q_2) dq_1 dq_2 = \frac{1}{6}$$

[9] Dla ogólnego przypadku n graczy w zgromadzeniu możliwych jest 2^n typów głosowań.

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.20

W drugim przypadku wynosi ono:

$$P_{C_3}(\{a,b\}) = \int_0^1\int_0^1 q_1\,(1-q_1)\,q_2\,dq_1dq_2 = \frac{1}{12}$$

Prawdopodobieństwo krytyczności *i*-tego gracza w grze przy strukturze C_j będzie równe sumie prawdopodobieństw poparcia wniosku przez koalicje, dla których gracz ten jest krytyczny:

S_i – koalicja, dla której *i*-ty gracz jest krytyczny

$$V'_{C_j,i} = \sum_{S_i \in 2^N} P_{C_j}(S_i)$$

Na przykład prawdopodobieństwo to dla gracza *b* przy strukturze $C_4 = \{\{a\}, \{b,c\}\}$ jest równe:

$$V'_{C_4,b} = P_{C_4}(\{a\}) + P_{C_4}(\{a,b\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$

Poniższa tabela przedstawia wartości prawdopodobieństw krytyczności (V'_{Cj}) oraz indeksów siły (V_{Cj}) poszczególnych graczy w analizowanej grze przy różnych strukturach cząstkowej jednolitości.

Tabela 3.

	Struktura cząstkowej jednolitości C_j				
	{*a*, *b*, *c*}	{*a*, *b*}, {*c*}	{*a*, *c*}, {*b*}	{*a*}, {*b*, *c*}	{*a*}, {*b*}, {*c*}
$V'_{Cj,a}$	2/3	3/4	3/4	2/3	3/4
$V'_{Cj,b}$	1/6	1/4	1/6	1/4	1/4
$V'_{Cj,c}$	1/6	1/6	1/4	1/4	1/4
$V_{Cj,a}$	2/3	9/14	9/14	8/14	3/5
$V_{Cj,b}$	1/6	3/14	2/14	3/14	1/5
$V_{Cj,c}$	1/6	2/14	3/14	3/14	1/5

Estymacja struktury cząstkowej jednolitości metodą najwyższej wiarygodności

Dla każdej gry, podobnie jak w powyższym przykładzie, można wyznaczyć wartości indeksów siły dla wszystkich możliwych struktur cząstkowej jednolitości. Kluczową kwestią jest wskazanie właściwej struktury (tj. najlepiej reprezentującej rzeczywistą strukturę bliskości graczy), a co za tym idzie – indeksu siły. Straffin (1977) podaje przykład gry o konstytucję Kanady, w którym wybór struktury był oparty na obserwacji ówczesnego dyskursu politycznego. Wybór Straffina, jakkolwiek wydaje się słuszny, nie jest intersubiektywnie weryfikowalny – można jedynie odnosić przedstawione opinie do własnych intuicji. Alternatywnym rozwiązaniem jest estymacja struktury cząstkowej jednolitości na podstawie zachowań głosujących. Przedstawimy propozycję odtwarzania tej struktury metodą najwyższej wiarygodności.

Poniżej w skrócie przedstawimy koncepcję estymacji parametrów metodą najwyższej wiarygodności[10]. Metodę tę stosujemy w sytuacji, gdy nie znamy wartości parametru populacyjnego, ale wiemy, jakie wartości może on przyjmować i dysponujemy zmienną losową, której rozkład zależy od wartości tego parametru i jest znany dla każdej możliwej wartości parametru, zaś jej realizacja jest obserwowalna jako wynik doświadczenia losowego. Każdej parze – wynik doświadczenia losowego i wartość parametru – można jednoznacznie przypisać prawdopodobieństwo uzyskania takiego wyniku doświadczenia losowego w sytuacji, gdy parametr populacyjny jest równy tej wartości parametru. Serii niezależnych doświadczeń losowych możemy przyporządkować liczby będące wartościami rosnącej funkcji prawdopodobieństwa lub funkcji gęstości prawdopodobieństwa uzyskania wyniku zgodnego z empirycznym wynikiem. Funkcja ta nazywana jest funkcją wiarygodności. Za najbardziej wiarygodną wartość parametru uznajemy tę, dla której wartość funkcji wiarygodności jest największa.

Załóżmy, że dysponujemy próbką – serią dychotomicznych głosowań. Przyjmujemy, że zdarzenia te są niezależne. Dlatego głosowania wybrane do odtwarzania struktury powinny dotyczyć odrębnych kwestii. Dla każdej możliwej struktury należy obliczyć prawdopodobieństwo uzyskania serii głosowań identycznej z empiryczną. Za najbardziej wiarygodną uznamy tę strukturę, dla której prawdopodobieństwo to jest największe.

Mówiąc bardziej precyzyjnie, dysponujemy rodziną rozkładów prawdopodobieństwa na przestrzeni doświadczeń losowych (głosowań) zależnych od estymowanych struktur. Rozważane prawdopodobieństwa traktować możemy również jako funkcję na zbiorze struktur cząstkowej jednolitości o wartościach zależnych od wyniku doświadczenia losowego (głosowań). Prawdopodobieństwa wystąpienia zaistniałej sekwencji głosowań przy poszczególnych strukturach cząstkowej jednolitości nazywamy funkcją wiarygodności.

Niech $P(C_j,k)$ oznacza prawdopodobieństwo przypisane j-tej strukturze dla k-tego głosowania.

[10] Bardziej szczegółowy opis estymacji metodą najwyższej wiarygodności Czytelnik znajdzie w dowolnym przyzwoitym podręczniku podejmującym problematykę wnioskowania statystycznego zarówno na poziomie podstawowym (np. Lissowski i in., 2008), jak i w nieco szerszym ujęciu (np. Silvey, 1978).

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.20

Dla sekwencji *r* głosowań funkcja wiarygodności będzie równa:

$$P(C_j) = \prod_{k=1}^{r} P(C_j, k)$$

Estymatorem najwyższej wiarygodności struktury cząstkowej jednolitości jest taka struktura C^*, dla której funkcja wiarygodności ma największą wartość:

$$P(C^*) = \max_j P(C_j)$$

Przykład 5.

Rozważamy dalej grę [3; 2, 1, 1] z udziałem graczy *a*, *b*, *c*. Przyjmijmy, że dysponujemy wynikami dwóch głosowań. W pierwszym głosowaniu wniosek został poparty jedynie przez gracza *a* (głosowanie typu [*T*,*N*,*N*]), zaś w drugim – przez całe zgromadzenie (głosowanie typu [*T*,*T*,*T*]). Przy wyznaczaniu prawdopodobieństw wystąpienia poszczególnych głosów przy różnych strukturach posłużymy się wartościami przedstawionymi w tabeli 2. Na przykład – prawdopodobieństwo wystąpienia konfiguracji głosów [*T*,*N*,*N*] przy strukturze C_2 w naszej grze jest równe:

$$P(C_2, [T, N, N]) = P_{C_2}(\{a\}) = \int_0^1\int_0^1 q_1\,(1-q_1)\,(1-q_2)dq_1dq_2 = \frac{1}{12}$$

Dla każdej struktury i poszczególnych głosowań w analogiczny sposób wyznaczyć można odpowiednie prawdopodobieństwa. Ich iloczyn będzie prawdopodobieństwem przyporządkowanym rozważanej strukturze cząstkowej jednolitości dla zaobserwowanej sekwencji głosowań.

Poniższa tabela przedstawia prawdopodobieństwa zajścia obu głosowań – [*T*,*N*,*N*] i [*T*,*T*,*T*] – oraz wartości funkcji wiarygodności dla poszczególnych struktur.

Tabela 4.

	Struktura cząstkowej jednolitości C_j				
	{*a*, *b*, *c*}	{*a*, *b*}, {*c*}	{*a*, *c*}, {*b*}	{*a*}, {*b*, *c*}	{*a*}, {*b*}, {*c*}
$P(C_j, [T,N,N])$	1/12	1/12	1/12	1/6	1/8
$P(C_j, [T,T,T])$	1/4	1/6	1/6	1/6	1/8
$P(C_j)$	**1/48**	**1/72**	**1/72**	**1/36**	**1/64**

Jak widać, najbardziej *wiarygodną* okazała się struktura $C_4=\{\{a\}, \{b, c\}\}$.

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.20

Estymacja struktury cząstkowej jednolitości w polskim Sejmie

Przedstawione podejście może służyć rekonstrukcji rzeczywistej struktury bliskości głosujących na podstawie ich zachowań. Podobnym podejściem jest rekonstrukcja przestrzeni ideologicznej *ex-post*,[11] również na podstawie odbytych głosowań. Zostało ono wykorzystane w publikacji w „Decyzjach" w 2013 r. (Jasiński, 2013). Podobnie jak w przypadku koncepcji przestrzeni ideologicznej *ex-post* przyjmujemy, że ideologie ujawniają się nie tyle w manifestach partyjnych, co w realnych działaniach – na przykład głosowaniach sejmowych. Wnioski płynące z badań tak rozumianej „ideologii w działaniu" bywają czasem sprzeczne z deklaracjami polityków.

Skoncentrujemy się na tzw. ważnych głosowaniach z 5. i 6. posiedzenia Sejmu VII kadencji. Za ważne zostały uznane te kwestie, które wyznaczały ówczesny dyskurs polityczny. Do ich rozpoznania niezbędna była analiza stenogramów z posiedzeń sejmowych oraz publicznych wypowiedzi polityków.

Podczas obu posiedzeń przeprowadzono 48 głosowań[12]. Do analizy wybraliśmy 10 najważniejszych głosowań. Dotyczyły one szeregu grup ważnych kwestii: ubezpieczeń zdrowotnych rolników za 2012 r., emerytur i rent, wydłużenia okresu, w którym rodzice mieliby decydować o posłaniu sześcioletniego dziecka do szkoły, refundacji leków, podatków od wydobycia rudy miedzi i srebra oraz wniosek o wyrażenie wotum nieufności wobec Ministra Zdrowia Bartosza Arłukowicza. Jednym z założeń przyjmowanych podczas estymacji jest niezależność doświadczeń – tu: głosowań. Niewłaściwym podejściem byłoby więc wykorzystywanie wyników wszystkich głosowań, często ściśle ze sobą powiązanych. Aby jak najlepiej spełnić przyjęte założenie należało wybrać głosowania odnoszące się do odrębnych aspektów głosowanych projektów (np. głosowania nad odmiennymi poprawkami do ustaw). Wybór głosowań wymagał więc nie tylko odniesienia się do ich tytułów[13], ale również interpretacji ich przedmiotu na podstawie analizy wypowiedzi posłów dostępnych m.in. w stenogramach z posiedzeń.

W prezentowanym przykładzie graczami są kluby parlamentarne, a nie poszczególni posłowie, zatem analizie podlegają stanowiska klubów, nie posłów. Warto przy tym pamiętać, że w ważnych głosowaniach posłowie tworzący kluby-graczy zachowują się z zasady jednomyślnie lub prawie jednomyślnie. Powszechną praktyką sejmową podczas głosowań uznawanych za ważne jest przekazywanie posłom stanowiska klubu w formie instrukcji głosowania. Z reguły niewielu posłów głosuje niezgodnie z instrukcją. Dlatego do wskazania stanowisk klubów parlamentarnych można było wykorzystać dominujące zachowania posłów tych klubów.

---

[11] Koncepcja ta została szczegółowo opisana w tekście (Jasiński, 2012). Opis innych koncepcji odtwarzania przestrzeni ideologicznych *ex-post* Czytelnik znajdzie w (Mercik, 1999).

[12] Na podstawie tych głosowań odtworzona została przestrzeń ideologiczna *ex-post* w (Jasiński, 2013).

[13] Opis tematów poszczególnych głosowań znajduje się w części aneksowej.

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.20

Osobnym zagadnieniem jest opisane już założenie o dychotomiczności zachowań graczy. W niektórych spośród wybranych głosowań pewne kluby wstrzymały się od głosu lub nie głosowały. Również w tym przypadku właściwe zakwalifikowanie głosów jako „za" lub „przeciw" było możliwe dzięki analizie stanowisk klubów i kół parlamentarnych zawartych w stenogramach.

Podczas 5. i 6. posiedzenia VII kadencji Sejm tworzyło siedem grup posłów. Poniższa tabela przedstawia ówczesną strukturę Sejmu.

Tabela 5.

Klub parlamentarny lub grupa posłów	Liczba mandatów
Platforma Obywatelska (PO)	207
Prawo i Sprawiedliwość (PiS)	136
Ruch Palikota (RP)	41
Polskie Stronnictwo Ludowe (PSL)	28
Sojusz Lewicy Demokratycznej (SLD)	26
Solidarna Polska (SP)	20
posłowie niezrzeszeni	2

Analizy indeksów siły będą obejmować tylko graczy istotnych – pięć klubów parlamentarnych: PO, PiS, RP, PSL, SLD. Pozostałe grupy (SP i posłowie niezrzeszeni) nie należą do żadnej minimalnej koalicji wygrywającej. Przy regule zwykłej większości, dla tej struktury Sejmu, istnieje pięć minimalnych koalicji wygrywających: {PO, PiS}, {PO, RP}, {PO, PSL}, {PO, SLD}, {PiS, RP, PSL, SLD}. Wszystkie analizowane indeksy siły przypiszą SP i posłom niezrzeszonym wartość równą zero. Zwraca równocześnie uwagę identyczność sytuacji PiS, RP, PSL i SLD przy tworzeniu minimalnych koalicji wygrywających. Wszystkie symetryczne indeksy siły (m.in. indeks Shapleya-Shubika i indeks Banzhafa) przypiszą tym graczom identyczną wartość.

W poniższej tabeli przedstawiamy listę wybranych głosowań.

Tabela 6.

Nr posiedzenia	Nr głosowania	PO	PiS	RP	PSL	SLD	Typ głosowania
5	3	N	T	T	N	T	1
5	8	N	T	T	N	T	1
5	11	T	T	T	T	T	2
5	14	N	T	T	N	N	3
5	18	T	N	T	T	N	4
5	23	N	T	T	N	T	1
5	32	T	T	N	T	N	5
6	7	T	N	T	T	T	6
6	11	N	T	T	N	T	1
6	13	N	T	T	N	T	1

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.20

Jak widać, głosowania te tworzą sześć typów wyróżnionych ze względu na zachowania poszczególnych klubów. Przy 5 graczach istnieją $2^5=32$ typy głosowań, zaś w ogólnym przypadku, dla n graczy, mamy 2^n typów głosowań. Estymacja struktury bliskości graczy oparta jest na rozkładzie typów głosowań.

Dla piątki graczy istnieją 52 podziały-struktury bliskości. Dla każdej struktury wyznaczyliśmy wartości funkcji wiarygodności. Tabela z wynikami obliczeń znajduje się w części aneksowej. Zawiera ona prawdopodobieństwa wystąpienia każdej z sześciu zaobserwowanych konfiguracji głosów oraz wartości funkcji wiarygodności (prawdopodobieństwa dla całej serii głosowań).

Wyznaczoną strukturą bliskości – strukturą najwyższej wiarygodności – okazał się podział na koalicję rządową i pozostałe kluby: {{PO, PSL}, {PiS, RP, SLD}}. Wyodrębnienie koalicji rządowej jest zgodne z intuicjami. Z drugiej strony umieszczenie wszystkich klubów opozycyjnych – w szczególności PiS razem z RP – w jednej grupie o „jednolitych standardach" może w pierwszym momencie budzić wątpliwości. W tym miejscu warto ponownie przywołać wspomnianą już koncepcję „ideologii w działaniu" – odtwarzalnej nie na podstawie spekulatywnych analiz doraźnych wypowiedzi polityków, lecz odwołując się do realnych działań (zob. Jasiński, 2012). W analizowanym okresie wspólną cechą trzech wymienionych klubów opozycyjnych był sprzeciw wobec koalicji rządowej pomimo publicznie wyrażanej wzajemnej niechęci.

Prawdopodobieństwa krytyczności poszczególnych klubów przy tej strukturze (*V'*) oraz odpowiadające im wartości indeksu siły (*V*) przedstawione są w poniższej tabeli. Przedstawione wyniki uzupełniliśmy wartościami przestrzennej generalizacji indeksu Shapleya-Shubika (indeksu Shapleya-Owena) wyznaczonymi dla przestrzeni ideologicznej odtworzonej na podstawie wszystkich głosowań 5. i 6. posiedzenia VII kadencji Sejmu (zob. Jasiński, 2013).

Tabela 7.

Klub parlamentarny	*V'*	*V*	Indeks Shapleya-Owena
Platforma Obywatelska (PO)	3/4	56%	16%
Prawo i Sprawiedliwość (PiS)	1/9	8%	2%
Ruch Palikota (RP)	1/9	8%	0%
Polskie Stronnictwo Ludowe (PSL)	1/4	19%	82%
Sojusz Lewicy Demokratycznej (SLD)	1/9	8%	0%

Analizując przedstawione wyniki, warto zwrócić uwagę na dwie kwestie. Po pierwsze, zarówno indeks hybrydowy, jak i indeks Shapleya-Owena wskazują na wzrost znaczenia PSL w stosunku do PiS, RP i SLD wynikający z niezwykle korzystnego usytuowania PSL. Jednak w przypadku indeksu Shapleya-Owena aż 82%

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.20

siły przypisanej tej partii wydaje się liczbą nieintuicyjnie dużą, choć interpretowalną jako wskaźnik nadzwyczajnej skuteczności PSL w strategiach podejmowanych w czasie głosowań. Po drugie, warto podkreślić rzadką w przypadku niesymetrycznych indeksów siły zaletę indeksów hybrydowych – przypisywanie niezerowej siły wszystkim graczom istotnym (spełnianie postulatu gracza istotnego).

Tak jak napisaliśmy, wektor *V'* jest łatwo interpretowalny jako informacja o faktycznym znaczeniu gracza w procesie decyzyjnym w zgromadzeniu, oznaczającym prawdopodobieństwo wystąpienia sytuacji, w której wniosek zostanie przyjęty przez izbę wtedy i tylko wtedy, gdy gracz ten go poprze. Prawdopodobieństwo przypisane danemu graczowi możemy rozumieć jako oczekiwany odsetek takich sytuacji. W Sejmie VII kadencji, jak pokazują wyniki modelu zawarte w tabeli, szansa na to, że decyzja o przyjęciu bądź odrzuceniu wniosku będzie zależała od zachowania klubu Platformy Obywatelskiej, wynosi 3/4. Koalicjant PO – Polskie Stronnictwo Ludowe – decyduje w 1/4 głosowań. Jak widać, jest to przeszło dwukrotnie większy oczekiwany odsetek niż w przypadku klubów opozycyjnych.

Wartości prawdopodobieństw nie sumują się, rzecz jasna, do 1. Wynika to z faktu, że w pojedynczej sytuacji może istnieć więcej niż jeden gracz krytyczny. Przykładowo, jeśli jakiś projekt ustawy zyska poparcie wyłącznie PO i PiS, to oba te kluby są graczami krytycznymi dla tej koalicji – jeśli którykolwiek z nich zmieni zdanie, wówczas wniosek przepadnie w głosowaniu sejmowym. Jednocześnie w tej sytuacji pozostali gracze nie są graczami krytycznymi – jeśli któryś z nich zmieniłby zachowanie, decyzja izby pozostałaby bez zmian. Przedstawione wartości *V'* są zatem prawdopodobieństwami posiadania władzy nad decyzjami zgromadzenia, zaś wartości indeksu siły (*V*) są miarami udziału w tej władzy poszczególnych klubów parlamentarnych.

Uwagi końcowe

Przedstawiliśmy koncepcję hybrydowych indeksów siły uwzględniających strukturę bliskości członków zgromadzenia decyzyjnego. Zaproponowany model pozwala na wyznaczenie prawdopodobieństw krytyczności graczy. Zastosowana w modelu struktura bliskości posiada interpretację w kategoriach wspólnych standardów oceny głosowanych opcji.

Opisaliśmy także sposób odtwarzania wspomnianej struktury oparty na estymacji metodą najwyższej wiarygodności. Przedstawiona koncepcja wychodzi z tych samych założeń co indeksy hybrydowe. Dzięki temu oparcie indeksu hybrydowego na tak odtworzonej strukturze cząstkowej jednolitości nie wymaga przyjmowania dodatkowych założeń.

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.20

Wszystkie wymienione zalety sprawiają, że zaproponowana metoda wydaje się dobrym narzędziem do prowadzenia badań empirycznych procesów decyzyjnych w zgromadzeniach.

Możliwości tej koncepcji nie ograniczają się do pojedynczych analiz zachowań klubów parlamentarnych w wybranym okresie. Przeprowadzenie badań dynamiki struktur bliskości w parlamencie pozwoliłoby lepiej zrozumieć relacje między decydentami i rozkład sił w parlamencie. Ponadto do interesujących wniosków doprowadziłoby odtworzenie struktury bliskości między pojedynczymi parlamentarzystami i porównanie jej ze strukturą klubową. Przedsięwzięcie to, jakkolwiek nieskomplikowane teoretycznie, napotyka poważną barierę natury technicznej – wymagałoby to wykonania niezwykle dużej liczby względnie prostych rachunków. Liczba możliwych podziałów zbioru 460 posłów jest liczbą kilkusetcyfrową. Jest to zarówno osobny, ciekawy problem dla nas jako badaczy procesów decyzyjnych, jak i wyzwanie o charakterze informatycznym.

Aneks

Lista głosowań wybranych do analizy

posiedzenie 5., głosowanie 3.

Pierwsze czytanie pilnego rządowego projektu ustawy o składkach na ubezpieczenie zdrowotne rolników za 2012 r. – głosowanie nad dodatkowym skierowaniem rządowego projektu ustawy o składkach na ubezpieczenie zdrowotne rolników za 2012 r., zawartego w druku nr 103, do Komisji Rolnictwa i Rozwoju Wsi.

posiedzenie 5., głosowanie 8.

Sprawozdanie Komisji o pilnym projekcie ustawy o zmianie ustawy o emeryturach i rentach z Funduszu Ubezpieczeń Społecznych oraz niektórych innych ustaw – głosowanie nad przyjęciem 1. poprawki.

posiedzenie 5., głosowanie 11.

Sprawozdanie Komisji o pilnym projekcie ustawy o zmianie ustawy o emeryturach i rentach z Funduszu Ubezpieczeń Społecznych oraz niektórych innych ustaw – głosowanie nad przyjęciem w całości projektu ustawy o zmianie ustawy o emeryturach i rentach z Funduszu Ubezpieczeń Społecznych oraz niektórych innych ustaw, w brzmieniu proponowanym przez Komisję Polityki Społecznej i Rodziny.

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.20

posiedzenie 5., głosowanie 14.

Sprawozdanie Komisji o pilnym projekcie ustawy o składkach na ubezpieczenie zdrowotne rolników za 2012 r. – głosowanie nad przyjęciem poprawek 1., 2., 5. i 10.

posiedzenie 5., głosowanie 18.

Sprawozdanie Komisji o pilnym projekcie ustawy o składkach na ubezpieczenie zdrowotne rolników za 2012 r. – głosowanie nad przyjęciem w całości projektu ustawy o składkach na ubezpieczenie zdrowotne rolników za 2012 r., w brzmieniu przedłożenia zawartego w druku nr 103, wraz z przyjętą poprawką.

posiedzenie 5., głosowanie 23.

Sprawozdanie Komisji o pilnym projekcie ustawy o zmianie ustawy o refundacji leków, środków spożywczych specjalnego przeznaczenia żywieniowego oraz wyrobów medycznych oraz niektórych innych ustaw – głosowanie nad przyjęciem 1. wniosku mniejszości.

posiedzenie 5., głosowanie 32.

Sprawozdanie Komisji o pilnym projekcie ustawy o zmianie ustawy o refundacji leków, środków spożywczych specjalnego przeznaczenia żywieniowego oraz wyrobów medycznych oraz niektórych innych ustaw – głosowanie nad przyjęciem w całości projektu ustawy o zmianie ustawy o refundacji leków, środków spożywczych specjalnego przeznaczenia żywieniowego oraz wyrobów medycznych oraz niektórych innych ustaw, w brzmieniu proponowanym przez Komisję Zdrowia, wraz z przyjętymi poprawkami.

posiedzenie 6., głosowanie 7.

Sprawozdanie Komisji o pilnym projekcie ustawy zmieniającej ustawę o zmianie ustawy o systemie oświaty oraz o zmianie niektórych innych ustaw – głosowanie nad przyjęciem w całości projektu ustawy zmieniającej ustawę o zmianie ustawy o systemie oświaty oraz o zmianie niektórych innych ustaw, w brzmieniu przedłożenia zawartego w druku nr 102.

posiedzenie 6., głosowanie 11.

Wniosek o wyrażenie wotum nieufności wobec Ministra Zdrowia Bartosza Arłukowicza – głosowanie nad przyjęciem wniosku o wyrażenie wotum nieufności wobec Ministra Zdrowia Bartosza Arłukowicza.

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.20

posiedzenie 6., głosowanie 13.

Pierwsze czytanie rządowego projektu ustawy o podatku od wydobycia niektórych kopalin – głosowanie nad przyjęciem wniosku o odrzucenie w pierwszym czytaniu rządowego projektu ustawy o podatku od wydobycia niektórych kopalin, zawartego w druku nr 144 – podwyższenie podatku od wydobycia rudy miedzi i srebra.

Warunkowe prawdopodobieństwa występujących empirycznie typów głosowań oraz wartości funkcji wiarygodności dla poszczególnych struktur cząstkowej jednolitości

Legenda:

a – PO

b – PiS

c – PSL

d – SLD

e – RP

Typ głosowania	PO	PiS	RP	PSL	SLD
1	N	T	T	N	T
2	T	T	T	T	T
3	N	T	T	N	N
4	T	N	T	T	N
5	T	T	N	T	N
6	T	N	T	T	T

Struktura	Typ głosowania						Funkcja wiarygodności
	1	2	3	4	5	6	
{*abcde*}	1/60	1/6	1/60	1/60	1/60	1/30	3.3×10^{-17}
{*a*} {*bcde*}	1/40	1/10	1/60	1/60	1/60	1/40	1.1×10^{-16}
{*b*} {*acde*}	1/60	1/10	1/40	1/40	1/60	1/10	1.3×10^{-16}
{*c*} {*abde*}	1/40	1/10	1/60	1/60	1/60	1/40	1.1×10^{-16}
{*d*} {*abce*}	1/60	1/10	1/60	1/40	1/40	1/40	3.3×10^{-17}
{*e*} {*abcd*}	1/60	1/10	1/40	1/60	1/40	1/40	3.3×10^{-17}
{*ab*} {*cde*}	1/72	1/12	1/72	1/72	1/36	1/24	9.6×10^{-18}
{*ac*} {*bde*}	**1/12**	**1/12**	**1/36**	**1/36**	**1/36**	**1/36**	$\mathbf{2.0 \times 10^{-13}}$
{*ad*} {*bce*}	1/72	1/12	1/36	1/72	1/72	1/36	6.4×10^{-18}
{*ae*} {*bcd*}	1/72	1/12	1/72	1/36	1/72	1/36	6.4×10^{-18}
{*bc*} {*ade*}	1/72	1/12	1/72	1/72	1/36	1/24	9.6×10^{-18}
{*bd*} {*ace*}	1/36	1/12	1/72	1/12	1/72	1/24	9.2×10^{-16}

Struktura	Typ głosowania						Funkcja wiarygodności
	1	2	3	4	5	6	
{*be*} {*acd*}	1/36	1/12	1/12	1/72	1/72	1/24	9.2×10^{-16}
{*cd*} {*abe*}	1/72	1/12	1/36	1/72	1/72	1/36	6.4×10^{-18}
{*ce*} {*abd*}	1/72	1/12	1/72	1/36	1/72	1/36	6.4×10^{-18}
{*de*} {*abc*}	1/36	1/12	1/72	1/72	1/12	1/36	6.2×10^{-16}
{*a*} {*b*} {*cde*}	1/48	1/16	1/48	1/48	1/48	1/16	1.4×10^{-16}
{*a*} {*c*} {*bde*}	1/16	1/16	1/48	1/48	1/48	1/48	1.1×10^{-14}
{*a*} {*d*} {*bce*}	1/48	1/16	1/48	1/48	1/48	1/48	4.6×10^{-17}
{*a*} {*e*} {*bcd*}	1/48	1/16	1/48	1/48	1/48	1/48	4.6×10^{-17}
{*b*} {*c*} {*ade*}	1/48	1/16	1/48	1/48	1/48	1/16	1.4×10^{-16}
{*b*} {*d*} {*ace*}	1/48	1/16	1/48	1/16	1/48	1/16	4.2×10^{-16}
{*b*} {*e*} {*acd*}	1/48	1/16	1/16	1/48	1/48	1/16	4.2×10^{-16}
{*c*} {*d*} {*abe*}	1/48	1/16	1/48	1/48	1/48	1/48	4.6×10^{-17}
{*c*} {*e*} {*abd*}	1/48	1/16	1/48	1/48	1/48	1/48	4.6×10^{-17}
{*d*} {*e*} {*abc*}	1/48	1/16	1/48	1/48	1/16	1/48	1.4×10^{-16}
{*a*} {*bc*} {*de*}	1/36	1/18	1/72	1/72	1/18	1/36	2.7×10^{-16}
{*a*} {*bd*} {*ce*}	1/36	1/18	1/72	1/18	1/72	1/36	2.7×10^{-16}
{*a*} {*be*} {*cd*}	1/36	1/18	1/18	1/72	1/72	1/36	2.7×10^{-16}
{*b*} {*ac*} {*de*}	1/18	1/18	1/36	1/36	1/18	1/18	7.0×10^{-14}
{*b*} {*ad*} {*ce*}	1/72	1/18	1/36	1/36	1/72	1/18	1.7×10^{-17}
{*b*} {*ae*} {*cd*}	1/72	1/18	1/36	1/36	1/72	1/18	1.7×10^{-17}
{*c*} {*ab*} {*de*}	1/36	1/18	1/72	1/72	1/18	1/36	2.7×10^{-16}
{*c*} {*ad*} {*be*}	1/36	1/18	1/18	1/72	1/72	1/36	2.7×10^{-16}
{*c*} {*ae*} {*bd*}	1/36	1/18	1/72	1/18	1/72	1/36	2.7×10^{-16}
{*d*} {*ab*} {*ce*}	1/72	1/18	1/72	1/36	1/36	1/36	8.5×10^{-18}
{*d*} {*ac*} {*be*}	1/18	1/18	1/18	1/36	1/36	1/36	3.5×10^{-14}
{*d*} {*ae*} {*bc*}	1/72	1/18	1/72	1/36	1/36	1/36	8.5×10^{-18}
{*e*} {*ab*} {*cd*}	1/72	1/18	1/36	1/72	1/36	1/36	8.5×10^{-18}
{*e*} {*ac*} {*bd*}	1/18	1/18	1/36	1/18	1/36	1/36	3.5×10^{-14}
{*e*} {*ad*} {*bc*}	1/72	1/18	1/36	1/72	1/36	1/36	8.5×10^{-18}
{*a*} {*b*} {*c*} {*de*}	1/24	1/24	1/48	1/48	1/24	1/24	3.9×10^{-15}
{*a*} {*b*} {*d*} {*ce*}	1/48	1/24	1/48	1/24	1/48	1/24	1.2×10^{-16}
{*a*} {*b*} {*e*} {*cd*}	1/48	1/24	1/24	1/48	1/48	1/24	1.2×10^{-16}
{*a*} {*c*} {*d*} {*be*}	1/24	1/24	1/24	1/48	1/48	1/48	2.0×10^{-15}
{*a*} {*c*} {*e*} {*bd*}	1/24	1/24	1/48	1/24	1/48	1/48	2.0×10^{-15}
{*a*} {*d*} {*e*} {*bc*}	1/48	1/24	1/48	1/48	1/24	1/48	6.2×10^{-17}
{*b*} {*c*} {*d*} {*ae*}	1/48	1/24	1/48	1/24	1/48	1/24	1.2×10^{-16}
{*b*} {*c*} {*e*} {*ad*}	1/48	1/24	1/24	1/48	1/48	1/24	1.2×10^{-16}
{*b*} {*d*} {*e*} {*ac*}	1/24	1/24	1/24	1/24	1/24	1/24	1.6×10^{-14}
{*c*} {*d*} {*e*} {*ab*}	1/48	1/24	1/48	1/48	1/24	1/48	6.2×10^{-17}
{*a*} {*b*} {*c*} {*d*} {*e*}	1/32	1/32	1/32	1/32	1/32	1/32	8.9×10^{-16}

DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.20

Bibliografia

Dubey, P. 1975. *On the Uniqueness of the Shapley Value*. „International Journal of Game Theory" 4(3): 131-139.

Dubey, P. i L. S. Shapley. 1979. *Mathematical Properties of the Banhaf Power Index*. „Mathematics of Operations Research" 4: 99-131.

Ekes, M. 2006. *Two types of the Banzhaf-Coleman index in games with a priori unions*. „Roczniki Kolegium Analiz Ekonomicznych SGH" 15: 31-45.

Falsenthal, D.S. i M. Machover. 1998. *The Measurement of Voting Power*. Cheltenham: Edward Elgar.

Feltkamp, V. 1995. *Alternative axiomatic characterizations of the Shapley and Banzhaf values*. „International Journal of Game Theory" 24.2: 179-186.

Grofman, B., G. Owen, N. Noviello, G. Glazer. 1987. *Stability and centrality of legislative choice in the spatial context*. „American Political Science Review" 81: 539-552.

Jasiński, M. 2003. *Stanowisko ideologiczne a znaczenie uczestnika zgromadzenia decyzyjnego*. „Studia Socjologiczne" 1: 139-174.

Jasiński, M. 2012. *Przestrzeń ideologiczna oparta na politycznych faktach*. „Decyzje" 17: 5-28.

Jasiński, M. 2013. *Przestrzenna generalizacja wartości Shapleya dla gier prostych jako mocny punkt w chaosie ideologii*. „Decyzje" 20: 49-65.

Laruelle, A. i F. Valenciano. 2001. *Shapley-Shubik and Banzhaf indices revisited*. „Mathematics of Operations Research" 26.1: 89-104.

Lehrer, E. 1988. *An axiomatization of the Banzhaf value*. „International Journal of Game Theory" 17: 89-99.

Lissowski, G., J. Haman, M. Jasiński. 2008. *Podstawy statystyki dla socjologów*. Warszawa: WN Scholar.

Mercik, J.W. 1999. *Modelowanie zachowań parlamentarnych – Sejm RP II kadencji*. w: H. Sosnowska (red.) „Grupowe podejmowanie decyzji" Warszawa: WN Scholar: 81-102.

Napel, S. i M. Widgrén. 2002. *Power measurement as sensitivity analysis a unified approach*. „Journal of Theoretical Politics" 16.4: 517-538.

Owen, G. 1971. *Political games*. „Naval Research Logistics Quarterly" 18: 345-355.

Owen, G. 1977. *Values of games with a priori unions*. w: R. Henn i O. Moeschlin (red.) „Mathematical economics and game theory". Berlin: 76-88.

Owen, G. 1981. *Modification of the Banzhaf – Coleman Index for games with a priori unions*. w: M. Holler (red.) „Power, Voting and Voting Power", Wurzburg: 355-358.

Rapoport, A. i E. Golan. 1985. *Assessment of political power in the Israeli Knesset*. „American Political Science Review" 79: 673-692.

Shapley, L.S. 1977. *A comparison of power indices and a non-symmetric generalization*. RAND Paper P-5872. Rand Corporation. Santa Monica.

Shapley, L.S. i M. Shubik. 1954. *A method of evaluating the distribution of power in a committee system*. „American Political Science Review" 48: 787-792.

Silvey, S.D. 1978. *Wnioskowanie statystyczne*. R. Zieliński (tłum.)Warszawa: PWN.

Straffin, P.D. 1977. *Homogeneity, independence, and power indices*. „Public Choice" 30: 107-118.

 DOI: 10.7206/DEC.1733-0092.20